ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
3, 15 (1967)

KONCEPCJE OPISU ZANIKANIA PAMIĘCI MATERIAŁU

PIOTR PERZYNA (WARSZAWA)

«While laymen and philosophers of science often believe, contend, or at least hope, that physical theories are directly inferred from experiments, anyone who has faced the problem of discovering a good constitutive equation or anyone who has sought and found the historical origin of the successful field theories knows how childish is such a prejudice. The task of the theorist is to bring order into the chaos of the phenomena of nature, to invent a language by which a class of these phenomena can be described efficiently and simply. Here is the place for 'intuition', and here the old preconception, common among natural philosophers, that nature is simple and elegant, has led to many great successes. Of course physical theory must be based on experience, but experiment comes after, rather than before, theory. Without theoretical concepts one would neither know what experiments to perform nor be able to interpret their outcome.»

C. Truesdell and W. Noll, *Non Linear Field Theories of Mechanics*, Encyclopedia of Physics, vol. III/3, Springer, Berlin 1965, p. 4.

«Experiment is the sole judge of scientific 'truth'. But what is the source of knowledge? Where do the laws that are to be tested come from? Experiment, itself, helps to produce these laws, in the sense that it gives us hints. But also needed is imagination to create from these hints the great generalizations — to guess at the wonderful, simple, but very strange patterns beneath them all, and then to experiment to check again whether we have made the right guess.»

R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Addison—Wesley, New York 1963, p. 1—1.

1. Wstęp

Śledząc uważnie najnowsze prace dotyczące ogólnego opisu materiałów można łatwo zauważyć wyraźną tendencję do uogólnień natury matematycznej. Przejawia się to w dążeniu do opisu nie określonego materiału, ale pewnej klasy materiałów. Budując teorię odnoszącą się do całej klasy materiałów można zawsze z niej otrzymać pewne szczególne opisy określonych materiałów rzeczywistych lub ich uproszczonych modeli. W ramach pewnego przyjętego modelu opisuje się cechy istotne dla większości materiałów danej klasy. Dobrym przykładem takiego modelu idealnego materiału jest *materiał z pamięcią*, w szczególności *materiał prosty*. Teoria materiału prostego została ostatnio rozwinięta bardzo szeroko zarówno dla procesów izotermicznych, jak również dla ogólnych procesów termodynamicznych.

Dzięki zastosowaniu nowoczesnego aparatu matematycznego zbudowano nowe podstawy mechaniki ośrodków ciągłych. Trzeba tu wyróżnić przede wszystkim metody aksjomatyczne, których główną zaletą jest dbałość o matematyczną ścisłość definicji oraz o jasne interpretacje fizykalne otrzymanych rezultatów. Właśnie na tej obiecującej drodze rozwinięta została teoria materiałów prostych. Dlatego cechami charakterystycznymi tej teorii są zarówno dobrze ugruntowane podstawy fizykalne, jak również precyzja matematyczna.

Kiedy przekonano się, że przez odpowiednie aproksymacje równań konstytutywnych opisujących zachowanie się materiału prostego można otrzymać opisy wcześniej już znanych materiałów, wtedy zauważono jeszcze jedną zaletę takiej metody. Wykazano mianowicie, że na bazie takiej teorii można odpowiedzieć na podstawowe dla praktyki pytania, w jakim sensie rozumiane są te aproksymacje i w jakich konkretnych przypadkach procesów deformacji mogą być stosowane. W tym właśnie tkwi główna przyczyna tak szerokiego zainteresowania się tymi zagadnieniami, jakie obserwujemy w ciągu ostatnich pięciu lat. Drugą przyczyną jest ogólność teorii materiałów prostych. Okazało się, że teoria ta może być przydatna zarówno do opisu niektórych metali, jak również wielu polimerów czy gruntów.

Aproksymacje równań konstytutywnych mogą być otrzymane na podstawie pewnych ograniczeń nałożonych na *pamięć materiału*. Ograniczenia te sprowadzają się na ogół do założenia, że pamięć materiału może zanikać.

Celem obecnej pracy jest szerokie omówienie różnych koncepcji opisu zanikania pamięci materiału. Należy jednak podkreślić, że dążono do pokazania rezultatów uzyskanych przez wielu autorów i na ogół przy różnych założeniach w ramach pewnej jednolitej metody, jaką można uzyskać w oparciu o metryzowalną przestrzeń topologiczną. Pozwoliło to na traktowanie wszystkich otrzymanych rezultatów jako pewnych szczególnych przypadków, co w znacznym stopniu przyczyniło się do bardziej zwartej konstrukcji pracy.

Wszystkie rozważane zagadnienia będą dotyczyły skończonych deformacji ośrodka ciągłego, jakie zachodzą podczas procesów izotermicznych.

Notacja oparta jest na koncepcji tensorowych pól dwupunktowych w zapisie absolutnym. Na ogół nie będziemy zapisywać rezultatów w określonym układzie współrzędnych. Odstępujemy od tej zasady tylko w tych przypadkach, kiedy wzory napisane we współrzędnych mają bardziej oczywisty charakter.

2. Materiał prosty

2.1. Podstawowe definicje i opis deformacji. *Ciało* $\mathcal{B}$ będziemy traktować jako trójwymiarową różniczkowalną rozmaitość, której elementy X nazywać będziemy cząsteczkami (1). Natomiast przez *konfigurację* χ *ciała* $\mathcal{B}$ rozumieć będziemy gładki homeomorfizm ciała $\mathcal{B}$ na obszar trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa, tzn.

$$x = \chi(\mathrm{X}), \qquad \mathrm{X} = \chi^{-1}(x), \tag{2.1}$$

(1) Opisy ruchu, deformacji i naprężenia wzorowane są na propozycji W. Nolla [28, 29], która została szeroko rozwinięta w monografii C. Truesdella i W. Nolla [41]; por. również [31].

gdzie χ^{-1} oznacza odwzorowanie odwrotne do χ. Punkt $x = \chi(\mathrm{X})$ jest nazywany miejscem zajmowanym przez cząstkę X.

Ruchem ciała $\mathcal{B}$ nazywać będziemy jednoparametrową rodzinę konfiguracji χ_t, gdzie rzeczywisty parametr t będziemy utożsamiać z czasem. Możemy więc napisać

$$x = \chi_t(\mathrm{X}) = \chi(\mathrm{X}, t). \tag{2.2}$$

Punkt $x = \chi(\mathrm{X}, t)$ jest miejscem, w którym znajduje się cząstka X w chwili t.

Chociaż ciała $\mathcal{B}$ nie należy utożsamiać z jakąkolwiek z jego konfiguracji przestrzennych, to jednak obserwacji fizykalnych nie można na nim przeprowadzać bez przypisania mu jakiejś wybranej konfiguracji. Z wielu względów dogodnie jest uwzględniać ten fakt identyfikując poszczególne cząstki ciała przez podawanie ich położenia w jakiejś konkretnej, ustalonej konfiguracji. Tę ustaloną konfigurację będziemy nazywać *konfiguracją odniesienia* i oznaczać przez $\varkappa$. Konfiguracja odniesienia $\varkappa$ może być jedną z pozycji zajmowanych przez ciało w czasie jego ruchu. Miejsce cząstki X w konfiguracji odniesienia $\varkappa$ określone będzie przez

$$X = \varkappa(\mathrm{X}). \tag{2.3}$$

Przypiszemy cząstce pewien układ współrzędnych X^α, który będziemy nazywać *układem współrzędnych materialnych*. Wtedy równanie (2.3) może być napisane następująco:

$$X = \varkappa(X^\alpha) \quad \text{lub} \quad X^\alpha = \varkappa^{-1\alpha}(X). \tag{2.4}$$

Równanie $(2.4)_2$ definiuje układ współrzędnych; tym sposobem cząstka X i jej miejsce $X = \varkappa(\mathrm{X})$ w konfiguracji odniesienia mają te same współrzędne X^α. Dzięki temu równanie (2.2) opisujące ruch ciała $\mathcal{B}$ możemy napisać w postaci

$$x = \chi(\varkappa^{-1}(X), t) = \chi(X, t). \tag{2.5}$$

Równanie to opisuje rodzinę konfiguracji ciała w stosunku do konfiguracji odniesienia.

Odnośnie do rozpatrywanego ruchu przyjmiemy następujące aksjomaty:

1) aksjomat ciągłości wymagający, aby funkcja ruchu i funkcja odwrotna *miały ciągłe pochodne* dowolnego rzędu, tzn. funkcje χ^k i $\chi^{-1\alpha}$ są dowolną ilość razy różniczkowalne;

2) aksjomat o nieprzenikalności materii, który wymaga, aby funkcja (2.5) była funkcją jednowartościową.

Jeżeli mamy określoną funkcję ruchu (2.5), to dowolny obiekt geometryczny $\mathbf{A}$ zależny od czasu i charakteryzujący pewne pole może być rozpatrywany jako funkcja $\mathbf{A}(X, t)$ cząstki i czasu lub jako funkcja $\mathbf{A}(x, t)$ miejsca i czasu. Zmienne X i t nazywamy zmiennymi materialnymi, a zmienne x i t zmiennymi przestrzennymi.

Prędkością $\dot{x}$ nazywamy prędkość zmiany położenia cząsteczki w czasie ruchu i definiujemy ją następująco:

$$\dot{x} = \left[\frac{\partial}{\partial t}\chi(X, t)\right]_{X=\mathrm{const}}. \tag{2.6}$$

Równanie (2.5), które określa rodzinę konfiguracji ciała w stosunku do konfiguracji odniesienia $\varkappa$, możemy również interpretować jako rodzinę deformacji w stosunku do konfiguracji odniesienia, przy czym słowo deformacja oznacza zarówno zmiany kształtu jak i orientacji ciała w przestrzeni.

Gradient deformacji $\boldsymbol{F}$ zdefiniowany następująco:

$$\boldsymbol{F} = \partial \chi (X, t)/\partial X \tag{2.7}$$

opisuje wszystkie lokalne własności deformacji, dlatego nazywany jest *podstawową miarą deformacji*. Wprowadzimy też *odwrotną miarę deformacji*

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \partial \chi^{-1} (\boldsymbol{x}, t)/\partial \boldsymbol{x}. \tag{2.8}$$

Spełniony jest oczywiście związek

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1} = \mathbf{1}. \tag{2.9}$$

Czasami wygodnie jest przyjąć jako konfigurację odniesienia aktualną konfigurację ciała w chwili t. Zmienna czasowa oznaczana będzie wtedy przez τ, a miejsce zajmowane przez cząstkę X w chwili τ przez

$$\xi = \chi (\mathrm{X}, \tau). \tag{2.10}$$

Równanie

$$\mathrm{X} = \varkappa_t^{-1} (x), \tag{2.11}$$

gdzie $\varkappa_t$ jest nową konfiguracją odniesienia, przyjmiemy jako definicję układu współrzędnych [por. z def. $(2.4)_2$]. Odpowiednią funkcję deformacji oznaczać będziemy przez $\chi_{(t)}$ i nazywać *funkcją deformacji względnej*. Jej wartość

$$\xi = \chi_{(t)} (\boldsymbol{x}, \tau) \tag{2.12}$$

jest miejscem w chwili τ tej cząstki, która w chwili t zajmowała miejsce $\boldsymbol{x}$.

Gradient funkcji deformacji $\chi_{(t)}$ nazywać będziemy *gradientem deformacji względnej* i oznaczać symbolem

$$\boldsymbol{F}_{(t)} (\tau) = \partial \chi_{(t)} (\boldsymbol{x}, \tau)/\partial \boldsymbol{x}. \tag{2.13}$$

Analogicznie do (2.8) zdefiniujemy *odwrotny tensor gradientu deformacji względnej*

$$\boldsymbol{F}_{(t)}^{-1} (\tau) = \partial \chi_{(t)}^{-1} (\xi, \tau)/\partial \xi. \tag{2.14}$$

Z twierdzenia o rozkładzie biegunowym wynika, że każda odwracalna transformacja liniowa $\boldsymbol{F}$ ma dwa jednoznaczne rozkłady iloczynowe

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}, \qquad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}, \tag{2.15}$$

w których $\boldsymbol{R}$ jest ortogonalne, a $\boldsymbol{U}$ i $\boldsymbol{V}$ są symetryczne i dodatnio określone.

Zastosowanie twierdzenia o rozkładzie biegunowym do gradientu deformacji $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(X, t)$ definiuje $\boldsymbol{R}$ jako *tensor obrotu*, $\boldsymbol{U}$ jako *prawy tensor rozciągnięcia* oraz $\boldsymbol{V}$ jako *lewy tensor rozciągnięcia*. Kwadrat prawego tensora rozciągnięcia

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \tag{2.16}$$

nazywany jest *prawym tensorem deformacji Cauchy'ego-Greena*, a kwadrat lewego tensora rozciągnięcia

$$B = V^2 = FF^T = RCR^T \tag{2.17}$$

nazywany jest *lewym tensorem deformacji Cauchy'ego-Greena.*

Jeżeli twierdzenie o rozkładzie biegunowym zastosujemy do tensora gradientu deformacji względnej $F_{(t)} = F_{(t)}(x, \tau)$, to możemy wprowadzić następujące oznaczenia: $R_{(t)}$, $U_{(t)}$, $V_{(t)}$, $C_{(t)}$ i $B_{(t)}$ odpowiednio dla tensora względnego obrotu tensorów względnego rozciągnięcia i tensorów względnej deformacji Cauchy'ego-Greena.

2.2. Opis naprężenia. Niech w każdej chwili t na powierzchni $\partial\mathcal{P}$ ograniczającej pewną część $\mathcal{P}$ ciała $\mathcal{B}$ zdefiniowane będzie pole wektorowe $t(x, \mathcal{P})$. Pole to nazywać będziemy *gęstością siły kontaktowej* albo *powierzchniowej*. Załóżmy, że istnieje funkcja wektorowa $t(x, n)$, zdefiniowana dla wszystkich punktów x w ciele $\mathcal{B}$ i dla wszystkich wektorów jednostkowych n, taka że

$$t(x, \mathcal{P}) = t(x, n), \tag{2.18}$$

gdzie n jest zewnętrznym, jednostkowym wektorem normalnym w punkcie x na powierzchni ograniczającej $\mathcal{P}$. Wektor $t(x, n)$ jest nazywany *wektorem naprężenia w punkcie* x działającym na zorientowany element powierzchni o normalnej n. *Tensor naprężenia* $T(x)$ definiujemy tak, aby wektor naprężenia wyrażał się następująco:

$$t(x, n) = T(x)\, n. \tag{2.19}$$

Podstawowe prawa mechaniki klasycznej, nazywane prawami Eulera, wymagają, aby w układzie inercjalnym reakcja dowolnego ciała równa była działającemu na nie obciążeniu. Wyrażają więc zasady zachowania pędu i zachowania momentu pędu.

Koniecznym i wystarczającym warunkiem dla zasady zachowania pędu jest równanie

$$\operatorname{div} T - \varrho\ddot{x} = -\varrho b \tag{2.20}$$

spełnione w każdym punkcie ciała $\mathcal{B}$, przy czym przez ϱ oznaczono gęstość ciała w aktualnej konfiguracji, a przez $b(x, t)$ wektor siły masowej. Równanie (2.20) nazywane jest *pierwszym prawem ruchu Cauchy'ego.*

Koniecznym i wystarczającym warunkiem spełnienia zasady zachowania momentu pędu w ciele, dla którego spełniona jest zasada zachowania pędu, jest symetryczność tensora naprężenia (2), tzn.

$$T = T^T. \tag{2.21}$$

Równanie (2.21) nazywane jest *drugim prawem ruchu Cauchy'ego.*

(2) Pomijamy tu działanie momentów powierzchniowych i masowych oraz naprężeń momentowych.

2.3. Zasada obiektywności materiału. Rozważmy ciało $\mathcal{B}$ złożone z punktów materialnych X. *Proces dynamiczny w ciele* $\mathcal{B}$ będzie opisany przez następujące funkcje cząsteczki X i czasu t: funkcja deformacji $\boldsymbol{x} = \chi(\mathrm{X}, t)$, tensor naprężenia $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathrm{X}, t)$ oraz wektor siły masowej $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\mathrm{X}, t)$.

Układ funkcji $\{\chi, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{b}\}$ zgodny z prawami ruchu Cauchy'ego będziemy nazywali procesem dynamicznym. Wyliczając z pierwszego prawa Cauchy'ego (2.20) funkcję $\boldsymbol{b}$ i zakładając dalej, że tensor naprężenia $\boldsymbol{T}$ jest symetryczny, widzimy, że do wyspecyfikowania procesu dynamicznego wystarczy określić dwie funkcje $\{\chi, \boldsymbol{T}\}$.

Podstawowymi mierzalnymi wielkościami kinematyki klasycznej są odległości i przedziały czasu. Stan pewnego zdarzenia może być określony tylko wtedy, kiedy dany jest układ odniesienia lub obserwator. Układ odniesienia jest rozumiany jako możliwy sposób odnoszenia fizykalnej rzeczywistości do trójwymiarowej punktowej przestrzeni Euklidesa i rzeczywistej osi czasu.

Za W. Nollem [28] będziemy parę $\{\boldsymbol{x}, t\}$ nazywać *zdarzeniem*. Punkt $\boldsymbol{x}$ w przestrzeni i czas t określają zdarzenie. Zbiór wszystkich zdarzeń jest nazywany czasoprzestrzenią. Stąd zmiana układu odniesienia może być interpretowana jako jednoznaczne przekształcenie czasoprzestrzeni w siebie, przy którym są zachowane odległości i przedziały czasu. Można pokazać (por. W. Noll [28]), że zdarzenie $\{\boldsymbol{x}, t\}$ i jego obraz $\{\boldsymbol{x}^*, t^*\}$ przy zmianie układu odniesienia są powiązane sztywną transformacją wraz z przesunięciem czasu. Stąd mamy

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{x}, \qquad t^* = t - a, \tag{2.22}$$

gdzie $\boldsymbol{c}(t)$ jest wektorem, $\boldsymbol{Q}(t)$ tensorem ortogonalnym i a rzeczywistą stałą. Warto zaznaczyć, że transformacja $(2.22)_1$ należy do grupy przekształceń ortogonalnych.

Należy wyraźnie odróżnić zmianę układu odniesienia od transformacji układu współrzędnych. Pierwsza z nich jest przekształceniem czasoprzestrzeni, druga dotyczy tylko współrzędnych punktów.

Zbadajmy prawa transformacyjne przy zmianie układu odniesienia dla dwóch funkcji $\{\chi, \boldsymbol{T}\}$ opisujących proces dynamiczny. Funkcja $\chi(\mathrm{X}, t)$ określa ruch ciała $\mathcal{B}$ względem pewnego układu odniesienia. Zgodnie z (2.22) taki sam ruch jest opisany w nowym układzie odniesienia przez funkcję

$$\boldsymbol{x}^* = \chi^*(\mathrm{X}, t) = \boldsymbol{c}(t) + \boldsymbol{Q}(t)\,\chi(\mathrm{X}, t), \qquad t^* = t - a. \tag{2.23}$$

Z punktu widzenia fizykalnego χ i χ^* opisują ten sam ruch względem różnych układów. Natomiast w interpretacji matematycznej możemy rozpatrywać χ^* jako ruch otrzymany z χ przez nałożenie zależnej od czasu sztywnej transformacji i przez przesunięcie na osi czasu. Będziemy mówić, że dwa ruchy związane równaniami (2.23) są ruchami równoważnymi. Tensor naprężenia $\boldsymbol{T}(t)$ jest tensorem drugiego rzędu i przy zmianie układu odniesienia przekształca się następująco:

$$\boldsymbol{T}^*(t^*) = \boldsymbol{Q}(t)\,\boldsymbol{T}(t)\,\boldsymbol{Q}(t)^T. \tag{2.24}$$

Dwa procesy dynamiczne $\{\chi, \boldsymbol{T}\}$ i $\{\chi^*, \boldsymbol{T}^*\}$ związane ze sobą przy zmianie układu odniesienia transformacjami (2.23) i (2.24) będziemy nazywać procesami równoważnymi. Możemy powiedzieć, że dwa układy funkcji $\{\chi, \boldsymbol{T}\}$ i $\{\chi^*, \boldsymbol{T}^*\}$

przedstawiają tylko dwa różne sposoby matematycznego opisu tego samego procesu fizykalnego.

Proces dynamiczny nazywać będziemy *procesem dopuszczalnym dla danego materiału*, jeżeli spełnia równanie konstytutywne opisujące dany materiał.

Za podstawową zasadę fizyki klasycznej uznajemy *obiektywność właściwości materiałów*, tzn. ich niezależność od układu odniesienia lub obserwatora. Matematycznie oznacza to, że równania konstytutywne opisujące pewien idealny materiał podlegają następującej zasadzie obiektywności materiału (3):

Równania konstytutywne dla danego materiału są niezmiennicze przy zmianie układu odniesienia. Jeżeli równania konstytutywne są spełnione dla procesu dynamicznego $\{\chi, T\}$, to są spełnione również dla dowolnego procesu równoważnego $\{\chi^*, T^*\}$.

2.4. Równanie konstytutywne. Zajmijmy się sformułowaniem podstawowej zależności między funkcjami χ i T określającymi proces dynamiczny, która będzie definiować dany idealny materiał. Zależność tę nazywać będziemy *równaniem konstytutywnym*. W tym celu wypowiemy najpierw dwa podstawowe postulaty dla czysto mechanicznej teorii ośrodka ciągłego.

1. Zasada determinizmu: *Naprężenie w ciele jest określone przez historię ruchu tego ciała.*

2. Zasada lokalnego działania: *Przy określaniu naprężenia w danej cząstce* X *ruch na zewnątrz dowolnie małego otoczenia* X *może być pominięty.*

Te dwie zasady wskazują, że naprężenie w punkcie X będzie określone przez historię ruchu tylko z dowolnie małego otoczenia punktu X. Można wykazać (por. C. TRUESDELL i W. NOLL [41]), że historia ruchu w dowolnie małym otoczeniu punktu X jest określona historią gradientu deformacji F, liczoną w tym punkcie. Oznaczmy przez

$$F^t(s) = F(t-s), \quad 0 \leqslant s < \infty, \tag{2.25}$$

historię gradientu deformacji $F(\tau)$ do chwili aktualnej t. Rozumiemy, że $F^t(s)$ jest wartością funkcji F w chwili wcześniejszej o s jednostek czasu od chwili obecnej t, a zmienna s jest okresem czasu od chwili minionej τ do chwili obecnej t. Wyrażając ostatnie wnioski w terminach matematycznych dojdziemy do następującej zależności funkcjonalnej (4)

$$T(t) = \mathop{\mathfrak{R}}_{s=0}^{\infty}\big(F^t(s)\big). \tag{2.26}$$

To pozwala wypowiedzieć zasadę determinizmu dla materiału prostego: naprężenie

(3) W tej postaci zasada obiektywności materiału została sformułowana przez W. NOLLA [28 i 29]. Por. również C. TRUESDELL i W. NOLL [41].

(4) Równanie konstytutywne materiału prostego w postaci (2.26) było uzyskane niezależnie przez A.E. GREENA i R.S. RIVLINA [14–16] oraz przez W. NOLLA [28] (por. również R.S. RIVLIN [35] oraz C. TRUESDELL i W. NOLL [41]). Termodynamiczną teorię materiałów prostych opracował B.D. COLEMAN [9 i 10] (por. również C.-C. WANG i R.M. BOWEN [44]).

$T(t)$ w cząstce X i w czasie t jest określone przez historię gradientu deformacji tej cząstki do chwili aktualnej t.

Aby równanie konstytutywne (2.26) spełniało zasadę obiektywności materiału (5), musi być spełnione dla każdego ortogonalnego tensora drugiego rzędu $Q(s)$ następujące równanie funkcjonalne:

$$Q_0 \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{R}}} \left(F^t(s)\right) Q_0^T = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{R}}} \left(Q(s)\, F^t(s)\right), \qquad Q_0 = Q(0). \tag{2.27}$$

Tensor historii gradientu deformacji $F^t(s)$ ma następujący rozkład biegunowy:

$$F^t(s) = R^t(s)\, U^t(s), \tag{2.28}$$

gdzie $R^t(s)$ i $U^t(s)$ są historiami do chwili czasu t odpowiednio tensora obrotu i prawego tensora rozciągnięcia. Po przyjęciu $Q(s) = \left(R^t(s)\right)^T$ równanie (2.27) daje

$$R(t)^T \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{R}}} \left(F^t(s)\right) R(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{R}}} \left(U^t(s)\right). \tag{2.29}$$

Uwzględniając ostatni rezultat możemy równanie konstytutywne dla materiału prostego napisać w postaci

$$T(t) = R(t) \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{R}}} \left(U^t(s)\right) R(t)^T. \tag{2.30}$$

Otrzymane równanie ma doniosłe znaczenie z dwóch powodów: po pierwsze, daje ogólne rozwiązanie równania funkcjonalnego (2.27), po drugie wykazuje, że aktualny obrót wpływa ogólnie na wartość naprężenia w materiale prostym, natomiast historia obrotu nie ma żadnego wpływu.

Ostatnie wnioski implikują następującą charakterystykę materiału prostego: materiał jest prosty wtedy i tylko wtedy, jeżeli jego reakcję na dowolną historię deformacji określić można na podstawie znajomości jego reakcji na wszystkie historie jednorodnego czystego odkształcenia.

Jest oczywiste, że równanie

$$R(t)^T\, T(t)\, R(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{F}}} \left(C^t(s)\right), \tag{2.31}$$

gdzie $\mathfrak{F}$ jest nowym funkcjonałem konstytutywnym, jest również podstawową i obiektywną postacią równania konstytutywnego dla materiału prostego.

Uwzględniając, że

$$F(\tau) = R_{(t)}(\tau)\, R(t)\, R(t)^T\, U_{(t)}(\tau)\, R(t)\, U(t) \tag{2.32}$$

dostajemy jeszcze inną postać równania konstytutywnego:

$$R(t)^T\, T(t)\, R(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{G}}} \left(C^*_{(t)}(t-s),\, C(t)\right), \tag{2.33}$$

---

(5) Szczegółową dyskusję obiektywnych postaci równania konstytutywnego dla materiału prostego można znaleźć w pracach W. NOLLA [28], R.S. RIVLINA [35] oraz C. TRUESDELLA i W. NOLLA [41].

gdzie wprowadzono następujące oznaczenie:

$$C^*_{(t)}(\tau) = \boldsymbol{R}(t)^T C_{(t)}(\tau)\, \boldsymbol{R}(t). \tag{2.34}$$

Nadamy obecnie ogólnemu równaniu konstytutywnemu (2.33) nieco inną postać przez napisanie prawej strony jako sumy «wyrazu spoczynkowego» i wyrazu, który znika, gdy materiał przez cały czas pozostaje w spoczynku (6). Wygodnie będzie posłużyć się funkcją

$$\boldsymbol{G}^*(s) = C^*_{(t)}(t-s) - \mathbf{1} \tag{2.35}$$

dla opisania historii deformacji. Historia spoczynkowa odpowiada wtedy tożsamości

$$\boldsymbol{G}^*(s) \equiv \mathbf{0}. \tag{2.36}$$

Napiszemy (2.33) w postaci

$$\boldsymbol{R}(t)^T \boldsymbol{T}(t)\, \boldsymbol{R}(t) = \mathfrak{f}\,(\boldsymbol{C}(t)) + \mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty} (\boldsymbol{G}^*(s), \boldsymbol{C}(t)). \tag{2.37}$$

Funkcjonał $\mathfrak{H}$ jest tak określony, że znika dla $\boldsymbol{G}^* \equiv \mathbf{0}$, tzn.

$$\mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty} (\mathbf{0}; \boldsymbol{C}(t)) \equiv \mathbf{0}. \tag{2.38}$$

3. Zanikająca pamięć materiału

3.1. Uzasadnienie fizykalne. Teoria reprezentacji dla funkcjonału konstytutywnego opisującego zachowanie się materiału prostego oparta jest zawsze na pewnych założeniach ograniczających pamięć materiału. W praktyce całkowita historia ciała nigdy nie może być znana. Interpretacja rezultatów doświadczalnych na podstawie teorii materiałów prostych może być poprawna i wydaje się być uzasadniona jedynie wtedy, kiedy wprowadzone zostaną dodatkowe założenia. Jednym z takich założeń może być przyjęcie, że historia materiału badanej próbki, poprzedzająca początek doświadczenia, nie ma istotnego wpływu na jego rezultaty. Założenie to może być spełnione, jeżeli przyjmiemy, że materiał ma *zanikającą pamięć*. Tę fizykalną własność materiału możemy wypowiedzieć w postaci następującej *zasady zanikania pamięci* (por. B. D. Coleman i W. Noll [5] oraz C. Truesdell i W. Noll [41]): *deformacje, które miały miejsce w dalekiej przeszłości, powinny mieć mniejszy wpływ na wartość aktualnego naprężenia niż deformacje z bliskiej przeszłości*.

Od razu należy podkreślić, że nie ma jednoznacznego sposobu przedstawienia zasady zanikania pamięci materiału w terminach matematycznych. Większość opisów zanikania pamięci materiału opracowywana była w przestrzeni unormowanej. Przyjęta norma definiowała jednocześnie topologiczne własności przestrzeni. Łatwo zauważyć, że uzyskamy dużą ogólność w opisie zanikania pamięci materiału, jeżeli

(6) Por. B.D. Coleman i W. Noll [7].

wykorzystamy topologiczną przestrzeń metryzowalną. Pozwoli to zarówno na traktowanie wszystkich dotychczasowych rezultatów jako pewnych szczególnych przypadków, a jednocześnie da możliwość zbadania wielu ich właściwości i pokazania, w jakim pozostają względem siebie stosunku. Taka koncepcja opisu zanikania pamięci materiału została przedstawiona w pracy [32].

3.2. Zasady zanikania pamięci materiału. C. TRUESDELL i W. NOLL [41] pierwsi wyodrębnili dwie podstawowe zasady zanikania pamięci. Pierwsza tzw. *słaba zasada zanikania pamięci* była odpowiednio sformułowanym warunkiem ciągłości dla funkcjonału konstytutywnego. Druga nazywana *silną zasadą zanikania pamięci* była odpowiednio wyrażonym żądaniem różniczkowalności dla tego funkcjonału.

Zarówno słaba jak i silna zasady zanikania pamięci są pewnymi celowo wprowadzonymi ograniczeniami, które dotyczą zarówno klas dopuszczalnych procesów jak i rozważanego materiału. Precyzując warunki ciągłości lub różniczkowalności musimy szczegółowo zdefiniować dziedzinę określoności funkcjonału konstytutywnego, a więc wyodrębnić klasę dopuszczalnych historii deformacji. Ogólność rozważań możemy uzyskać wprowadzając możliwie najsłabsze ograniczenia na historie deformacji. Da to oczywiste korzyści praktyczne jak i teoretyczne. Uzyskamy jednolite ujęcie opisu zanikania pamięci materiału dla realnych procesów deformacji. Aby ten cel osiągnąć, sformułujemy dwie zasady zanikania pamięci materiału w oparciu o metryczną przestrzeń topologiczną. Wprowadzimy następującą definicję dziedziny funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{F}$ [por. równanie (2.31)].

DEFINICJA 1. *Dziedziną funkcjonału konstytutywnego* $\mathfrak{F}$ *będziemy nazywać pewną klasę symetrycznych funckji tensorowych* $C(\tau)$ *będącą podzbiorem przestrzeni metrycznej* $\mathcal{M}(\mathcal{C}, d)$, *która składa się ze zbioru* $\mathcal{C}$ *funkcji tensorowych* $C(\tau)$ *i metryki* $d(C_1, C_2)$ *określonej na iloczynie kartezjańskim* $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$, *przyjmującej wartości rzeczywiste nieujemne (tzn. na* $\mathcal{R}^1_+$*) i spełniającej warunki* (tożsamości, symetrii i trójkąta):

$$
\begin{gathered}
(C_1 = C_2) \Leftrightarrow (d(C_1, C_2) = 0),\\
d(C_1, C_2) = d(C_2, C_1), \qquad (3.1)\\
d(C_1, C_2)+d(C_2, C_3) \geqslant d(C_1, C_3)
\end{gathered}
$$

dla dowolnych funkcji tensorowych $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}$. *Dziedzinę tę będziemy oznaczać przez* $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$. *Mamy więc*

$$
C(\tau) \in \mathcal{D}(\mathfrak{F}) \subset \mathcal{M}. \qquad (3.2)
$$

Niech $C_n(\tau)$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $C(\tau)$ będą z $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$. Będziemy mówili, że ciąg C_n jest zbieżny do C, jeżeli

$$
\lim_{n\to\infty} d\big(C_n(\tau), C(\tau)\big) = 0. \qquad (3.3)
$$

Oznaczmy przez $\mathbf{A}_n$ zbiór elementów $C_p \in \mathcal{C}$ takich, że $p \geqslant n$; wtedy warunek

$$
\lim_{n\to\infty} \delta(\mathbf{A}_n) = 0, \qquad (3.4)
$$

gdzie $\delta(\mathbf{A}_n) = \sup\limits_{p,q\geqslant n}\big(d(C_p, C_q)\big)$, oznacza średnicę zbioru $\mathbf{A}_n$, jest konieczny i wystarczający na to, aby ciąg $\{C_n\}$ był ciągiem Cauchy'ego. Warunek (3.4) jest oczywiście równoważny następującemu (7):

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n>0} \bigwedge_{p,q\geqslant n} \big(d(C_p, C_q) \leqslant \varepsilon\big). \tag{3.5}$$

Możemy przekonać się łatwo, że zdefiniowana dziedzina $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{F}$ jest jeszcze zbyt ogólną klasą historii deformacji, aby można było za jej pomocą zbudować teorię zanikania pamięci materiału. Bardzo istotną sprawą jest kwestia zbieżności ciągów elementów należących do zbioru $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$. W celu zapewnienia tej zbieżności musimy zażądać, aby przestrzeń $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ była przestrzenią metryczną zupełną.

Definicja 2. *Zbiór $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ będący dziedziną funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{F}$ jest zupełną przestrzenią metryczną, jeżeli każdy ciąg Cauchy'ego $\{C_p\}$ elementów $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ jest zbieżny w $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$.*

Po tych wstępnych definicjach możemy bliżej omówić podstawowe zalety proponowanego opisu. Wprowadzenie pojęcia przestrzeni metrycznej pozwala wyróżnić klasę przestrzeni topologicznych, mianowicie przestrzeni metryzowalnych. Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczną nazywamy metryzowalną, jeżeli w jej zbiorze można określić metrykę d w ten sposób, że topologia wyznaczona przez d jest identyczna z pierwotną topologią przestrzeni. Z punktu widzenia topologii metryki stanowią jedynie środek służący do opisu i badania klasy przestrzeni metryzowalnych — ich rolę można porównać z rolą, jaką odgrywa układ współrzędnych przy badaniu przestrzeni euklidesowych. To nasuwa wniosek, że metryki są dobrym narzędziem do badania i porównywania różnych opisów zanikania pamięci materiału. Aby tę możliwość pokazać jeszcze lepiej, zajmiemy się analizą topologicznej równoważności metryk.

Dwie metryki d_1 i d_2 w zbiorze $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ nazwiemy równoważnymi, jeśli topologie wyznaczone przez te metryki są identyczne. Topologie wyznaczone przez d_1 i d_2 w zbiorze $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ będą identyczne, jeśli wyznaczają w tym zbiorze tę samą zbieżność. Mamy więc następującą relację:

$$\bigwedge_{C(\tau)\in\mathcal{D}(\mathfrak{F})} \bigwedge_{C_n(\tau)\in\mathcal{D}(\mathfrak{F})} \Big\{\Big[\big(\lim_{n\to\infty} d_1\big(C_n(\tau), C(\tau)\big) = 0\big) \equiv \\ \equiv \big(\lim_{n\to\infty} d_2\big(C_n(\tau), C(\tau)\big) = 0\big)\Big] \Leftrightarrow [d_1 \equiv d_2]\Big\}. \tag{3.6}$$

Łatwo sprawdzić, że tak określona relacja jest relacją równoważności.

Wcześniej już powiedzieliśmy, że słaba zasada zanikania pamięci materiału jest odpowiednio sprecyzowanym warunkiem ciągłości funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{F}$. Zanim tę zasadę wypowiemy, wprowadzimy jeszcze dodatkową definicję.

(7) Podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące topologii oraz pewnych zagadnień analizy funkcjonalnej można znaleźć w następujących monografiach: L. Bourbaki [2], G. Choquet [3], N. Dunford i J.T. Schwartz [12], R. Engelking [13], L.W. Kantorowicz i G.P. Akiłow [19], K. Kuratowski i A. Mostowski [20], K. Kuratowski [21, 22], L.A. Lusternik i W.L. Sobolew [25], K. Maurin [27], S. Saks [37], R. Sikorski [38] i K. Yosida [45].

DEFINICJA 3. *Będziemy mówili, że funkcjonał $\mathfrak{F}$ jest jednostajnie ciągły ze względu na topologię w $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$, jeżeli*

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\eta>0} \big(\delta(\mathcal{D}) \leqslant \eta \Rightarrow \delta(\mathcal{F}) \leqslant \varepsilon\big), \tag{3.7}$$

gdzie $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wartości funkcjonału $\mathfrak{F}$ oraz

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{D}) &= \sup_{C_1, C_2 \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})} d\big(C_1(\tau), C_2(\tau)\big), \\ \delta(\mathcal{F}) &= \sup_{C_1 C_2 \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})} d\Big(\mathfrak{F}\big(C_1(t-s)\big), \mathfrak{F}\big(C_2(t-s)\big)\Big), \end{aligned} \tag{3.8}$$

dla dowolnych $s \geqslant 0$ i $\tau \leqslant t$.

Z ostatniej definicji wynika, że następujące przekształcenie

$$\mathfrak{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{F}. \tag{3.9}$$

jest jednostajnie ciągłe. Stąd możemy wyciągnąć interesujący dla nas wniosek, że obraz dowolnego ciągu Cauchy'ego $\{C_n\}$ w $\mathcal{D}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathcal{F}$. Mówiąc inaczej, dla liniowego $\mathfrak{F}$ przestrzeń $\mathcal{F}$ jest sprzężona z $\mathcal{D}$, tzn. $\mathcal{F} = \mathcal{D}^*$.

Słabą zasadę zanikania pamięci wypowiemy w postaci następującej definicji.

DEFINICJA 4. *Materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, jeśli jego funkcjonał konstytutywny $\mathfrak{F}$ jest ciągły dla każdej historii spoczynkowej $C(t)$ ze względu na topologię $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$, tzn.,*

$$\bigwedge_{C(t) \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\eta>0} \Big(d\big(C(t-s), C(t)\big) \leqslant \eta \Rightarrow \Rightarrow d\Big(\mathfrak{F}\big(C(t-s)\big), \mathfrak{F}\big(C(t)\big)\Big) \leqslant \varepsilon\Big). \tag{3.10}$$

Silna zasada zanikania pamięci jest pewnym warunkiem różniczkowalności funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{F}$. Precyzuje ją następująca

DEFINICJA 5. *Materiał prosty spełnia silną zasadę zanikania pamięci, jeżeli jego funkcjonał konstytutywny $\mathfrak{F}$ jest w sposób ciągły n-razy różniczkowalny w sensie Frécheta w każdej historii spoczynkowej z dziedziny $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$.*

Powyższa definicja prowadzi do następującego rezultatu:

$$\mathfrak{F}\big(C(\tau)\big) = \mathfrak{F}\big(C(t)\big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \delta^k \mathfrak{F}\big(C(\tau)\big) + o\Big(d^n\big(C(\tau), C(t)\big)\Big), \tag{3.11}$$

gdzie

$$\lim_{d(C(\tau), C(t)) \to 0} \frac{o\Big(d^n\big(C(\tau), C(t)\big)\Big)}{d^n\big(C(\tau), C(t)\big)} = 0. \tag{3.12}$$

W otrzymanym rozwinięciu $\delta^k \mathfrak{F}\big(C(\tau)\big)$ jest k-liniowym funkcjonałem względem $C(\tau)$ i jest nazywany k-tą różniczką Frécheta w $C(t) \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$.

3.3. Podstawowe rezultaty. Zajmiemy się dyskusją najważniejszych wyników, jakie można uzyskać z powyższego sformułowania zasad zanikania pamięci materiału. Najpierw zajmiemy się opisem w ramach słabej zasady. W tym celu wprowadzimy następującą definicję.

DEFINICJA 6. *Zdefiniujmy zbiór* $\mathbf{B}(\lambda, n)$ *przy pomocy następującej zależności:*

$$\bigwedge_{\lambda\in(-\infty,t)} \bigwedge_{n>0} \left(\mathbf{B}(\lambda, n) = \left\{\overline{\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}(\tau))} \,\middle|\, \bigwedge_{\boldsymbol{C}(\tau)\in\mathcal{D}(\mathfrak{F})} \bigwedge_{\boldsymbol{C}(t)\in\mathcal{D}(\mathfrak{F})} \times \right.\right. \tag{3.13}$$

$$\left.\left.\times\left(\tau\in[\lambda, t],\, d\left(\boldsymbol{C}(\tau), \boldsymbol{C}(t)\right) \leqslant \frac{1}{n}\right)\right\}\right),$$

gdzie $\overline{\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}(\tau))}$ *oznacza domknięcie zbioru* $\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}(\tau))$ *ze względu na topologię w* $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$.

Mamy oczywiście $\mathbf{B}(\lambda_1, n) \supset \mathbf{B}(\lambda_2, n)$, jeżeli $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$. Można łatwo pokazać, że $\mathbf{B}(\lambda, n)$ jest bazą filtru w przestrzeni topologicznej $\mathcal{F}$. Każda baza filtru ma następujące własności:

1) dla każdych $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbf{B}$ istnieje $\mathbf{B}_3 \in \mathbf{B}$ takie, że $\mathbf{B}_3 \subset \mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$;

2) rodzina $\mathbf{B}$ jest niepusta.

Udowodnimy następujące (8)

TWIERDZENIE 1. *Materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla każdej ustalonej historii spoczynkowej* $\boldsymbol{C}(t) \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$ *mamy*

$$\bigcap_{\lambda=t}^{-\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}(\lambda, n) = \mathfrak{F}(\boldsymbol{C}(t)). \tag{3.14}$$

Dowód. W celu dowiedzenia twierdzenia 1 wykorzystamy podstawowe twierdzenie dotyczące przestrzeni metrycznych, nazywane twierdzeniem Cantora. Stwierdza ono, że przestrzeń metryczna $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ jest zupełna wtedy i tylko wtedy, kiedy dla każdego ciągu zstępującego niepustych zbiorów domkniętych $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2 \supset \ldots$ takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(\mathbf{B}_n) = 0$ iloczyn $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i$ jest niepusty. Jako ciąg zstępujący niepustych zbiorów domkniętych $\{\mathbf{B}_i\}$ przyjmijmy

$$\{\mathbf{B}_i\} = \bigcap_{\lambda=t}^{-\infty} \mathbf{B}(\lambda, n_i). \tag{3.15}$$

Mamy wtedy $\mathbf{B}_1 \supset \mathbf{B}_2 \supset \ldots$, jeżeli $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots$. Ponieważ na podstawie definicji 6 mamy

$$\lim_{n\to\infty} \delta(\mathbf{B}(n)) = 0 \tag{3.16}$$

i rozpatrywana przestrzeń $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ jest zupełną przestrzenią metryczną, stąd

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{B}_i = \bigcap_{n_i=1}^{\infty} \mathbf{B}(n_i) \tag{3.17}$$

jest niepusty.

Wykazaliśmy więc, że $\{\mathbf{B}_i\}$ jest bazą filtru Cauchy'ego w zupełnej przestrzeni metrycznej $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$. Wiadomo, że każda baza filtru Cauchy'ego w zupełnej przestrzeni metrycznej jest zbieżna.

Powyższy wniosek i definicja 6 dają następujący rezultat:

$$\mathbf{B}(\lambda, n) \subset \{\boldsymbol{T} \mid d(\boldsymbol{T}, \mathfrak{F}(\boldsymbol{C}(t))) < \varepsilon\}, \tag{3.18}$$

(8) Twierdzenie 1 w mniej ogólnej postaci zostało po raz pierwszy wypowiedziane i udowodnione przez C.-C. WANGA [43]. Jego uogólnienie do postaci obecnej przyniosła praca [32].

jeżeli $n \geqslant n_\varepsilon$ i $\lambda \geqslant \lambda_{n,\varepsilon}$. To oznacza, że dla każdej dodatniej liczby ε możemy znaleźć taką dodatnią liczbę n_ε, że jeżeli $d\big(C(\tau), C(t)\big) \leqslant 1/n_\varepsilon$ dla dostatecznie dużego przedziału czasu, mianowicie dla $\tau \in [\lambda_{n,\varepsilon}, t]$, wtedy niezależnie od tego co się działo w czasie τ przed $\lambda_{n,\varepsilon}$ naprężenie nie może się różnić od naprężenia spoczynkowego o więcej niż dana liczba ε.

Zgodnie z twierdzeniem 1, jeżeli materiał spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, to dla każdej danej dodatniej liczby ε możemy znaleźć dodatnie liczby η i γ takie, że jeżeli utrzymujemy $d\big(C(\tau), C(t)\big) \leqslant \eta$, kiedy $\tau \in [t-\gamma, t]$, to $d\big(\mathfrak{F}(C(\tau)), \mathfrak{F}(C(t))\big) \leqslant \varepsilon$. To znaczy, że jeżeli utrzymujemy odległość historii $C(\tau)$ od historii spoczynkowej $C(t)$ w przestrzeni $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ dostatecznie małą dla dostatecznie długiego przedziału czasu $[t-\gamma, t]$, to nie ma znaczenia, co się wydarzyło przed czasem $t-\gamma$ i aktualne naprężenie nie może się różnić dowolnie od naprężenia spoczynkowego (tzn., aktualne naprężenie pozostaje ograniczone dla wszystkich możliwych deformacji mających miejsce przed chwilą $t-\gamma$). Jeżeli γ nie jest dostatecznie duże, może się zdarzyć, że niezależnie od tego jak małe będą różnice η dla $\tau \in [t-\gamma, t]$, zbiór wszystkich możliwych aktualnych naprężeń będzie nieograniczony. Stąd najmniejszy kres górny γ_0 dla wszystkich takich γ, dla których zbiór wszystkich możliwych aktualnych naprężeń jest ograniczony, będzie nazywany *czasem wrażliwości materiału prostego*. Ten ciekawy wniosek został zauważony przez C.-C. WANGA [43].

Wprowadzimy następującą definicję:

DEFINICJA 7. *Dla każdej ustalonej historii spoczynkowej* $C(t) \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$ wielkość

$$\gamma_0 = \sup\Big\{\gamma \,\Big|\, \bigwedge_{C(\tau)\in\mathcal{D}(\mathfrak{F})} \; \bigwedge_{\eta>0} \; \bigwedge_{\gamma>0} \Big[\Big(d\big(C(\tau), C(t)\big) \leqslant \eta,\; \tau \in [t-\gamma, t]\Big) \Rightarrow \lim_{\eta\to+0} \delta(\mathcal{F}) < \infty\Big]\Big\}. \tag{3.19}$$

nazywamy czasem wrażliwości materiału prostego.

Jako rezultat twierdzenia 1 i powyższej definicji mamy następujące

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, to istnieje jego czas wrażliwości* γ_0. Oczywiście odwrócenie tego twierdzenia jest fałszywe.

Przedział czasu $[t-\gamma_0, t]$ może być traktowany jako *główna pamięć* materiału, podczas gdy przedział $(-\infty, t-\gamma_0]$ jest *nieznaczną pamięcią*. Tak więc twierdzenie 2 może być inaczej wypowiedziane następująco: *jeżeli materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, to ma skończoną główną pamięć.*

Podobnie do czasu wrażliwości γ_0 można zdefiniować stopień wrażliwości η_0 materiału prostego.

DEFINICJA 8. *Dla każdej ustalonej historii spoczynkowej* $C(t) \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$ *wielkość*

$$\eta_0 = \sup\Big\{\eta \,\Big|\, \bigwedge_{C(\tau)\in\mathcal{D}(\mathfrak{F})} \; \bigwedge_{\gamma>0} \; \bigwedge_{\eta>0} \Big[\Big(d\big(C(\tau), C(t)\big) \leqslant \eta,\; \tau \in [t-\gamma, t] \Rightarrow \lim_{\eta\to\infty} \delta(\mathcal{F}) < \infty\Big]\Big\}. \tag{3.20}$$

nazywamy stopniem wrażliwości materiału prostego.

Z poprzednich rozważań i z definicji 8 wynika

TWIERDZENIE 3. *Stopień wrażliwości materiału prostego spełniającego słabą zasadę zanikania pamięci jest dodatni.*

Oczywiście odwrócenie tego twierdzenia jest fałszywe.

Czas wrażliwości γ_0 i stopień wrażliwości η_0 mogą być użyte jako parametry przy porównywaniu *efektów pamięci* dla różnych materiałów prostych pod warunkiem, że parametry te nie ulegają zbyt dużym zmianom przy zmianach aktualnej konfiguracji.

Często wygodniej jest analizować efekty pamięci przy pomocy funkcji $\gamma = \gamma(\varepsilon, \eta)$ zdefiniowanej następująco (por. C.-C. WANG [43]):

$$(3.21)\qquad \gamma(\varepsilon,\eta) = \inf\Big\{\gamma \,\Big|\, \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{\eta>0} \bigwedge_{\tau\in(t-\gamma,\, t)} \Big[\big(d\,(\mathbf{C}(\tau), \mathbf{C}(t)) \leqslant \eta\big) \Rightarrow \Rightarrow \Big(d\big(\mathfrak{F}(\mathbf{C}(\tau)), \mathfrak{F}(\mathbf{C}(t))\big)\Big) \leqslant \varepsilon\Big]\Big\}.$$

Jest oczywiste, że materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma(\varepsilon, \eta)$ istnieje dla każdego dodatniego ε.

Zakładając, że istnieją funkcje $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \eta)$ i $\eta = \eta(\gamma, \varepsilon)$, dostajemy

$$(3.22)\qquad \begin{aligned} &\lim_{\eta\to+0}\ \lim_{\gamma\to\infty} \varepsilon(\gamma, \eta) = 0, \\ &\gamma_0 = \lim_{\eta\to+0}\ \lim_{\gamma\to\infty} \gamma(\varepsilon, \eta), \\ &\eta_0 = \lim_{\gamma\to\infty}\ \lim_{\varepsilon\to\infty} \eta(\varepsilon, \gamma). \end{aligned}$$

W celu przedyskutowania podstawowych rezultatów dotyczących tzw. słabej aproksymacji (9) funkcjonału konstytutywnego wprowadzimy następujące dwie definicje.

DEFINICJA 9. *Niech $\mathbf{C}(t-s)$ będzie historią deformacji. Wtedy historia deformacji $\mathbf{C}^\alpha(t-s)$ zdefiniowana za pomocą związku*

$$(3.23)\qquad \mathbf{C}^\alpha(t-s) = \mathbf{C}(t-as),$$

gdzie a jest ustaloną stałą liczbą dodatnią, nazywana jest α-spowolnieniem danej historii.

Zakładając, że $\alpha \in [0, 1]$ mamy oczywisty sens fizykalny α-spowolnienia (3.23). Deformacje odpowiadające $\mathbf{C}^\alpha(t-s)$ są takie same jak deformacje odpowiadające $\mathbf{C}(t-s)$, ale zachodzą z mniejszymi prędkościami. W szczególności mamy

$$(3.24)\qquad \mathbf{C}^1(t-s) = \mathbf{C}(t-s).$$

DEFINICJA 10. *Niech $\mathfrak{F}(\mathbf{C}(\tau))$ będzie funkcjonałem konstytutywnym materiału prostego i niech α będzie dodatnią liczbą. Wtedy materiał prosty z funkcjonałem konstytutywnym $\mathfrak{F}_\alpha(\mathbf{C}(\tau))$ zdefiniowanym za pomocą tożsamości*

$$(3.25)\qquad \mathfrak{F}_\alpha(\mathbf{C}(\tau)) \equiv \mathfrak{F}(\mathbf{C}^\alpha(\tau)),$$

(9) Słabą aproksymacją będziemy nazywać przybliżenie funkcjonału konstytutywnego otrzymane w ramach słabej zasady zanikania pamięci.

gdzie $C^{\alpha}(\tau)$ jest α-spowolnieniem historii $C(\tau)$, nazywamy α-spowolnieniem danego materiału prostego (10).

Łatwo można wykazać słuszność następująceg otwierdzenia:

TWIERDZENIE 4. *Jeżeli materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, to jego α-spowolnienie również spełnia słabą zasadę zanikania pamięci.*

Jeżeli oznaczymy czas wrażliwości i stopień wrażliwości α-spowolnienia odpowiednio przez $\gamma_0^{(\alpha)}$ i $\eta_0^{(\alpha)}$, to

$$\gamma_0^{(\alpha)} = \alpha\gamma_0, \quad \eta_0^{(\alpha)} = \eta_0. \tag{3.26}$$

Ponieważ $\gamma_0 < \infty$, to

$$\gamma_0^{(\alpha)} \to 0 \quad \text{gdy} \quad \alpha \to 0, \tag{3.27}$$

co odpowiada czysto sprężystemu zachowaniu się materiału. Naprężenie odpowiadające α-spowolnieniu będzie zdążać do naprężenia spoczynkowego, gdy $\alpha \to 0$.

Graniczne zachowanie się α-spowolnionego materiału przy $\alpha \to 0$ jest sformułowaniem twierdzenia o słabej aproksymacji. Możemy powiedzieć, że w przypadku gdy $\alpha \to 0$ *główna pamięć* α-spowolnienia danego materiału prostego, tzn. przedział czasu $[t - \gamma_0, t]$, zdąża do zera. Stąd oczywisty jest fakt, że dla materiału sprężystego istotna jest tylko deformacja dla chwili aktualnej t.

Podobny proces graniczny, odpowiadający przypadkowi, gdy γ_0 jest ustalone a $\eta_0 \to \infty$, prowadzi do zdefiniowania, tzw. *β-relaksacji materiału prostego.*

DEFINICJA 11. *Niech $\mathfrak{F}(C(\tau))$ będzie funkcjonałem konstytutywnym materiału prostego i niech β będzie liczbą dodatnią. Wtedy materiał prosty o funkcjonale konstytutywnym ${}_\beta\mathfrak{F}(C(\tau))$ zdefiniowanym za pomocą tożsamości*

$${}_\beta\mathfrak{F}(C(\tau)) \equiv \mathfrak{F}(C(t)+\beta[C(\tau) - C(t)]) \tag{3.28}$$

nazywamy β-relaksacją danego materiału (11).

Słuszne jest następujące

TWIERDZENIE 5. *Jeżeli materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, to jego β-relaksacja również spełnia słabą zasadę zanikania pamięci.*

Jeżeli oznaczymy czas wrażliwości i stopień wrażliwości β-relaksacji odpowiednio przez ${}^{(\beta)}\gamma_0$ i ${}^{(\beta)}\eta_0$, to

$${}^{(\beta)}\gamma_0 = \gamma_0, \quad {}^{(\beta)}\eta_0 = \frac{1}{\beta}\eta_0 \tag{3.29}$$

pod warunkiem, że dopuszczamy tylko liniowe przestrzenie metryczne $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$. Ponieważ $\eta_0 > 0$, to

$${}^{(\beta)}\eta_0 \to \infty, \quad \text{gdy} \quad \beta \to 0. \tag{3.30}$$

(10) Sformułowanie koncepcji ruchu powolnego i spowolnionej historii deformacji należy do B.D. COLEMANA i W. NOLLA [5]. Natomiast C.-C. WANG [43] wprowadził pojęcie α-spowolnienia danego materiału. Obydwa pojęcia różnią się interpretacjami, co powoduje również inne interpretacje otrzymanych na tej podstawie aproksymacji. Do kwestii tej wrócimy przy omawianiu rezultatów C.-C. WANGA.

(11) Pojęcie β-relaksacji danego materiału prostego wprowadził C.-C. WANG [43].

Mamy również

$$(3.31) \qquad {}_{\beta}\mathfrak{F}\big(C(\tau)\big) \to \mathfrak{F}\big(C(t)\big), \quad \text{gdy} \quad \beta \to 0.$$

W przybliżeniu graniczne zachowanie się β-relaksacji materiału prostego jest znów sprężyste.

Interpretując powyższy rezultat za pomocą parametrów pamięci ${}^{(\beta)}\gamma_0$ i ${}^{(\beta)}\eta_0$ widzimy, że w przypadku granicznym, gdy $\beta \to 0$, zachowanie się β-relaksacji materiału prostego jest niezależne od historii deformacji. Dla dowolnie dużych różnic między $C(\tau)$ i $C(t)$ w przedziale $[t-\gamma_0, t]$ (bo $d\big(C(\tau), C(t)\big) \leqslant {}^{(\beta)}\eta_0$ a ${}^{(\beta)}\eta_0 \to \infty$) mamy taką samą wartość naprężenia $T(t)$ w chwili t.

Głównym celem silnej zasady zanikania pamięci jest uzyskanie odpowiednich aproksymacji dla funkcjonału konstytutywnego. Przez wprowadzenie odpowiednich założeń odnośnie regularności funkcjonału konstytutywnego otrzymujemy rozwinięcie, a następnie żądane przybliżenie. Wprowadzając dodatkowe ograniczenia na klasę funkcji dopuszczalnych reprezentujących historie deformacji (zakładając np., że zbiór $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ jest zwartą przestrzenią metryczną), możemy wykorzystać podstawowe twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału liniowego zdefiniowanego w odpowiedniej przestrzeni metrycznej i na podstawie rozwinięcia (3.11) podać reprezentacje całkowe funkcjonału konstutywnego. Metodę taką stosowali B. D. Coleman i W. Noll [5–8] oraz C.-C. Wang [43] (por. również C. Truesdell i W. Noll [41]).

Okazuje się jednak, że aproksymacje funkcjonału konstytutywnego można uzyskać również na innej drodze. Załóżmy, że $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$ jest zwartą przestrzenią metryczną, a funkcjonał $\mathfrak{F}\big(C(\tau)\big)$ jest rzeczywistym ciągłym funkcjonałem względem funkcji $C(\tau)$. Ponieważ każda przestrzeń metryczna jest topologiczną przestrzenią Hausdorffa, to powyższe założenia pozwalają wykorzystać twierdzenie Stone'a-Weierstrassa, które mówi, że funkcjonał $\mathfrak{F}$ można jednostajnie aproksymować wielomianem rzeczywistych liniowych funkcjonałów. Mamy więc

$$(3.32) \qquad \mathfrak{F}\big(C(\tau)\big) = \mathfrak{F}\big(C(t)\big) + \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{P}^{(k)},$$

gdzie

$$(3.33) \qquad \mathfrak{P}^{(k)} = \mathfrak{G}^{(k)}\, \mathfrak{L}_1^{(k)}\, \mathfrak{L}_2^{(k)} \ldots \mathfrak{L}_{(n_k)}^{(k)},$$

a $\mathfrak{L}_{(n_k)}$ jest funkcjonałem liniowym określonym na zbiorze $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$. Metodę tę stosowali A. E. Green i R. S. Rivlin [14–16] oraz R. V. S. Chacon i R. S. Rivlin [4] (por. również A. C. Pipkin [34], R. S. Rivlin [35] oraz J. S. Lew [23]).

Wykorzystując następnie twierdzenie Riesza można na podstawie (3.23) otrzymać takie same reprezentacje całkowe dla funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{F}$, jakie dostaliśmy na podstawie rozwinięcia (3.11) w poprzednim podejściu. Wniosek ten jest potwierdzeniem rezultatów otrzymanych przez G. Lianisa i P. H. DeHoffa [24] (por. również uwagę C. Truesdella i W. Nolla w monografii [41], notka 1 na str. 109).

Obydwa sposoby otrzymywania reprezentacji całkowych dla funkcjonału konstytutywnego będą szczegółowo przedyskutowane w dalszych punktach pracy.

4. Szczegółowa analiza koncepcji B. D. Colemana i W. Nolla

4.1 Podstawy koncepcji. W celu matematycznego sformułowania zasad zanikania pamięci B. D. COLEMAN i W. NOLL [5–8] wprowadzili pewną funkcję $h(s)$ mającą następujące własności:

a) $h(s)$ jest określona dla $0 \leqslant s < \infty$ i ma dodatnie wartości rzeczywiste $h(s) > 0$;

b) spełnia warunek $h(0) = 1$;

c) $h(s)$ dąży monotonicznie do zera dla dużych s w następujący sposób:

$$\lim_{s\to\infty} s^r h(s) = 0. \tag{4.1}$$

Funkcja ta nazywana jest *funkcją wpływu* i będzie charakteryzować prędkość zanikania pamięci materiału, natomiast r nazywamy jej *rzędem*. Wynika to z przyjętej metryki

$$d(C_1, C_2) = \left(\int_0^\infty |C_1(s) - C_2(s)|^p\, h(s)^p\, ds\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty, \tag{4.2}$$

która jest metryką przestrzeni Banacha $\mathcal{B}_h$. Szczególnym przypadkiem przestrzeni $\mathcal{B}_h$ jest przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_h$ o metryce

$$d(C_1, C_2) = \left(\int_0^\infty |C_1(s) - C_2(s)|^2\, h(s)^2\, ds\right)^{1/2}, \tag{4.3}$$

tzn. otrzymanej z (4.2) dla $p = 2$.

B. D. COLEMAN i W. NOLL badali szczegółowo funkcjonał konstytutywny $\mathfrak{H}(\boldsymbol{G}^*(s); \boldsymbol{C}(t))$ dla równania konstytutywnego (2.37). Wykorzystali przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_h$, która jest liniową, unormowaną i unitarną przestrzenią funkcyjną historii $\boldsymbol{G}^*(s)$. Norma w przestrzeni $\mathcal{H}_h$ jest zdefiniowana następująco:

$$\|\boldsymbol{G}^*(s)\|_h = \left(\int_0^\infty [h(s)\, |\boldsymbol{G}^*(s)|]^2\, ds\right)^{1/2}, \tag{4.4}$$

gdzie $|\boldsymbol{G}^*(s)| = \left(\operatorname{tr}[\boldsymbol{G}^*(s)^2]\right)^{1/2}$. Będziemy zakładać, że historie $\boldsymbol{G}^*(s)$ są funkcjami mierzalnymi s. Historie $\boldsymbol{G}_1^*(s)$ i $\boldsymbol{G}_2^*(s)$ różniące się tylko na zbiorze miary zero w obszarze $0 \leqslant s < \infty$ będą traktowane jako równoważne. Iloczyn skalarny przestrzeni $\mathcal{H}_h$ ma postać

$$(\boldsymbol{G}_1^*(s), \boldsymbol{G}_2^*(s))_h = \int_0^\infty \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{G}_1^*(s)\, \boldsymbol{G}_2^*(s)\right] h(s)^2\, ds. \tag{4.5}$$

W tak zdefiniowanej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_h$ stwierdzenie, że historia $\boldsymbol{G}^*(s)$ jest mała według normy, może być rozumiane, że $\boldsymbol{G}^*(s)$ jest bliska zerowej historii $\boldsymbol{0}$, bowiem norma (4.4) może być interpretowana jako odległość danej historii $\boldsymbol{G}^*(s)$ od historii zerowej $\boldsymbol{0}$. Ponieważ funkcja wpływu $h(s) \to 0$, gdy $s \to \infty$ w sensie (4.1), wartości $\boldsymbol{G}^*(s)$ dla małego s, tzn. dla bliskiej przeszłości, mają większą wagę niż wartości dla dużego s, tzn. dla dalekiej przeszłości. Stąd oczywista jest koncepcja matematycznego opisu zanikania pamięci materiału (12).

Wprowadzimy następującą definicję dziedziny $\mathcal{D}(\mathfrak{H})$ (por. z Def. 1).

DEFINICJA 12. *Dziedziną funkcjonału konstytutywnego* $\mathfrak{H}$ *będziemy nazywać pewną klasę symetrycznych funkcji tensorowych* $\boldsymbol{G}^*(s)$ *będących elementami funkcyjnej przestrzeni Hilberta* $\mathcal{H}_h$, *tzn.*,

$$G^*(s) \in \mathcal{D}(\mathfrak{H}) \subset \mathcal{H}_h. \tag{4.6}$$

W ten sposób udowodniliśmy, że koncepcja B. D. COLEMANA i W. NOLLA jest pewnym szczególnym przypadkiem ogólnego opisu zanikania pamięci materiału otrzymanego przy wykorzystaniu topologicznej przestrzeni metryzowalnej. Ze względu jednak na oczywisty fakt, że przy silniejszych założeniach ograniczających odnośnie dziedziny funkcjonału konstytutywnego $\mathcal{D}(\mathfrak{H})$ można udowodnić więcej twierdzeń i pokazać więcej własności, prześledzimy szczegółowo zarówno sformułowanie zasad zanikania pamięci w obecnej koncepcji jak również wynikające z nich rezultaty. Warto jednak podkreślić, że silną i słabą zasadę zanikania pamięci materiału w koncepcji B. D. COLEMANA i W. NOLLA otrzymamy na podstawie poprzednio wypowiedzianych zasad (por. Def. 4 i 5) ograniczając w nich jedynie dziedzinę $\mathcal{D}$ do przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_h$, tzn. zakładając $\mathcal{D}(\mathfrak{H}) \subset \mathcal{H}_h$.

DEFINICJA 13. *Materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, jeżeli istnieje funkcja wpływu* $h(s)$ *rzędu* $r > 1/2$ *taka, że funkcjonał konstytutywny* $\mathfrak{H}(\boldsymbol{G}^*(s); \boldsymbol{C}(t))$ *jest zdefiniowany i ciągły dla historii* $\boldsymbol{G}^*(s)$ *w otoczeniu historii zerowej w przestrzeni funkcyjnej* $\mathcal{H}_h$.

Tak sformułowana słaba zasada zanikania pamięci wymaga, aby

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\eta>0} \Big(d(\boldsymbol{G}^*(s), \boldsymbol{0}) \leqslant \eta \Rightarrow d\big(\mathfrak{H}(\boldsymbol{G}^*(s); \boldsymbol{C}(t)), \mathfrak{H}(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{C}(t))\big) \leqslant \varepsilon\Big) \tag{4.7}$$

lub

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\eta>0} \Big(\|\boldsymbol{G}^*(s)\|_h \leqslant \eta \Rightarrow \big\|\mathfrak{H}(\boldsymbol{G}^*(s); \boldsymbol{C}(t)) - \mathfrak{H}(\boldsymbol{0}; \boldsymbol{C}(t))\big\|_h \leqslant \varepsilon\Big) \tag{4.8}$$

dla każdej historii $\boldsymbol{G}^*(s) \in \mathcal{H}_h$ i dla dowolnego $\boldsymbol{C}(t)$.

Otrzymane w p. 3.3 wnioski dotyczące czasu wrażliwości i stopnia wrażliwości materiału prostego są oczywiście słuszne i w obecnie analizowanym przypadku.

DEFINICJA 14. *Materiał prosty spełnia silną zasadę zanikania pamięci, jeżeli istnieje funkcja wpływu* $h(s)$ *rzędu* $r > n+1/2$ *taka, że funkcjonał konstytutywny* $\mathfrak{H}(\boldsymbol{G}^*(s); \boldsymbol{C}(t))$ *jest zdefiniowany i* n *razy różniczkowalny w sensie Frécheta w otoczeniu zerowej historii w przestrzeni funkcyjnej* $\mathcal{H}_h$. *Różniczkowalność w sensie Frécheta funkcjonału* $\mathfrak{H}(\boldsymbol{G}^*(s); \boldsymbol{C}(t))$ *jest jednostajna ze względu na tensorowy parametr* $\boldsymbol{C}(t)$.

---

(12) Opracowanie termodynamicznej teorii materiałów z zanikającą pamięcią przyniosły prace B.D. COLEMANA [9–10] (por. również dyskusję w pracy V.J. MIZELA i C.-C. WANGA [26]).

Rezultatem tej definicji jest następujące rozwinięcie:

$$(4.9)\qquad \mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty}(G^*(s); C(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, \delta^k \mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty}(0; C(t)\,|\,\overbrace{G^*(s) \dots G^*(s)}^{k \text{ razy}}) + o\,\|G^*(s)\|_h^n,$$

gdzie

$$(4.10)\qquad \lim_{\|G^*(s)\|_h \to 0} \frac{o\left(\|G^*(s)\|_h^n\right)}{\|G^*(s)\|_h^n} = 0.$$

W rozwinięciu (4.9) $\delta^k \mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty}(0; C(t)\,|\,\overbrace{G^*(s) \dots G^*(s)}^{k \text{ razy}})$ jest k-tego rzędu różniczką Frécheta w $\mathbf{0}$; jest to ograniczony k-liniowy funkcjonał względem $G^*(s)$.

Wykorzystując rozwinięcie (4.9) możemy równanie konstytutywne (2.37) napisać w następującej postaci

$$(4.11)\qquad R(t)^T T(t) R(t) = \mathfrak{f}\,(C(t)) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\, \delta^k \mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty}(0; C(t)\,|\,\overbrace{G^*(s) \dots G^*(s)}^{k \text{ razy}}) + o\left(\|G^*(s)\|_h^n\right).$$

Równanie to jest równaniem konstytutywnym materiału prostego spełniającego silną zasadę zanikania pamięci.

4.2. Relaksacja naprężenia. W celu przedyskutowania pewnego granicznego przypadku deformacji dla materiału prostego określimy statyczne przedłużenie historii $G^*(s)$.

DEFINICJA 15. *Dla danej historii $G^*(s)$ i dowolnego $\delta \geqslant 0$ wprowadzimy nową historię*

$$(4.12)\qquad G^*_{(\delta)}(s) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } 0 \leqslant s \leqslant \delta; \\ G^*(s-\delta), & \text{jeżeli } \delta < s < \infty, \end{cases}$$

którą nazwiemy statycznym przedłużeniem historii $G^*(s)$ o wartość δ. Z punktu widzenia fizykalnego statyczne przedłużenie $G^*_{(\delta)}(s)$ opisuje deformację, która dla $\tau \leqslant t$ ma takie same wartości jak $G^*(s)$, podczas gdy dla $t \leqslant \tau \leqslant t+\delta$ materiał utrzymywany jest w stanie spoczynku.

Załóżmy, że historia $G^*(s)$ jest ograniczona, tzn.,

$$(4.13)\qquad |G^*(s)| \leqslant \mathrm{M} < \infty.$$

Obliczmy normę historii (4.12). Na podstawie (4.4) dostajemy

$$(4.14)\qquad \|G^*_{(\delta)}(s)\|_h^2 = \int_0^\infty |G^*_{(\delta)}(s)|^2 h(s)^2\, ds = \int_\delta^\infty |G^*(s-\delta)|^2 h(s)^2\, ds \leqslant \mathrm{M}^2 \int_0^\infty h(s)^2\, ds.$$

Ponieważ z założenia dla materiału prostego spełniającego słabą zasadę zanikania pamięci $h(s)$ jest rzędu $r > 1/2$, to

$$(4.15)\qquad \lim_{\delta \to \infty} \int_\delta^\infty h(s)^2\, ds = 0.$$

Na podstawie (4.14) i (4.15) mamy

$$\lim_{\delta\to\infty} \|G^*_{(\delta)}(s)\|_h = 0. \tag{4.16}$$

Ostatni rezultat pozwala na sformułowanie następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE 6. *Jeżeli materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci i jeżeli $G^*(s)$ oznacza dowolną ograniczoną historię deformacji, $G^*_{(\delta)}(s)$ oznacza statyczne przedłużenie historii $G^*(s)$, a $T_{(\delta)}(t)$ jest naprężeniem odpowiadającym $G^*_{(\delta)}(s)$, to*

$$\lim_{\delta\to 0} T_{(\delta)}(t) = R(t)\,\mathfrak{f}\,(C(t))\,R(t)^T. \tag{4.17}$$

Powyższe twierdzenie wyraża interesujący fakt, że w materiale prostym spełniającym słabą zasadę zanikania pamięci, który jest utrzymywany w stałej konfiguracji od pewnej chwili czasu naprężenie maleje do swej wielkości spoczynkowej.

Ponieważ równanie konstytutywne ([13])

$$T(t) = R(t)\,\mathfrak{f}\,(C(t))\,R(t)^T \tag{4.18}$$

jako niezależne od historii deformacji $G^*(s)$ opisuje zachowanie się materiału sprężystego, to możemy wypowiedzieć następującą:

Uwagę 1. W stanie równowagi reakcja dowolnego materiału prostego jest czysto sprężysta. Jeżeli natomiast materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, to również jego reakcja na statyczne przedłużenie dowolnej ograniczonej historii deformacji jest ostatecznie czysto sprężysta.

4.3. Aproksymacje. Wykorzystajmy rozwinięcie (4.11) w celu szczegółowego zbadania aproksymacji równania konstytutywnego materiału prostego spełniającego silną zasadę zanikania pamięci (por. Def. 14). Rezultat (4.11) wskazuje, że ogólne równanie konstytutywne materiału prostego spełniającego silną zasadę zanikania pamięci może być aproksymowane przez równanie postaci

$$R(t)^T\,T(t)\,R(t) = \mathfrak{f}\,(C(t)) + \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{P}_k\,(G^*(s);\,C(t)), \tag{4.19}$$

gdzie $\mathfrak{P}_k$ jest ograniczonym jednorodnym k-liniowym funkcjonałem względem $G^*(s)$ i ciągłą funkcją tensorową parametru $C(t)$. Błąd aproksymacji (4.19) spełnia warunek (4.10), tzn. dąży do zera szybciej niż n-ta potęga normy (4.4) historii deformacji $G^*(s)$.

Materiał zachowujący się zgodnie z równaniem konstytutywnym (4.19) nazywany jest materiałem prostym rzędu n.

Gdy $n = 1$, suma w (4.19) redukuje się do pojedynczego wyrazu będącego ograniczonym funkcjonałem liniowym $\mathfrak{P}_1$. Mamy wtedy równanie konstytutywne

$$R(t)^T\,T(t)\,R(t) = \mathfrak{f}\,(C(t)) + \mathfrak{P}_1\,(G^*(s));\,C(t), \tag{4.20}$$

([13]) Równanie konstytutywne (4.18) może być otrzymane z (2.37), jeżeli założymy, że $\mathop{\mathfrak{H}}\limits_{s=0}^{\infty}(G^*(s);\,C(t)) \equiv 0$ niezależnie od tego jaka jest historia deformacji $G^*(s)$.

gdzie

$$\mathfrak{P}_1\left(G^*(s); C(t)\right) = \delta \mathop{\mathfrak{H}}_{s=0}^{\infty} \left(0; C(t) \middle| G^*(s)\right). \tag{4.21}$$

Wykorzystując twierdzenie Riesza o postaci funkcjonału liniowego w przestrzeni Hilberta oraz uwzględniając fakt, że analizowany funkcjonał liniowy $\mathfrak{P}_1$ jest tensorem, możemy równanie (4.20) napisać w postaci

$$R(t)^T T(t) R(t) = \mathfrak{f}\left(C(t)\right) + \int_0^{\infty} \mathbf{K}\left(C(t); s\right)\left[G^*(s)\right] ds, \tag{4.22}$$

gdzie $\mathbf{K}\left(C(t); s\right)\left[G^*(s)\right]$ dla dowolnego $s \geqslant 0$ i dowolnego tensora $C(t)$ jest liniową funkcją tensorową względem zmiennej $G^*(s)$. Wielkość $\mathbf{K}\left(C(t); s\right)$ może być utożsamiana z tensorem czwartego rzędu, którego wartość bezwzględna spełnia warunek

$$\int_0^{\infty} \left|\mathbf{K}\left(C(t); s\right)\right|^2 h(s)^{-2} ds < \infty. \tag{4.23}$$

Równanie (4.22) jest równaniem konstytutywnym typu całkowego pierwszego rzędu. Teorię materiału prostego pierwszego rzędu opartą na równaniu konstytutywnym (4.22) nazywamy liniową lepkosprężystością odkształceń skończonych (14).

Każdy materiał prosty pierwszego rzędu jest typu całkowego, ale materiały proste rzędu $n > 1$ nie są w ogólności typu całkowego, ponieważ nie wszystkie ograniczone k-liniowe funkcjonały w przestrzeni Hilberta mają reprezentacje całkowe (15).

Zbadajmy zachowanie się materiału prostego spełniającego silną zasadę zanikania pamięci (zgodnie z Def. 14) w przypadku ruchu powolnego. W tym celu rozważmy historię

$$G^*_{(\alpha)}(s) = G^*(\alpha s), \qquad \alpha \in [0, 1] \tag{4.24}$$

otrzymaną z historii $G^*(s)$ przez jej spowolnienie ze współczynnikiem spowolnienia α (por. Def. 9).

Zakładając, że funkcja wpływu $h(s)$ charakteryzująca zanikanie pamięci jest rzędu $r > n+1/2$ i że $G^*(s)$ jest n-krotnie różniczkowalną funkcją w $s = 0$, możemy napisać

$$G^*_{(\alpha)}(s) = \sum_{j=0}^{n} \frac{s^j}{j!} \overset{(j)}{G^*_{(\alpha)}} + o(\alpha^n), \tag{4.25}$$

(14) Warto zaznaczyć, że równanie konstytutywne (4.22) w przypadku nieskończenie małych deformacji jest podstawą liniowej teorii lepkosprężystości i było szczegółowo badane przez B.D. Colemana i W. Nolla [7], M.E. Gurtina i E. Sternberga [17], A.C. Pipkina i R.S. Rivlina [33], A.C. Pipkina [34], B.D. Colemana [10] oraz N.C. Huang i E.H. Lee [18]. Dla materiałów izotropowych i małych odkształceń związek (4.22) staje się równaniem konstytutywnym materiału lepkosprężystego typu Boltzmanna (por. L. Boltzmann [1]). Te szczególne przypadki równania (4.22) są szczegółowo omówione w monografii C. Truesdella i W. Nolla [41] (por. również [31]).

(15) Ogólną dyskusję aproksymacji drugiego rzędu można znaleźć w pracy C. Truesdella [39].

gdzie

$$\overset{(j)}{G^*_{(\alpha)}} = \frac{d^j}{ds^j} G^*_{(\alpha)}(s)\Big|_{s=0} = \alpha^j \frac{d^j}{ds^j} G^*(s)\Big|_{s=0}. \tag{4.26}$$

Wzór (4.25) jest rozwinięciem historii $G^*(\alpha s)$ w szereg Taylora w $s = 0$. Symbol $o(\alpha^n)$ w (4.25) oznacza, że wyrażenie $\alpha^{-n} o(\alpha^n)$ zdąża do zera, jeżeli $\alpha \to 0$.

Obliczając kolejne pochodne historii $G^*(s)$ w punkcie $s = 0$, dostajemy

$$G^*(0) = 0, \quad \frac{d^j}{ds^j} G^*(s)\Big|_{s=0} = (-1)^j R(t)^T \overset{(j)}{C_{(t)}}(t) R(t) = (-1)^j A^*_{(j)}(t), \tag{4.27}$$

gdzie wzór

$$A_j(t) = (-1)^j \overset{(j)}{C^t_{(t)}}(0) \tag{4.28}$$

definiuje j-ty tensor Rivlina-Ericksena. Jeżeli przyjmiemy

$$A_{j(\alpha)} = \alpha^j A_j, \qquad A^*_{j(\alpha)} = \alpha^j A^*_j, \tag{4.29}$$

to możemy traktować $A^*_{j(\alpha)}$ jako j-ty tensor Rivlina-Ericksena odpowiadający spowolnionej historii $G^*_{(\alpha)}(s)$. Podstawiając otrzymane rezultaty do (4.25) dostajemy

$$G^*_{(\alpha)}(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{s^j}{j!} (-1)^j A^*_{j(\alpha)} + o(\alpha^n). \tag{4.30}$$

Równanie konstytutywne (4.19) dla procesu powolnego przybiera postać

$$R(t)^T T_{(\alpha)}(t) R(t) = \mathfrak{f}\big(C(t)\big) + \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{P}_k \big(G^*_{(\alpha)}(s); C(t)\big) + o(\alpha^n), \tag{4.31}$$

gdzie $T_{(\alpha)}(t)$ oznacza naprężenie odpowiadające spowolnionej historii $G^*_{(\alpha)}(s)$.

Posługując się rezultatem (4.30) i wykorzystując fakt, że $\mathfrak{P}_k$ w (4.31) jest ograniczonym jednorodnym k-liniowym funkcjonałem B. D. Coleman i W. Noll [5] udowodnili, że dla ruchu powolnego ogólne równanie konstytutywne materiału prostego spełniającego silną zasadę zanikania pamięci może być aproksymowane równaniem konstytutywnym typu różniczkowego rzędu n:

$$R(t)^T T(t) R(t) = \mathfrak{f}\big(C(t)\big) + \sum_{(j_1, \ldots, j_k)} \mathfrak{l}_{j_1, \ldots, j_k}\big(C(t)\big) [A^*_{j_1}, \ldots, A^*_{j_k}], \tag{4.32}$$

gdzie $\mathfrak{l}_{j_1, \ldots, j_k}\big(C(t)\big)[\ \ ]$ jest dla każdego $C(t)$ multiliniową funkcją tensorową o k zmiennych tensorowych. Sumacja w (4.32) jest rozciągnięta na wszystkie układy indeksów $(j_1, \ldots, j_k)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, które spełniają nierówności

$$1 < j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_k \leqslant n, \qquad j_1 + \ldots + j_k \leqslant n. \tag{4.33}$$

5. Dyskusja propozycji C.-C. Wanga

5.1. Pierwsza propozycja C.-C. Wanga. W pracy [42] C.-C. Wang pokazał, że koncepcja opisu zanikania pamięci zaproponowana przez B. D. Colemana i W. Nolla może być łatwo uogólniona na historie deformacji będące elementami przestrzeni Hilberta funkcji mierzalnych. C.-C. WANG wprowadził przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}_\mu$ o następującej normie ([16]):

$$\|G^*(s)\|_\mu = \Big(\int\limits_{[0,\infty)} |G^*(s)|^2 \, d\mu \Big)^{1/2} \tag{5.1}$$

gdzie μ jest miarą Lebesguea-Stieltjesa zdefiniowaną na $\mathcal{R}^1_+$ i powiązaną z znikającą pół-ciągłą funkcją $\sigma(s)$ taką, że

$$\begin{aligned} &\sigma(s) = 0, \quad \text{jeżeli} \quad s \leqslant 0, \\ &\lim_{s\to\infty} \sigma(s) = \mathrm{M} < \infty. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Miara μ jest nazywana *miarą zanikającą*.

Łatwo zauważyć, że przestrzenie $\mathcal{H}_h$ i $\mathcal{H}_\mu$ są sobie równoważne, jeżeli zanikająca miara μ jest określona następująco:

$$\mu = \int\limits_{\mathcal{S}} [h(s)]^2 \, ds, \qquad \mathcal{S} \subset \mathcal{R}^1_+. \tag{5.3}$$

Przyjmijmy, że dziedziną $\mathcal{D}$ funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{H}$ są historie $G^*(s) \in \mathcal{H}_\mu$. Wtedy słabą zasadę zanikania pamięci wyraża

DEFINICJA 16. *Materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, jeżeli dla każdej historii spoczynkowej $C(t)$ istnieje zanikająca miara μ taka, że funkcjonał konstytutywny $\mathfrak{H}$ jest ciągły w historii spoczynkowej ze względu na topologię $\mathcal{D}(\mathfrak{H}) \subset \mathcal{H}_\mu$.*

Najciekawszym rezultatem pierwszej koncepcji C.-C. Wanga jest rozszerzenie słuszności twierdzenia o relaksacji naprężenia na historie deformacji, od których nie jest wymagana ograniczoność. Wykorzystajmy definicję 15 statycznego przedłużenia historii $G^*(s)$. Obecnie nie będziemy wymagać spełnienia warunku (4.13). Zauważmy, że zgodnie z (5.2) mamy $\mu(\mathcal{S}) = \mathrm{M} < \infty$. Ponieważ $G^*_{(\delta)}(s) \to 0$, gdy $\delta \to \infty$ dla każdego ustalonego s, stąd w szczególności

$$|G^*_{(\delta)}(s)| \to 0, \quad \text{gdy} \quad \delta \to \infty. \tag{5.4}$$

Jeżeli $G^*_{(\delta)}(s)$ jest mierzalne, to $|G^*_{(\delta)}(s)|$ jest również mierzalne, a stąd

$$|G^*_{(\delta)}(s)| \to 0 \tag{5.5}$$

według miary.

Udowodnimy następujące twierdzenie o relaksacji naprężenia.

Niech materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci zgodnie z definicją 16 dla zanikającej miary μ takiej, że

$$\mu(\mathcal{J}) \geqslant \mu(\mathcal{J}_\omega) \tag{5.6}$$

dla każdego zbioru Borela $\mathcal{J}$, jeżeli przez $\mathcal{J}_\omega$ oznaczono translację zbioru $\mathcal{J}$ o nieujemną liczbę ω, tzn. $\mathcal{J}_\omega \equiv \{x | \, x = y + \omega, \, y \in \mathcal{J}\}$.

([16]) Metrykę przestrzeni $\mathcal{H}_\mu$ definiuje wzór
$$d(C_1, C_2) = \Big(\int\limits_{\mathcal{S}} |C_1(s) - C_2(s)|^2 \, d\mu\Big)^{1/2}, \quad \mathcal{S} \subset \mathcal{R}_1^+,$$

TWIERDZENIE 7. *Niech* $\{C^*_{(t)}(s), C(t)\}$ *będzie historią deformacji materiału prostego taką, że* $G^*(s) = G^*_{(0)}(s) \in \mathcal{D}(\mathfrak{H})$. *Wtedy*

1) $G^*_{(\delta)}(s) \in \mathcal{D}$ *dla każdego dodatniego* δ;

2) $\|G^*_{(\delta)}(s)\|_\mu \to 0$, *gdy* $\delta \to \infty$;

3) *naprężenie odpowiadające statycznemu przedłużeniu zdąża do naprężenia statycznego (tzn. do naprężenia odpowiadającego historii spoczynkowej), gdy* $\delta \to \infty$.

Ciekawa jest następująca

Uwaga 2. Jeżeli $\sigma(s) \in \mathcal{C}^1$ i jeżeli $h(s)$ jest zdefiniowane zgodnie z p. 4.1, to warunek (5.6) jest równoważny nierówności

$$\int_{\mathcal{G}_\omega} h(s)\, ds \leqslant \int_{\mathcal{G}} h(s)\, ds. \tag{5.7}$$

Dla funkcji $h(s)$ monotonicznie malejącej nierówność ta jest spełniona. Tak więc funkcja wpływu zdefiniowana przez B. D. COLEMANA i W. NOLLA odpowiada zanikającej mierze μ spełniającej nierówność (5.6).

Dowód twierdzenia 7. Z założenia $G^*_{(0)}(s) \in \mathcal{D}$, tak więc $|G^*_{(0)}(s)|^2 \in \mathcal{H}_\mu$. Stąd dla dowolnego dodatniego ε możemy znaleźć dużą liczbę $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon)$ taką, że

$$\int \mathrm{H}(s)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.8}$$

gdzie

$$\mathrm{H}(s) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli} \quad |G^*_{(0)}(s)|^2 \leqslant \mathrm{N}, \\ |G^*_{(0)}(s)|^2 - \mathrm{N}, & \text{jeżeli} \quad |G^*_{(0)}(s)|^2 > \mathrm{N}. \end{cases} \tag{5.9}$$

Jak już zauważyliśmy, $|G^*_{(\delta)}(s)|^2$ jest mierzalne dla każdego δ; stąd dla każdego $\mathcal{J}$

$$\int_{\mathcal{G}} |G^*_{(\delta)}(s)|^2\, d\mu \leqslant \int_{\mathcal{G}} \mathrm{N}\, d\mu + \int_{\mathcal{S}} \mathrm{H}(s)\, d\mu \leqslant \mathrm{N}\mu(\mathcal{G}) + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.10}$$

W szczególności

$$\int_{\mathcal{S}} |G^*_{(\delta)}(s)|^2\, d\mu \leqslant \mathrm{N}\mu(\mathcal{S}) + \frac{\varepsilon}{3} = \mathrm{NM} + \frac{\varepsilon}{3} < \infty, \tag{5.11}$$

co dowodzi 1. Dzięki (5.5) dla wszystkich dodatnich liczb σ i η możemy znaleźć $m = m(\sigma, \eta)$ takie, że

$$\mu(\mathcal{J}_\delta) = \mu\left(\{s \mid |G^*_{(\delta)}(s)|^2 > \sigma\}\right) < \eta, \tag{5.12}$$

jeżeli $n \geqslant m$. Dobieramy σ i η w sposób następujący:

$$\sigma = \varepsilon/3\mathrm{M}, \qquad \eta = \varepsilon/3\mathrm{N}. \tag{5.13}$$

Wedy na podstawie (5.10), (5.12) i (5.13) mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} |G^*_{(\delta)}(s)|^2\, d\mu &= \int_{\mathcal{S}-\mathcal{G}_\delta} |G^*_{(\delta)}(s)|^2\, d\mu + \int_{\mathcal{G}_\delta} |G^*_{(\delta)}(s)|^2\, d\mu \leqslant \\ &\leqslant \int_{\mathcal{S}} \sigma d\mu + \int_{\mathcal{G}_\delta} |G^*_{(\delta)}(s)|^2\, d\mu \leqslant \sigma \mathrm{M} + \eta \mathrm{N} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned} \tag{5.14}$$

jeżeli $n \geqslant m(\sigma, \eta) = m(\varepsilon/3\mathrm{M}, \varepsilon/3\mathrm{N}) = m(\varepsilon)$. Ponieważ ε jest dowolne, to ostatni rezultat dowodzi 2. Aby dowieść 3 wystarczy wykorzystać ciągłość funkcjonału konstytutywnego (17).

C.-C. Wang [42] uogólnił powyższe rezultaty na szerszą klasę dopuszczalnych funkcji deformacji. Założył on, że dziedziną funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{H}$ jest klasa funkcji historii deformacji $C(\tau)$ tworzących metryczną przestrzeń Frécheta $\mathcal{G}_\mu$, której metryka d jest zdefiniowana w oparciu o zanikającą miarę μ w sposób następujący:

$$d(C_1, C_2) = \int_{\mathcal{S}} \frac{|C_1(s) - C_2(s)|}{1+|C_1(s) - C_2(s)|}\, d\mu, \qquad \mathcal{S} \subset [0, \infty). \tag{5.15}$$

Ciąg historii deformacji $C_n(s)$ jest zbieżny według miary, tzn.,

$$|C_n(s) - C(s)| \to 0 \tag{5.16}$$

według miary, gdy $n \to \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} d(C_n, C) \to 0. \tag{5.17}$$

Wszystkie otrzymane wcześniej rezultaty pozostają słuszne, jeżeli założymy

$$C(\tau) \in \mathcal{D}(\mathfrak{H}) \subset \mathcal{G}_\mu. \tag{5.18}$$

5.2. Druga propozycja C.-C. Wanga. Zajmiemy się analizą równania konstytutywnego (2.31). Jako klasę historii dopuszczalnych C.-C. Wang [43] wykorzystał przestrzeń funkcji p razy różniczkowalnych $\mathcal{C}^p$. Metryka tej przestrzeni określona jest następująco:

$$d(C_1, C_2) = \sum_{\gamma=0}^{p} \sup_{\gamma \leqslant p,\, s \in \mathcal{S}} |C_1^{\gamma}(s) - C_2^{\gamma}(s)|. \tag{5.19}$$

Wprowadzimy następujące definicje.

Definicja 17. *Rząd materiału prostego jest to najmniejsza liczba całkowita p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$, taka, że funkcjonał konstytutywny $\mathfrak{F}$ nie zależy bezpośrednio od $C^{(\gamma)}(\tau)$, jeżeli $\gamma > p$.*

Definicja 18. *Dziedziną funkcjonału $\mathfrak{F}$ będzie klasa funkcji $\mathcal{C}^p$ dodatnio określonych symetrycznych tensorów $C(\tau)$, gdzie $\tau \leqslant t$, tzn. $C(\tau) \in \mathcal{D}(\mathfrak{F}) \subset \mathcal{C}^p$.*

(17) Dalsze uogólnienia twierdzenia o relaksacji naprężenia można znaleźć w pracy B.D. Colemana i V.J. Mizela [11].

Słaba zasada zanikania pamięci w drugiej koncepcji C.-C. WANGA jest następująca:

DEFINICJA 19. *Materiał prosty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, jeżeli jego funkcjonał konstytutywny jest ciągły dla każdej historii spoczynkowej* (*tzn.* $\boldsymbol{C}(t-s) \equiv \boldsymbol{C}(t)$ *dla dowolnego* $s \geqslant 0$) *ze względu na topologię zdefiniowaną w* $\mathcal{D}(\mathfrak{F}) \subset \mathcal{C}^p$.

Łatwo stwierdzić, że to sformułowanie jest szczególnym przypadkiem definicji 4. Rzeczywiście, obecnie ograniczamy przestrzeń metryczną $\mathcal{M}$ do przestrzeni metrycznej $\mathcal{C}^p$. Stąd wnioskujemy, że wszystkie rezultaty otrzymane na podstawie definicji 4 pozostają słuszne w obecnym przypadku. Ponieważ podstawowe twierdzenie 1 zostało po raz pierwszy sformułowane i udowodnione w koncepcji C.-C. Wanga podamy jego oryginalne brzmienie.

TWIERDZENIE 8. *Materiał prosty rzędu* $p \leqslant \infty$ *spełnia słabą zasadę zanikania pamięci wtedy i tylko wtedy, jeżeli dla każdej historii spoczynkowej* $\boldsymbol{C}(t)$ *mamy*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\lambda=t}^{-\infty} \mathbf{B}^{(p)}(\lambda, n) = \mathfrak{F}(\boldsymbol{C}(t)), \tag{5.20}$$

gdzie

$$\bigwedge_{\lambda \in (-\infty, t]} \bigwedge_{n>0} \left(\mathbf{B}^{(p)}(\lambda, n) = \left\{\overline{\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}(\tau))} \Big| \bigwedge_{\boldsymbol{C}(\tau) \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})} \left(\tau \in [\lambda, t],\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\gamma \in [0, p],\, d\big(\boldsymbol{C}(\tau), \boldsymbol{C}(t)\big) \leqslant \frac{1}{n}\right)\right\}\right). \tag{5.21}$$

Przyjmijmy definicje α-spowolnienia i β-relaksacji danego materiału prostego takie jak w punkcie 3.3 (por. def. 10 i 11).

Naturalnym rozszerzeniem wprowadzonego pojęcia granicznego procesu jest rozwinięcie w szereg Taylora. Zamiast zakładać silniejsze ograniczenia odnośnie ciągłości, zakładamy istnienie rozwinięcia w szereg:

$$\underset{\text{dla } \beta \to 0}{{}_{\beta}\mathfrak{F}\big(\boldsymbol{C}(\tau)\big)} = \mathfrak{F}\big(\boldsymbol{C}(t)\big) + \mathfrak{F}_1\big(\boldsymbol{C}(\tau)\big)\beta + \mathfrak{F}_2\big(\boldsymbol{C}(\tau)\big)\beta^2 +$$
$$+ \ldots + \mathfrak{F}_n\big(\boldsymbol{C}(\tau)\big)\beta^n + o(\beta^n). \tag{5.22}$$

Podobnie

$$\underset{\text{dla } \alpha \to 0}{\mathfrak{F}_{\alpha}\big(\boldsymbol{C}(\tau)\big)} = \mathfrak{F}\big(\boldsymbol{C}(t)\big) + \bar{\mathfrak{F}}_1\big(\boldsymbol{C}(\tau)\big)\alpha + \bar{\mathfrak{F}}_2\big(\boldsymbol{C}(\tau)\big)\alpha^2 +$$
$$+ \ldots + \bar{\mathfrak{F}}_n\big(\boldsymbol{C}(\tau)\big)\alpha^n + o(\alpha^n). \tag{5.23}$$

Specjalny przypadek, gdy $\boldsymbol{C}(\tau)$ spełnia dodatkowe warunki ciągłości dla chwili aktualnej t znany jest jako twierdzenie o silnej aproksymacji.

Należy podkreślić, że drugie rozwinięcie w szereg Taylora odpowiada przypadkowi granicznemu, gdy czas wrażliwości staje się coraz krótszy, tzn. główna pamięć zbliża się do zera, i stąd nie zaskakuje fakt, że otoczenie chwili aktualnej staje się coraz bardziej ważne.

W dalszym ciągu przedstawimy szczegółowo rezultaty C.-C. Wanga dotyczące aproksymacji funkcjonału konstytutywnego.

C.-C. WANG posługuje się różniczką Frécheta z małymi modyfikacjami.

DEFINICJA 20. *Niech* $\mathfrak{F}(C(\tau))$ *będzie funkcjonałem ciągłym w pewnym otoczeniu* $\bar{C}(\tau)$. *Będziemy mówili, że* $\mathfrak{F}$ *jest różniczkowalne w sposób ciągły w* $\bar{C}(\tau)$, *jeżeli*

a) *istnieje funkcjonał* $\delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ *taki, że jeżeli* $\boldsymbol{C}$ *jest z otoczenia* $\bar{\boldsymbol{C}}$, *jeżeli* $\boldsymbol{D}$ *jest symetryczną funkcją tensorową dla której* $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D} \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$ *dla wszystkich* $\boldsymbol{C}$ *z otoczenia* $\bar{\boldsymbol{C}}$ *i jeżeli* η *jest liczbą rzeczywistą* $\eta \in [0, 1]$, *to* [18]

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}+\eta\boldsymbol{D}) = \mathfrak{F}(\boldsymbol{C})+\eta\delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})+\eta\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{C}), \tag{5.24}$$

gdzie dla każdego ustalonego $\boldsymbol{D}$, $\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{0}$ *jednostajnie ze względu na* $\boldsymbol{C}$ *w otoczeniu* $\bar{\boldsymbol{C}}$, *gdy* $\eta \to 0$ *oraz* $\eta \in [0, 1]$;

b) *dla każdego ustalonego* $\boldsymbol{D}$, *dla którego* $\delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ *jest określone,* $\delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ *jest ciągłe w* $\boldsymbol{C}$;

c) *dla każdego ustalonego* $\boldsymbol{C}$ *z otoczenia* $\bar{\boldsymbol{C}}$ $\delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ *jest ciągłe w* $\boldsymbol{D}$ *w dziedzinie określoności.*

Przy tych warunkach dla każdego ustalonego $\boldsymbol{C}$ $\delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$ jest liniowe w $\boldsymbol{D}$, tzn.

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}+\boldsymbol{E}) &= \delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})+\delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}), \\ \delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, a\boldsymbol{D}) &= a\delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}), \end{aligned} \tag{5.25}$$

jeżeli wskazana różniczka istnieje. Więcej, z b) i c) wynika, że $\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ jest funkcjonałem ciągłym i $\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{0}$, gdy $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{0}(\tau) \equiv \boldsymbol{0}$. Z definicji mamy również $\mathfrak{D}(\eta, a\boldsymbol{D}, \boldsymbol{C}) = a\mathfrak{D}(a\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})$ dla $a\eta \in [0, 1]$, $\eta \in [0, 1]$ i

$$\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}+\boldsymbol{E}, \boldsymbol{C}) = \mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{C})+\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{C})+\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{C}), \tag{5.26}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{C}) \equiv \delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}+\eta\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}) - \delta\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{E})+ \\ +\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{C}+\eta\boldsymbol{D}) - \mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{C}), \end{aligned} \tag{5.27}$$

jeżeli różniczki istnieją. Mówiąc wyraźniej

$$\mathfrak{D}(\eta, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{C}) \to \boldsymbol{0}, \tag{5.28}$$

gdy $\eta \to 0$ lub $\boldsymbol{D} \to \boldsymbol{0}$ lub $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{0}$.

DEFINICJA 21. *Materiał prosty spełnia silną zasadę zanikania pamięci (rzędu 1), jeżeli jego funkcjonał konstytutywny jest w sposób ciągły różniczkowalny w każdej historii spoczynkowej z przestrzeni* $\mathcal{D}(\mathfrak{F}) \subset \mathcal{C}^p$.

Niech materiał prosty spełnia silną zasadę zanikania pamięci (rzędu 1) i niech historia deformacji będzie w sposób ciągły różniczkowalna w chwili aktualnej t.

TWIERDZENIE 9. $\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}^\alpha(\tau))$ *ma następującą aproksymację*

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{C}^\alpha(\tau)) = \mathfrak{F}(\boldsymbol{C}(t))+\mathfrak{L}(\boldsymbol{C}(t), a\boldsymbol{A}_1(t))+\boldsymbol{o}(a), \tag{5.29}$$

dla dostatecznie małego a, *gdzie* $\boldsymbol{A}_1(t)$ *jest pierwszym tensorem Rivlina-Ericksena.* $\mathfrak{L}$ *jest liniową funkcją swego drugiego argumentu. Funkcja* $\mathfrak{L}$ *jest jednoznacznie określona przez* $\mathfrak{F}$.

[18]) Jeżeli $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D} \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$, wtedy $\boldsymbol{C}+\eta\boldsymbol{D} \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$ dla wszystkich $\eta \in [0, 1]$.

Dowód. Z założenia $C(\tau)$ jest w sposób ciągły różniczkowalne w $\tau = t$. Stąd

$$C(\tau) = C(t)+A_1(t)(t-\tau)^*+o(t-\tau), \tag{5.30}$$

gdzie $A_1(t)(t-\tau)^*$ jest zdefiniowane jako ustalona gładka funkcja, która równa się zeru na zewnątrz przedziału czasu $[t-2\varepsilon, t]$ i jest równa $A_1(t)(t-\tau)$ w przedziale $[t-\varepsilon, t]$. Parametr ε i ta gładka funkcja są tak dobrane, że $C(t)+ +A_1(t)(t-\tau)^* \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$.

Z definicji

$$C^\alpha(\tau) = C(t)+\alpha A_1(t)(t-\tau)^*+o\big(\alpha(t-\tau)\big). \tag{5.31}$$

Ponieważ materiał spełnia silną zasadę zanikania pamięci, to mamy

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\big(C^\alpha(\tau)\big) &= \mathfrak{F}\big(C(t)+\alpha A_1(t)(t-\tau)^*+o\big(\alpha(t-\tau)\big)\big) = \\ &= \mathfrak{F}\big(C(t)\big)+\delta\mathfrak{F}\big(C(t), \alpha A_1(t)(t-\tau)^*+o\big(\alpha(t-\tau)\big)\big)+ \\ &\quad + \mathfrak{D}\big(1, \alpha A_1(t)(t-\tau)^*+o\big(\alpha(t-\tau)\big), C(t)\big).\end{aligned} \tag{5.32}$$

Dzięki (5.25)

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{F}\big(C(t), \alpha A_1(t)(t-\tau)^*+o\big(\alpha(t-\tau)\big)\big) &= \\ &= \delta\mathfrak{F}\big(C(t), \alpha A_1(t)(t-\tau)^*\big)+\delta\mathfrak{F}\big(C(t); o\big(\alpha(t-\tau)\big)\big).\end{aligned} \tag{5.33}$$

Z (5.26)

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}\big(1, \alpha A_1(t)(t-\tau)^*+o\big(\alpha(t-\tau)\big), C(t)\big) &= \\ &= \mathfrak{D}\big(1, \alpha A_1(t)(t-\tau)^*, C(t)\big)+\mathfrak{D}\big(1, o\big(\alpha(t-\tau)\big), C(t)\big)+ \\ &\quad + \mathfrak{D}\big(1, \alpha A_1(t)(t-\tau)^*, o\big(\alpha(t-\tau)\big), C(t)\big)\end{aligned} \tag{5.34}$$

oraz

$$\mathfrak{D}\big(1, \alpha A_1(t)(t-\tau)^*, C(t)\big) = \alpha\mathfrak{D}\big(\alpha, A_1(t)(t-\tau)^*, C(t)\big). \tag{5.35}$$

Tak więc

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\big(C^\alpha(\tau)\big) &= \mathfrak{F}\big(C(t)\big)+\delta\mathfrak{F}\big(C(t), \alpha A_1(t)(t-\tau)^*\big)+ \\ &\quad + \delta\mathfrak{F}\big(C(t), o\big(\alpha(t-\tau)\big)\big)+\alpha\mathfrak{D}\big(\alpha, A_1(t)(t-\tau)^*, C(t)\big)+ \\ &\quad + \mathfrak{D}\big(1, o\big(\alpha(t-\tau)\big), C(t)\big)+\mathfrak{D}\big(1, \alpha A_1(t)(t-\tau)^*, o\big(\alpha(t-\tau)\big), C(t)\big) = \\ &= \mathfrak{F}\big(C(t)\big)+\delta\mathfrak{F}\big(C(t), \alpha A_1(t)(t-\tau)^*\big)+o(\alpha).\end{aligned} \tag{5.36}$$

Ponieważ $\delta\mathfrak{F}$ jest liniowe względem drugiego swego argumentu, dlatego przyjmując

$$\mathfrak{L}\big(C(t), \alpha A_1(t)\big) \equiv \delta\mathfrak{F}\big(C(t), \alpha A_1(t)(t-\tau)^*\big) \tag{5.37}$$

kończymy dowód twierdzenia.

Jako przykład różniczek wyższych rzędów funkcjonału konstytutywnego rozważymy rząd 2. Tę samą metodę postępowania można zastosować do różniczek wyższych rzędów niż 2.

DEFINICJA 22. *Niech* $\mathfrak{F}\big(C(\tau)\big)$ *będzie różniczkowalne w sposób ciągły w* $\bar{C}(\tau)$. *Będziemy mówili, że* $\mathfrak{F}$ *jest dwa razy różniczkowalne w* $\bar{C}(\tau)$, *jeżeli*

a) *istnieją funkcjonały* $\delta\mathfrak{F}(C, D)$ *i* $\delta^2\mathfrak{F}(C, D, E)$ *takie, że jeżeli* C *jest z otoczenia* $\bar{C}$ *i jeżeli* D *i* E *są symetrycznymi tensorowymi funkcjami takimi, że* $C+D \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$, $C+E \in \mathcal{D}(\mathfrak{F})$ *dla każdego* C *z otoczenia* $\bar{C}$ *i jeżeli* η, ε *są dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że* $\varepsilon+\eta \in [0, 1]$, *to*

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(C+\eta D+\varepsilon E) = \mathfrak{F}(C)+\eta\delta\mathfrak{F}(C, D)+\varepsilon\delta\mathfrak{F}(C, E)+ \\ +\eta^2\delta^2\mathfrak{F}(C, D, D)+\varepsilon\eta[\delta^2\mathfrak{F}(C, D, E)+ \\ +\delta^2\mathfrak{F}(C, E, D)]+\varepsilon^2\delta^2\mathfrak{F}(C, E, E)+ \\ +\eta^2\mathfrak{D}_2(\eta, D, C)+\varepsilon^2\mathfrak{D}_2(\varepsilon, E, C)+\varepsilon\eta\mathfrak{D}_2(\varepsilon, \eta, D, E, C),\end{aligned} \tag{5.38}$$

gdzie dla ustalonego D

$$\mathfrak{D}_2(\eta, D, C) \to 0 \tag{5.39}$$

jednostajnie w C, *gdy* $\eta \to 0$, $\eta \in [0, 1]$ *oraz*

$$\mathfrak{D}_2(\varepsilon, \eta, D, E, C) \to 0 \tag{5.40}$$

jednostajnie w C, *gdy* $\varepsilon \to 0$; *oczywiście dla* $\varepsilon = 0$ *mamy*

$$\mathfrak{F}(C+\eta D) = \mathfrak{F}(C)+\eta\delta\mathfrak{F}(C, D)+\eta^2\delta^2\mathfrak{F}(C, D, D)+\eta^2\mathfrak{D}_2(\eta, D, C); \tag{5.41}$$

b) *dla ustalonych* D *i* E *różniczki* $\delta\mathfrak{F}$ *i* $\delta^2\mathfrak{F}$ *są ciągłe w* C, *jeżeli są określone;*

c) *dla ustalonego* C *w otoczeniu* $\bar{C}$ *różniczki* $\delta\mathfrak{F}$, $\delta^2\mathfrak{F}$ *są ciągłe niezależnie względem pozostałych argumentów w dziedzinie określoności.*

Widzimy, że $\delta\mathfrak{F}$ jest liniowe względem drugiego argumentu, a $\delta^2\mathfrak{F}$ dwuliniowe względem dwóch ostatnich argumentów. Z b) i c) wynika, że $\mathfrak{D}_2(\eta, D, C)$ i $\mathfrak{D}_2(\varepsilon, \eta, E, D, C)$ są ciągłymi funkcjonałami. Stąd

$$\begin{aligned}&\mathfrak{D}_2(\eta, D, C) \to 0, \qquad \text{gdy} \quad D \to 0; \\ &\mathfrak{D}_2(\varepsilon, \eta, E, D, C) \to 0, \qquad \text{gdy} \quad E \to 0 \quad \text{lub} \quad D \to 0.\end{aligned} \tag{5.42}$$

Dalej mamy związki

$$\mathfrak{D}_2(\eta, aD, C) = a^2\mathfrak{D}_2(a\eta, D, C) \tag{5.43}$$

oraz

$$\mathfrak{D}_2(\eta, D+E, C) = \mathfrak{D}_2(\eta, D, C)+\mathfrak{D}_2(\eta, E, C)+\mathfrak{D}_2(\eta, D, E, C), \tag{5.44}$$

gdzie

$$\mathfrak{D}_2(\eta, D, E, C) = \mathfrak{D}_2(\eta, \eta, D, E, C).$$

Stąd

$$\mathfrak{D}_2(\eta, D, E, C) \to 0, \quad \text{gdy} \quad \eta \to 0 \quad \text{lub} \quad D \to 0 \quad \text{lub} \quad E \to 0. \tag{5.45}$$

DEFINICJA 23. *Materiał prosty spełnia silną zasadę zanikania pamięci (rzędu 2), jeżeli jego funkcjonał konstytutywny jest dwukrotnie różniczkowalny w sposób ciągły w każdej historii spoczynkowej z przestrzeni* $\mathcal{D}(\mathfrak{F}) \subset \mathcal{C}^p$.

Niech materiał prosty spełnia silną zasadę zanikania pamięci (rzędu 2) i niech historia deformacji będzie dwukrotnie różniczkowalna w sposób ciągły w chwili aktualnej t.

TWIERDZENIE 10. *$\mathfrak{F}(C^{\alpha}(\tau))$ ma następującą aproksymację*

$$\mathfrak{F}(C^{\alpha}(\tau)) = \mathfrak{F}(C(t)) + \mathfrak{L}_1(C(t), \alpha A_1(t)) + \mathfrak{L}_2(C(t), \alpha^2 A_2(t)) + \\ + \mathfrak{L}_3(C(t), \alpha A_1(t), \alpha A_1(t)) + o(\alpha^2) \tag{5.46}$$

dla dostatecznie małego α.

$A_2(t)$ jest drugim tensorem Rivlina-Ericksena. $\mathfrak{L}_1$ i $\mathfrak{L}_2$ są liniowymi funkcjami swoich drugich argumentów, a $\mathfrak{L}_3$ jest dwuliniową funkcją swoich ostatnich dwóch argumentów. Funkcje $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ i $\mathfrak{L}_3$ są jednoznacznie określone przez $\mathfrak{F}$.

Jak już podkreślono wcześniej, poprzednie twierdzenie może być traktowane jako specjalny przypadek rozwinięcia w szereg Taylora α-spowolnienia materiału prostego. Mamy więc następujące:

TWIERDZENIE 11. *Niech materiał prosty podlega silnej zasadzie zanikania pamięci rzędu n. Wtedy funkcjonał konstytutywny jego α-spowolnienia może być rozwinięty w szereg Taylora w punkcie $\alpha = 0$:*

$$\mathfrak{F}_{\alpha}(C + D(\tau)) = \mathfrak{F}(C) + \mathfrak{F}_{(1)}(C, D(\tau))\,\alpha + \mathfrak{F}_{(2)}(C, D(\tau))\,\alpha^2 + \ldots + \\ + \mathfrak{F}_{(n)}(C, D(\tau))\,\alpha^n + \alpha\mathfrak{D}(\alpha^n, D(\tau), C), \tag{5.47}$$

gdzie

$$\mathfrak{F}_{(k)}(C, D(\tau)) = \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{F}_{(k,i)}(C, D(\tau)) \tag{5.48}$$

i funkcjonały $\mathfrak{F}_{(k,i)}(C, D(\tau))$ są postaci

$$\mathfrak{F}_{(k,i)}(C, D(\tau)) = \bar{\mathfrak{F}}_{(k,i)}(C, D(\tau), \ldots, D(\tau)) \tag{5.49}$$

i $\bar{\mathfrak{F}}_{(k,i)}(C, D(\tau), \ldots, D(\tau))$ jest funkcjonałem o $i+1$ argumentach, i-liniowym względem ostatnich i argumentów dla każdego ustalonego C.

Funkcjonały $\mathfrak{F}_{(k)}(C, D(\tau))$ dla ustalonego $D(\tau)$ są ciągłymi funkcjami C i funkcjonał $\mathfrak{D}(\alpha^n, D(\tau), C)$ jest ciągły względem swoich dwóch ostatnich argumentów i $\mathfrak{D} \to 0$ niezależnie, gdy $\alpha^n \to 0$ lub $D(\tau) \to 0$. Gdy $D(\tau)$ jest n razy różniczkowalne w sposób ciągły dla chwili aktualnej t, to funkcjonały $\mathfrak{F}_{(k,i)}(C, D(\tau))$ redukują się do odpowiednich funkcji względem tensorów Rivlina-Ericksena (co odpowiada twierdzeniu o silnej aproksymacji). Funkcjonały $\mathfrak{F}_{(k,i)}$ mają własności lokalne w chwili aktualnej t.

W interpretacji fizykalnej rozwinięcie w szereg dla przypadku $\alpha \to +0$ oznacza aproksymację wielomianową dla dostatecznie małego czasu wrażliwości. Lokalna własność współczynników rozwinięcia odpowiada faktowi, że czas wrażliwości jest miarą głównej pamięci materiału [19].

---

[19] Porównując aproksymacje C.-C. WANGA z aproksymacjami uzyskanymi w koncepcji B.D. COLEMANA i W. NOLLA należy przede wszystkim zwrócić uwagę na różnice w interpretacji. C.-C. WANG interpretuje aproksymację funkcjonału konstytutywnego swego α-spowolnienia jako różne rodziny materiałów, podczas gdy B.D. COLEMAN i W. NOLL interpretują rozwinięcie uzyskane dla procesu powolnego jako reakcję danego materiału na różne historie deformacji. Teoria aproksymacji C.-C. WANGA dała szczegółowe rozwinięcie i matematyczne uzasadnienie heurystycznej koncepcji C. TRUESDELLA przedstawionej w pracy [40].

DEFINICJA 24. *Przez materiał lepkosprężysty będziemy rozumieć materiał rzędu 0, dla którego dziedzina jego funkcjonału konstytutywnego składa się tylko z historii deformacji, które są ograniczone, tzn.,* $\mathcal{D}_0(\mathfrak{F}) = \{C(\tau) \mid C(\tau) \in \mathcal{C}^0,\ \tau \in (-\infty, t)\}$ *i istnieje stała* M, *która może zależeć od* $C(\tau)$, *taka że* $|C(\tau)| \leqslant \mathrm{M}$ *dla dowolnego* $\tau \in (-\infty, t]$.

Jest oczywiste, że węższa dziedzina $\mathcal{D}_0(\mathfrak{F})$ ma wszystkie algebraiczne własności $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$, z których najważniejsze są: a) jeżeli $C(\tau) \in \mathcal{D}_0(\mathfrak{F})$, to $\eta C(\tau) \in \mathcal{D}_0(\mathfrak{F})$ dla $\eta \geqslant 0$; b) jeżeli $C(\tau), D(\tau) \in \mathcal{D}_0(\mathfrak{F})$, to $C(\tau)+D(\tau) \in \mathcal{D}_0(\mathfrak{F})$. Mówimy, że $\mathcal{D}_0(\mathfrak{F})$ jest gęste w $\mathcal{D}(\mathfrak{F})$. (Zbiór $\mathbf{A}$ nazywamy gęstym w przestrzeni $\mathbf{E}$, jeśli $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$).

Będziemy mówili, że materiał lepkosprężysty spełnia słabą zasadę zanikania pamięci, jeżeli $\mathfrak{F}$ jest ciągłe w każdej historii spoczynkowej, i że spełnia silną zasadę zanikania pamięci, jeżeli $\mathfrak{F}$ jest w sposób ciągły różniczkowalne w każdej historii spoczynkowej. Bardziej szczegółowo zajmiemy się przypadkiem drugim. Wykorzystamy następujące twierdzenie Riesza.

TWIERDZENIE 12. *Niech* $\mathcal{C}^0\,[0, 1]$ *oznacza przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych określonych na* $[0, 1]$ *ze zbieżnością jednostajną. Wtedy każdy ciągły liniowy funkcjonał L określony na* $\mathcal{C}^0\,[0, 1]$ *ma następującą reprezentację.*

$$L(f) = \int_0^1 f dg \tag{5.50}$$

dla wszystkich $f \in \mathcal{C}^0\,[0, 1]$, *gdzie g jest określoną funkcją lewostronnie ciągłą o wahaniach skończonych* $[0, 1]$ *i* $g(0) = 0$; *g jest jednoznacznie określoną funkcją przez funkcjonał L.*

DEFINICJA 25. *Zdefiniujmy* $\mathcal{C}_0^0\,[0, 1)$ *jako przestrzeń wszystkich ograniczonych funkcji ciągłych na* $[0, 1)$ *o topologii wynikającej z jednostajnej zbieżności na każdym zamkniętym przedziale z* $[0, 1)$.

Można udowodnić, że przestrzeń $\mathcal{C}^0\,[0, 1]$ traktowana jako podzbiór $\mathcal{C}_0^0\,[0, 1)$ jest gęsta w $\mathcal{C}_0^0\,[0, 1)$.

TWIERDZENIE 13. *Teza twierdzenia Riesza jest nadal słuszna, jeżeli zastąpimy* $\mathcal{C}^0\,[0, 1]$ *przez* $\mathcal{C}_0^0\,[0, 1)$.

LEMAT. *Niech* $\mathcal{C}_0^0\,[0, \infty)$ *oznacza przestrzeń wszystkich funkcji ograniczonych i ciągłych na* $[0, \infty)$ *ze zbieżnością jednostajną na każdym skończonym przedziale z* $[0, \infty)$. *Wtedy* $\mathcal{C}_0^0\,[0, \infty)$ *jest izomorficzna (w rzeczywistości homeomorficzna) z* $\mathcal{C}_0^0\,[0, 1)$.

Dowód. Rozważmy przekształcenie $T \mid \mathcal{C}_0^0\,[0, 1) \to \mathcal{C}_0^0\,[0, \infty)$ zdefiniowane przez

$$(Tf)(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right). \tag{5.51}$$

Oczywiście T jest wzajemnie jednoznacznym przekształceniem.

Powyższy lemat pozwala zastosować poprzednio wypowiedziane twierdzenie do przestrzeni $\mathcal{C}_0^0\,[0, \infty)$. Stąd każdy ciągły liniowy funkcjonał na $\mathcal{C}_0^0\,[0, \infty)$ ma reprezentację

$$L(f) = \int_0^\infty f dg. \tag{5.52}$$

Jeżeli założymy, że funkcjonał konstytutywny rozważanego materiału spełnia silną zasadę zanikania pamięci (rzędu 1), to w nowej dziedzinie $\mathcal{D}_0(\mathfrak{F})$ mamy

$$\mathfrak{F}(C+\eta D) = \mathfrak{F}(C)+\eta\delta\mathfrak{F}(C, D)+\eta\mathfrak{D}(\eta, D, C), \tag{5.53}$$

gdzie C reprezentuje pewną historię spoczynkową.

Stosując ostatni lemat do $\delta\mathfrak{F}$ dostaniemy następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE 14. *Materiał lepkosprężysty spełnia silną zasadę zanikania pamięci (rzędu* 1), *wtedy i tylko wtedy, jeżeli jego funkcjonał konstytutywny ma następującą reprezentację*:

$$[\mathfrak{F}(C+\eta D)]_{ij} = [\mathfrak{F}(C)]_{ij}+\eta \int\limits_{-\infty}^{t} D_{kl}(\tau)\, d\mathrm{K}_{ijkl}(\tau)+\eta\, [\mathfrak{D}(\eta, D, C)]_{ij}, \tag{5.54}$$

gdzie $\mathrm{K}_{ijkl}(\tau)$ *jest czwartego rzędu tensorową funkcją taką, że* $\mathrm{K}_{ijkl} = \mathrm{K}_{jikl} = \mathrm{K}_{ijlk}$ *i jest o wahaniu ograniczonym w przedziale* $(-\infty, t]$ *oraz że* $d\mathrm{K}_{ijkl} = 0$ *w pobliżu* $-\infty$.

W ogólności K_{ijkl} zależy również od C. Stąd widać, że materiał lepkosprężysty ma dokładnie skończoną pamięć.

Jeżeli $\mathrm{K}_{ijkl}(\tau)$ jest funkcją klasy $\mathcal{C}^1$ i jeżeli miara jest skończona, to istnieje gęstość Radona-Nikodyma ([20])

$$\mathrm{G}_{ijkl}(\tau) = \frac{d\mathrm{K}_{ijkt}}{d\tau}. \tag{5.55}$$

Równanie konstytutywne (5.54) redukuje się do równania

$$[\mathfrak{F}(C+\eta D)]_{ij} = [\mathfrak{F}(C)]_{ij}+\eta \int\limits_{t-N}^{t} \mathrm{G}_{ijkl}(\tau)\, D_{kl}(\tau)\, d\tau+\eta\, [\mathfrak{D}]_{ij}, \tag{5.56}$$

gdzie N jest pewną nieujemną stałą materiału, która może zależeć od $C(t)$.

6. Opis A.E. Greena i R.S. Rivlina

6.1. Zarys koncepcji. A. E. GREEN i R. S. RIVLIN [14–16] pierwsi zajęli się zagadnieniem aproksymacji funkcjonału konstytutywnego. W celu bliższego omówienia ich pierwszych rezultatów rozważmy równanie konstytutywne materiału prostego w postaci (2.31).

Wykorzystajmy następującą definicję tensora odkształcenia

$$2E \equiv C - 1. \tag{6.1}$$

Stąd wprowadzając historię odkształcenia

$$E^t(s) \equiv E(t-s), \qquad s \in [0, \infty), \tag{6.2}$$

możemy równanie (2.31) napisać w następującej równoważnej postaci

$$R(t)^T\, T(t)\, R(t) = \underset{s=0}{\overset{\infty}{\mathfrak{T}}}\big(E^t(s)\big). \tag{6.3}$$

([20]) Por. R. SIKORSKI [38] lub K. YOSIDA [45].

Jako klasę dopuszczalnych historii odkształcenia A. E. GREEN i R. S. RIVLIN rozważali przestrzeń funkcji ciągłych $\mathcal{C}^0$. Metryka w tej przestrzeni określona jest za pomocą wzoru

$$d(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2) = \sup_{s \in \mathcal{S}} |\boldsymbol{E}_1(s) - \boldsymbol{E}_2(s)|. \tag{6.4}$$

Dziedzina $\mathcal{D}(\mathfrak{T})$ funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{T}$ spełnia więc warunek

$$\boldsymbol{E}(\tau) \in \mathcal{D}(\mathfrak{T}) \subset \mathcal{C}^0. \tag{6.5}$$

A. E. GREEN i R. S. RIVLIN nie analizowali słabej i silnej zasady zanikania pamięci, ale byli głównie zainteresowani w uzyskaniu aproksymacji wielomianowych dla funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{T}$. Zakładając ciągłość $\mathfrak{T}$ zaproponowali intuicyjnie następującą aproksymację

$$\mathfrak{T} = \sum_{n=1}^{N} \mathfrak{T}_n, \tag{6.6}$$

gdzie $\mathfrak{T}_n$ jest n-krotną całką. Kolejno dla $\mathfrak{T}_1$ mamy wzór

$$\mathfrak{T}_1 = \int_0^\infty \mathbf{K}_1(s)\, \boldsymbol{E}(t-s)\, ds; \tag{6.7}$$

$\mathfrak{T}_2$ wyraża się analogicznie

$$\mathfrak{T}_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbf{K}_2(s_1, s_2)\, \boldsymbol{E}(t-s_1)\, \boldsymbol{E}(t-s_2)\, ds_1\, ds_2. \tag{6.8}$$

W ogólności

$$\mathfrak{T}_n = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \mathbf{K}_n(s_1, \ldots, s_n)\, \boldsymbol{E}(t-s_1) \ldots \boldsymbol{E}(t-s_n)\, ds_1 \ldots ds_n. \tag{6.9}$$

Jeżeli dziedzina $\mathcal{D}(\mathfrak{T})$ jest klasą funkcji $\boldsymbol{E}(\tau)$ raz różniczkowalnych, to wzory (6.7)–(6.9) mogą być zapisane w następującej postaci [21]:

$$\mathfrak{T}_1 = \int_0^\infty \boldsymbol{\Phi}_1(s)\, \dot{\boldsymbol{E}}(t-s)\, ds, \tag{6.10}$$

$$\mathfrak{T}_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \boldsymbol{\Phi}_2(s_1, s_2)\, \dot{\boldsymbol{E}}(t-s_1)\, \dot{\boldsymbol{E}}(t-s_2)\, ds_1\, ds_2, \tag{6.11}$$

$$\mathfrak{T}_n = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \boldsymbol{\Phi}_n(s_1, \ldots, s_n)\, \dot{\boldsymbol{E}}(t-s_1) \ldots \dot{\boldsymbol{E}}(t-s_n)\, ds_1 \ldots ds_n. \tag{6.12}$$

---

[21] Wzory (6.10)–(6.12) napisane we współrzędnych mają następującą postać:

$$\mathfrak{T}_1^{kl} = \int_0^\infty \Phi_1^{\alpha\beta kl}(s)\, \dot{E}_{\alpha\beta}(t-s)\, ds,$$

$$\mathfrak{T}_2^{kl} = \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_2^{\alpha\beta\delta\gamma ki}(s_1, s_2)\, \dot{E}_{\alpha\beta}(t-s_1)\, \dot{E}_{\delta\gamma}(t-s_2)\, ds_1\, ds_2,$$

$$\mathfrak{T}_n^{kl} = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \Phi_n^{\alpha\beta\ldots\varkappa\mu kl}(s_1, \ldots, s_n)\, \dot{E}_{\alpha\beta}(t-s_1) \ldots \dot{E}_{\varkappa\mu}(t-s_n).\, ds_1 \ldots ds_n.$$

E. A. Green i R. S. Rivlin [16] zaproponowali, że dla pewnych procesów deformacji wzory (6.10)—(6.12) mogą być napisane w postaci (22):

$$\mathfrak{T}_1 = \int_0^T \mathbf{\Phi}_1(s)\, \dot{E}(t-s)\, ds, \tag{6.13}$$

$$\mathfrak{T}_2 = \int_0^T \int_0^T \mathbf{\Phi}_2(s_1, s_2)\, \dot{E}(t-s_1)\, \dot{E}(t-s_2)\, ds_1\, ds_2, \tag{6.14}$$

$$\mathfrak{T}_n = \int_0^T \dots \int_0^T \mathbf{\Phi}_n(s_1, \dots, s_n)\, \dot{E}(t-s_1) \dots \dot{E}(t-s_n)\, ds_1 \dots ds_n, \tag{6.15}$$

gdzie T jest pewną stałą charakteryzującą rozważany materiał, tzn. założyli skończoną pamięć materiału (23).

6.2. Ściśle sprecyzowanie koncepcji i uogólnienia. R. V. S. Chacon i R. S. Rivlin [4] założyli, że historie odkształcenia tworzą zwartą przestrzeń Hausdorffa oraz że $\mathfrak{T}$ jest ciągłym funkcjonałem $E^t(s)$. Te założenia pozwalają zastosować twierdzenie Stone'a-Weierstrassa (24) w celu uzyskania aproksymacji dla funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{T}$. Przyjmując więc

$$E(\tau) \in \mathcal{D}(\mathfrak{T}) \subset \mathcal{Z}, \tag{6.16}$$

gdzie $\mathcal{Z}$ oznacza zwartą przestrzeń Hausdorffa, dostajemy [por. z rezultatami (3.32) i (3.33)]

$$\mathfrak{T} = \sum \mathfrak{S}^{(k)}\, \mathfrak{L}_1^{(k)}\, \mathfrak{L}_2^{(k)} \dots \mathfrak{L}_{n_k}^{(k)}. \tag{6.17}$$

Wprowadźmy transformację

$$\sigma = \frac{1}{t-\tau+1}, \tag{6.18}$$

która przekształca $\tau \in (-\infty, t]$ w $\sigma \in (0, 1]$. Rozważmy szczególny przypadek, kiedy przestrzeń historii deformacji jest zwartą przestrzenią funkcji ciągłych, tzn.

$$E(\tau) \in \mathcal{D}(\mathfrak{T}) \subset \mathcal{C}^0_{\mathcal{Z}}. \tag{6.19}$$

Wykorzystując twierdzenie Riesza możemy funkcjonały liniowe w rozwinięciu (6.17) przedstawić w postaci

$$\mathfrak{L}^{(k)} = \int_0^1 \mathbf{K}(\sigma)\, E(\sigma)\, d\sigma. \tag{6.20}$$

Podstawiając rezultat (6.20) do rozwinięcia (6.17) dostajemy reprezentację całkową funkcjonału konstytutywnego $\mathfrak{T}$ w postaci (6.6)–(6.9).

(22) Związki (6.13)–(6.15) dla nieskończenie małych deformacji były wprowadzone przez A.C. Pipkina i R.S. Rivlina [33].

(23) Interesujące jest porównanie rezultatów (6.6), (6.13)–(6.15) z wynikiem C.-C. Wanga (5.56). C.-C. Wang ściśle wykazał, w jakich przypadkach można przyjmować skończoną pamięć materiału. Udowodnił tym samym słuszność intuicyjnego założenia A.E. Greena i R.S. Rivlina.

(24) Szczegółowe omówienie warunków stosowalności twierdzenia Stone'a-Weierstrassa można znaleźć w monografii K. Yosidy [45]; por. również R. Engelking [13].

R. V. S. Chacon i R. S. Rivlin [4] uogólnili powyższe rozważania na klasę historii deformacji tworzących zwartą przestrzeń Hausdorffa funkcji o wahaniach ograniczonych.

Szczegółową dyskusję metody R.V.S. Chacona i R.S. Rivlina przeprowadził ostatnio J.S. Lew [23].

7. Uwagi końcowe

W ostatnim punkcie pracy warto będzie zastanowić się nad praktycznym znaczeniem teorii materiałów z zanikającą pamięcią.

Wykazaliśmy, że dzięki szczegółowo opracowanym aproksymacjom i uzyskanym reprezentacjom całkowym oraz zbadaniu ich stosowalności i przydatności do opisu realnych materiałów podczas realnych procesów deformacji teoria ta spotkała się z ogromnym zainteresowaniem teoretyków. Widzą oni w niej przede wszystkim nowe narzędzie opisu wielu właściwości polimerów, gruntów i metali. Bardziej jednak interesujący jest fakt, że teoria ta zainteresowała wielu eksperymentatorów, którzy zauważyli na jej podstawie nowe horyzonty badań doświadczalnych. Już w tej chwili widać, że wpływ teorii materiałów z zanikającą pamięcią na kierunek przyszłych badań doświadczalnych jest przełomowy. Zmusza do nowej organizacji laboratoriów badawczych zajmujących się metalami, polimerami czy gruntami. Badania doświadczalne, których celem będzie już nie określanie stałych materiałowych ale funkcji, które w reprezentacjach całkowych spełniają rolę jąder, muszą być organizowane kompleksowo. Muszą być prowadzone dla bardziej złożonych procesów deformacji, co wymaga nowej aparatury i zwiększonej liczby pracowników. Tylko tak zorganizowane laboratoria będą w stanie dotrzymać kroku pracom teoretycznym w tej dziedzinie.

Warto chyba podkreślić, że pierwsze wyniki doświadczalne opierające się na reprezentacjach całkowych w teorii materiałów z zanikającą pamięcią już zostały osiągnięte. Bardzo dobrym przykładem jest praca K. Onarana i W.N. Findleya [30].

Tych kilka uwag o charakterze praktycznym prowadzi chyba do oczywistego wniosku, że w tej abstrakcji matematycznej jaka była potrzebna do zbudowania teorii materiałów z zanikającą pamięcią jest naprawdę głęboki sens praktyczny.

Literatura

1. L. Boltzman, *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*, Sitzber. Akad. Wiss., Wien, Math. naturw. Kl. **70** (1874), 275.

2. L. Bourbaki, *Topologie Générale*, Ch. 1 et 2, Hermann, Paris 1965.

3. G. Choquet, *Topologie*, Masson et C^{ie}, Paris 1964; Topology, Academic Press, New York 1966.

4. R.V.S. Chacon and R.S. Rivlin, *Representation theorems in mechanics of materials with memory*, ZAMP, **15** (1964), 444–447.

5. B.D. Coleman and W. Noll, *An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Anal., **6** (1960), 355–370.

6. B.D. COLEMAN and W. NOLL, *Recent results in the continuum theory of viscoelastic fluids*, Ann. N.Y. Acad. Sci., **89** (1961), 672–714.

7. B.D. COLENAN and W. NOLL, *Foundations of linear viscoelasticity*, Reviews of Modern Physics, **33** (1961), 239–249.

8. B.D. COLEMAN and W. NOLL, *Simple fluids with fading memory*, Proc. Internat. Sympos. Second-Order Effects, Haifa, 1962; Macmillan, New York 1964, pp. 530–552.

9. B.D. COLEMAN, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 1–46.

10. B.D. COLEMAN, *On thermodynamics, strain impulses, and viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 230–254.

11. B.D. COLEMAN and V.J. MIZEL, *Norms and semi-groups in the theory of fading memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **23** (1966), 87–123.

12. N. DUNFORD and J.T. SCHWARTZ, *Linear operators*, Part I, Interscience, New York 1958.

13. R. ENGELKING, *Zarys topologii ogólnej*, PWN, Warszawa 1965.

14. A.E. GREEN and R.S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, I, Arch. Rat. Mech. Anal., **1** (1957), 1–21.

15. A.E. GREEN and R.S. RIVLIN and A.J.M. SPENCER, *The mechanics of non-linear materials with memory*, II, Arch. Rat. Mech. Anal., **3** (1959), 82–90.

16. A.E. GREEN and R.S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, III, Arch. Rat. Mech. Anal., **4** (1960), 387–404.

17. M.E. GURTIN and E. STERNBERG, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **11** (1962), 291–356.

18. N.C. HUANG and E.H. LEE, *Nonlinear viscoelasticity for short time ranges*, J. Appl. Mech., (1965).

19. Л.Б. Канторович и Г.П. Акилов, *функциональный анализ в нормированных пространствах*, Москва 1959.

20. K. KURATOWSKI i A. MOSTOWSKI, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa, wyd. I 1952, wyd. II 1966.

21. K. KURATOWSKI, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa, wyd. I 1954, wyd. III 1965.

22. K. KURATOWSKI, *Topology*, vol. I, Academic Press, New York, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1966; Топология, I, Мир, Москва 1966.

23. J.S. LEW, *Polynomial approximations to functionals in the theory of materials with memory*, ZAMP, **17** (1966), 692–699.

24. G. LIANIS and P.H. DEHOFF, JR., *Studies on constitutive equations of first and second order viscoelasticity*, Purdue University Report, September 1964; Acta Mechanica, **2** (1966), 21–34.

25. L.A. LUSTERNIK i W.L. SOBOLEW, *Elementy analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1959.

26. V.J. MIZEL and C.-C. WANG, *A fading memory hypothesis which suffices for chain rules*, Arch. Rat. Mech. Anal., **23** (1966), 124–134.

27. K. MAURIN, *Metody przestrzeni Hilberta*, PWN, Warszawa 1959.

28. W. NOLL, *A mathematicall theory of the mechanical behaviour of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Anal., **2** (1958), 195–226.

29. W. NOLL, *The foundations of classical mechanics in the light of recent advances in continuum mechanics*, *The Axiomatic Method with Special Reference to Geometry and Physics*. Proc. Int. Symposium, Berkeley, December 26, 1957 — January 4, 1958, North-Holland, Amsterdam 1958, 266–281.

30. K. ONARAN and W.N. FINDLEY, *Combined Stress-Creep Experiments on a Nonlinear Viscoelastic Material to Determine the Kernel Functions for a Multiple Internal Representation of Creep*, Transactions of the Society of Rheology, **9** (1965), 299–327.

31. P. PERZYNA, *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa 1966.

32. P. PERZYNA, *On fading memory of a material*, Arch. Mech. Stos., **19** (1967), 537–547.

33. A.C. PIPKIN and R.S. RIVLIN, *Small deformations superposed on large deformations in materials with fading memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **8** (1961), 217–308.

34. A.C. PIPKIN, *Small finite deformations of viscoelastic solids*, Reviews of Modern Physics, **36** (1964), 1034–1041.

35. R.S. RIVLIN, *A note on the mechanical constitutive equations for materials with memory*, ZAMP, **15** (1964), 652–654.

36. R.S. RIVLIN, *Nonlinear viscoelastic solids*, SIAM Review, **7** (1965), 323–340.

37. S. SAKS, *Zarys teorii całki*, Wydawnictwo Kasy im. Mianowskiego, Warszawa 1930.

38. R. SIKORSKI, *Funkcje rzeczywiste*, I, II, PWN, Warszawa 1958–59.

39. C. TRUESDELL, *Second-order effects in the mechanics of materials*, Proc. Internat. Sympos. Second-Order Effects, Haifa, 1962; Macmillan, New York 1964, 1–47.

40. C. TRUESDELL, *The natural time of a viscoelastic fluid: Its Significance and Measurement*, Physics of Fluids, **7** (1964), 1134–1142.

41. C. TRUESDELL and W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Encyclopedia of Physics, Ed. S. Flügge, vol. III/3, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1965.

42. C.-C. WANG, *Stress relaxation and the principle of fading memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18** (1965), 117–126.

43. C.-C. WANG, *The principle of fading memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18** (1965), 343–366.

44. C.-C. WANG, and R.M. BOWEN, *On the thermodynamics of non-linear materials with quasi-elastic response*, Arch. Rat. Mech. Anal., **22** (1966), 79–99.

45. K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1965.

Резюме

КОНЦЕПЦИИ ЗАТУХАНИЯ ПАМЯТИ МАТЕРИАЛА

Широко развитая, в последнее время, теория простых материалов стала основой описания многих свойств реальных материалов. Характеристическими чертами этой теории являются, надлежащим образом обоснованные физические основы и забота о сохранении математической точности. Благодаря своей совокупности ее можно использовать для описания некоторых материалов как и многих полимеров или грунтов. Путем соответствующих аппроксимаций определяющего уравнения, описывающего поведение простого материала, можно получить много известных в теории материалов.

Аппроксимации определяющего уравнения, можно построить на базе некоторых ограничений, наложенных на память материала. Эти ограничения помещаются, в общем, в предположении затухающей памяти, материала.

Цель, настоящей работы состоит в широком обсуждении разных концепций описания затухания материала. Автор показал результаты, полученные многими авторами и, в общем, при разных предположениях в рамках некоторого однородного подхода, который можно достич, основываясь на метризируемом топологическом пространстве. Это позволило рассмотреть все полученные до сих пор результаты, как некоторые особые случаи, и дало возможность исследовать существующие между ними, зависимости.

Все рассматриваемые задачи касаются конечных деформаций сплошной среды, имеющих место во время изотермических процессов.

В п. 2 дается краткое обсуждение теории простого материала. Проводится подробный анализ видов определяющего уравнения, которые будут исследоваться в дальнейших частях работы.

П. 3 является основным для всей работы. В нем обсуждаются физическое обоснование затухания памяти материала. Уточняются математические принципы затухания его памяти. Область определяющего функционала определяется как подмножество метризированного топологического пространства, тогда как слабые и сильные принципы затухания памяти соответственно, как условие непрерывности и дифференцируемости определяющего функционала в метризированном пространстве. Обсуждалось также, важнейшие результаты, которые можно получить из приведенного выше сформулирования принципов затухания памяти материала.

В п. 4 обсуждается подробно концепция описания затухания памяти материала, предложенную Б. Д. Колеманом и В. Ноллом. Много места посвящается основной теореме, касающейся релаксации напряжения, и аппроксимации определяющего функционала.

В п. 5 работы, обсуждается два предложения С.-С. Ванга, а в п. 6 анализируется концепция А. Е. Грина и Р. С. Ривлина.

В заключительных предложениях (п. 7) обращается внимание на практическое значение теории материалов с затухающей памятью.

Summary

THE DESCRIPTION OF THE PHENOMENON OF FADING MEMORY OF A MATERIAL

The theory of simple materials which has undergone considerable development in recent years has become a foundation for the description of many properties of real materials. This theory is remarkable for its good physical foundations and great care for mathematical correctness. Owing to its generality it can be used for the description of the properties of some metals and also many polymers and soils. By applying various approximations to the constitutive equation describing the behaviour of a simple material many known theories of materials can be obtained.

The constitutive equation can be simplified by imposing certain limitations on the memory of the material. These limitations are comprised, in general, within the frames of the assumption of fading memory of the material.

The aim of the present paper is to give a detailed discussion of various conceptions of the phenomenon of fading memory. It is the author's wish to show the results obtained by many authors (with different assumptions in general), using a uniform approach based on the notion of a metrizable topologic space. This enables all the results obtained hitherto to be considered to constitute particular cases of a common theory and gives a means of a study of the relations between them.

All the problems considered concern finite strains of a continuum occurring during isothermal processes.

Sec. 2 presents a brief discussion of the theory of a simple material. The forms of the constitutive equations studied in the subsequent parts of the paper are analysed in detail.

Sec. 3 is fundamental for the paper. It contains a discussion of the physical aspect of the phenomenon of fading memory. The mathematical foundations of its description are discussed. The domain of the constitutive functional is defined as a subset of a metric topologic space. The weak and strong principles of fading memory are defined, respectively, as the condition of continuity and differentiability of the constitutive functional in the metric space. The most important of the results that can be obtained from the above formulation of the principles of fading memory are discussed.

Sec. 4 brings a detailed discussion of the conception of description of fading memory proposed by B.D. Coleman and W. Noll. Much space is devoted to the fundamental theorem on the stress relaxation and to the approximations of the constitutive functional.

In Sec. 5 are discussed the two proposals of C.-C. Wang.

Sec. 6 is devoted to the conception of A.E. Green and R.S. Rivlin.

In the final conclusions (Sec. 7) the practical importance of the theory of materials with fading memory is pointed out.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 stycznia 1967 r.