

METODY ASYMPTOTYCZNE W TEORII TARCZY Z MIKROSTRUKTURĄ

KRZYSZTOF WILMAŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jak wiadomo [1] liniowe zagadnienie płaskiego ośrodka ciągłego z mikrostrukturą, który dalej będziemy nazywali tarczą z mikrostrukturą, sprowadza się w przypadku obciążeń statycznych do silnie eliptycznego układu równań. Niewiadomymi w tych równaniach są funkcja naprężeń φ i tensor naprężeń momentowych μ^ν . Z definicji mikrostruktury wynika, że w związkach fizycznych i tym samym w zbiorczym układzie równań występuje mały parametr [2]. Po przekształceniach omówionych w pracy [2] otrzymuje się następujące równania ośrodka:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon^2 [\tilde{\alpha}^{\alpha\beta\mu\nu}(\varphi, \nu - \mu_\nu), \mu]_{,\alpha} + {}'\tilde{C}^{\beta\nu} \mu_\nu &= 0, \\ ({}'\tilde{C}^{\beta\nu} \mu_\nu)_{,\beta} &= 0, \quad \alpha, \dots, \nu = 1, 2. \end{aligned}$$

Równanie (1.1)₂ można zastąpić równoważnym o postaci

$$(1.2) \quad [\tilde{\alpha}^{\alpha\beta\mu\nu}(\varphi, \nu - \mu_\nu), \mu]_{,\alpha\beta} = 0.$$

W powyższych równaniach φ oznacza funkcję naprężeń i jest określona przez wzór

$$(1.3) \quad p^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\mu} \varepsilon^{\beta\nu} (\varphi, \nu - \mu_\nu)_{,\mu}$$

$p^{\alpha\beta}$ oznacza tensor naprężeń siłowych, μ_α tensor naprężeń momentowych (1) $\tilde{\alpha}^{\alpha\beta\mu\nu}$, ${}'\tilde{C}^{\beta\nu}$ afinory sztywności tarczy, których współrzędne fizyczne są wielkościami tego samego rzędu oraz ε mały parametr.

Przecinkiem przed wskaźnikiem dolnym oznaczono różniczkowanie kowariantne w dowolnym krzywoliniowym układzie współrzędnych parametryzującym obszar Ω tarczy. Zakładamy, że brzegiem tego obszaru jest krzywa Γ o gładkości dopuszczającej wszystkie dalsze operacje.

W przytoczonym układzie równań pominięto wyrazy masowe, jako nie wpływające w sposób istotny na tok postępowania w przedstawianej metodzie całkowania. Metoda ta polega na wykorzystaniu faktu, że przy operatorze najwyższego rzędu znajduje się mały parametr. Pozwala to zastosować metody asymptotyczne, omówione na przykład w pracach [3-6]. Opisana w tej pracy metoda asymptotyczna

(1) Tensor μ_α jest związany z używanym w pracy [2] tensorem m^β przez następujący związek $\mu_\alpha = \varepsilon_{\beta\alpha} m^\beta$.

składa się z dwóch procesów iteracyjnych, z których drugi wprowadza do rozwiązania efekt warstwy brzegowej. Metoda wyznaczania efektu będzie analogiczna do sposobu stosowanego w teorii powłok przez GOLDENWEJZERA [6]. Zagadnienie brzegowe, rozwiązane w czwartym punkcie pracy, odpowiada klasycznemu zagadnieniu w naprężeniach.

2. Pierwszy proces iteracyjny

Załóżmy, że rozwiązanie układu (1.1)₁, (1.2) daje się napisać w następującej postaci (2):

$$(2.1) \quad \varphi = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \varphi^{(1,n)}, \quad \mu_\nu = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \mu_\nu^{(1,n)}.$$

Współczynniki tych rozwinięć określimy podstawiając wzory (2.1) do układu równań (1.1)₁, (1.2). Otrzymujemy

$$(2.2) \quad \varepsilon^2 \left[\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (\varphi_{,\nu} - \mu_\nu)_{,\mu} \right]_{,\alpha} + \tilde{C}^{\beta\alpha} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \mu_\alpha = 0,$$

$$\left[\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (\varphi_{,\nu} - \mu_\nu)_{,\mu} \right]_{,\alpha\beta} = 0.$$

Przyrównując do zera współczynniki powyższych wielomianów względem małego parametru ε otrzymujemy:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \mu_\alpha^{(1,0)} = 0, \\ & (\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{,\nu\mu})_{,\alpha\beta}^{(1,0)} = 0, \\ & \mu_\alpha^{(1,1)} = 0, \\ & (\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{,\nu\mu})_{,\alpha\beta}^{(1,1)} = 0, \\ & \mu_\alpha^{(1,i)} = - (\tilde{C}^{-1})_{\alpha\beta} \{ [\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} (\varphi_{,\nu} - \mu_\nu)_{,\mu}]_{,\beta} \}, \\ & (\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \varphi_{,\nu\mu})_{,\alpha\beta}^{(1,i)} - (\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \mu_{\nu,\mu})_{,\alpha\beta}^{(1,i)} = 0, \end{aligned} \quad (i = 3, \dots, N).$$

A więc poszczególne wyrazy w wielomianach (2.1) określamy z układów, z których każdy składa się z zależności algebraicznej dla $\mu_\nu^{(1,n)}$ oraz równania różniczkowego dla $\varphi^{(1,n)}$. Równanie to jest formalnie podobne do równania dla tarczy o anizotropii konstrukcyjnej [8]. Jeśli w naszych rozważaniach pominęlibyśmy wszystkie wyższe przybliżenia poza $n = 0$, to zagadnienie tarczy z mikrostrukturą zdegenerowałoby się do wspomnianego problemu anizotropii.

(2) W niniejszej pracy pominięto zagadnienie zbieżności procesów i szacowania reszt w szeregach. Tematu tego dotyczy praca [7].

Przenosząc rozwiązania zagadnień brzegowych dla tarczy anizotropowej (por. p. 4 pracy) potrafimy tym samym określić współczynniki rozwinięcia w pierwszym procesie iteracyjnym. Jednak otrzymane rozwiązanie nie jest wystarczające dla spełnienia wszystkich warunków nałożonych przez zagadnienie brzegowe. Dysponujemy równaniami czwartego rzędu, które pozwalają spełnić dwa warunki na brzegu Γ . Ponieważ silnie eliptyczny układ równań (1.1) jest szóstego rzędu, więc pozostaje do spełnienia jeszcze jeden warunek na brzegu Γ . Uzyskamy to dodając do rozwiązań (2.1) całki z drugiego procesu iteracyjnego.

3. Drugi proces iteracyjny

Jak już wspomniano wyżej, dodatkowych wyrażeń, pozwalających rozwiązać omawianą metodą pełne zagadnienie brzegowe, będziemy szukać sposobem, który GOLDENWEIZER zastosował w teorii powłok [6]. Przyjmijmy, że poszukiwane funkcje mają następującą budowę:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varphi &= k^i e^{kF} \Phi, \\ \mu_\nu &= k^{j_\nu} e^{kF} \Psi_\nu, \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{(nie sumować względem wskaźnika} \\ & \text{występującego w wykładniku } k!), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.2) \quad \Phi \equiv \sum_{n=0}^N k^{-n} \varphi^{(2,n)}, \quad \Psi_\nu \equiv \sum_{n=0}^N k^{-n} \mu_\nu^{(2,n)}.$$

Występujący w powyższych wzorach duży parametr k powiążemy z małym parametrem ε następującą zależnością:

$$(3.3) \quad \varepsilon^2 \equiv k^{-2/t}.$$

Zakładamy, że $2/t$ jest liczbą naturalną.

Naszym zadaniem będzie wyznaczenie funkcji F , która w teorii powłok nazywa się funkcją zmienności [3], oraz współczynników φ i μ_ν w wielomianach (3.2). Wielomiany te są nazywane funkcjami intensywności.

Podstawmy związki (3.1) i (3.2) do podstawowego układu (1.1). Otrzymujemy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & {}^i \tilde{C}^{\beta\nu} F_{,\beta} \Psi_\nu + k^{-1} ({}^i \tilde{C}^{\beta\nu} \Psi_\nu)_{,\beta} = 0, \\ & k^{-2/t+1} \{ F_{,\alpha} \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} [k^{i+2} (F_{,\nu} F_{,\mu} \Phi + k^{-1} \cdot 2F_{,\nu} \Phi_{,\mu}) + k^{-1} F_{,\nu\mu} \Phi + k^{-2} \Phi_{,\nu\mu}) - \\ & \quad - k^{j_\nu+1} (F_{,\mu} \Psi_\nu + k^{-1} \Psi_{\nu,\mu})] + k^{-1} [\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} k^{i+2} (F_{,\nu} F_{,\mu} \Phi + \\ & \quad + k^{-1} \cdot 2F_{,\nu} \Phi_{,\mu}) + k^{-1} F_{,\nu\mu} \Phi + k^{-2} \Phi_{,\nu\mu}) - \\ & \quad - \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} k^{j_\nu+1} (F_{,\mu} \Psi_\nu + k^{-1} \Psi_{\nu,\mu})]_{,\alpha} \} + {}^i \tilde{C}^{\beta\nu} k^{j_\nu} \Psi_\nu = 0. \end{aligned}$$

Aby w nawiasie klamrowym pozostały wszystkie wyrazy, musimy przy każdym z nich przyjąć te same wykładniki dużego parametru k . W tym celu przyjmujemy $j_\nu = i+1$.

Jak wynika z analizy zagadnienia brzegowego, z kolei j_ν należy przyjąć równe -2 . Ostatecznie mamy

$$(3.5) \quad j_\nu = i+1 = -2.$$

Układ (3.4) przyjmuje wtedy następującą postać:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & k^{-2(1/t-1)} \{ F_{,\alpha} \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} [F_{,\nu} F_{,\mu} \Phi + k^{-1} (2F_{,\nu} \Phi_{,\mu}) + F_{,\nu\mu} \Phi] + k^{-2} \Phi_{,\nu\mu} - \\ & - F_{,\mu} \Psi_\nu - k^{-1} \Psi_{\nu,\mu} \} + k^{-1} [\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} (F_{,\nu} F_{,\mu} \Phi + k^{-1} 2F_{,\nu} \Phi_{,\mu}) + \\ & + k^{-1} F_{,\nu\mu} \Phi + k^{-2} \Phi_{,\nu\mu}) - \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} (F_{,\mu} \Psi_\nu + k^{-1} \Psi_{\nu,\mu})],_{\alpha} \} + {}' \tilde{C}^{\beta\nu} \Psi_\nu = 0, \\ & {}' \tilde{C}^{\beta\nu} F_{,\beta} \Psi_\nu + k^{-1} ({}' \tilde{C}^{\beta\nu} \Psi_{\nu,\beta}) = 0. \end{aligned}$$

W pierwszym z powyższych równań występują dwa wyrazy, które decydują o charakterze badanego zagadnienia. W zależności od tego, jakie wartości przyjmujemy za parametr t , w równaniu można pominąć pierwszy lub drugi wyraz lub też należy obydwa zachować.

W związku z tym wyróżnimy następujące klasy zagadnień:

I. $t < 1$

Pierwsze równanie zachowuje wtedy swą budowę, natomiast dwa pozostałe przyjmują postać (po pominięciu małych wyższego rzędu)

$${}' \tilde{C}^{\beta\nu} \Psi_\nu = 0,$$

co ze względu na nieosobliwość macierzy ${}' \tilde{C}$ daje

$$(3.7) \quad \begin{matrix} (2, n) \\ \mu_\nu = 0. \end{matrix}$$

Przypadek ten odpowiada zagadnieniu anizotropii konstrukcyjnej, gdyż związek (3.7) redukuje jednocześnie tensor naprężeń siłowych $p^{\alpha\beta}$ do klasycznego symetrycznego tensora naprężeń (por. związek (1.3)).

II. $t = 1$.

W tym przypadku mamy do czynienia z pełnym układem (3.6). Zajmiemy się nim poniżej.

III. $t = 2$.

Z równań (3.6) wynika, że można wtedy w drugim przybliżeniu pominąć efekt wprowadzany przez tensor skręcenia κ_μ (w równania wchodzi on poprzez wyrażenie ${}' \tilde{C}^{\mu\nu} \mu_\nu$). Oznacza to nałożenie dodatkowych więzów na pole obrotów ν . Nie będziemy się zajmować bliżej tym przypadkiem.

Przejdziemy teraz do szczegółowej analizy zagadnienia, które otrzymuje się przyjmując $t = 1$. Układ (3.6) zachowuje wtedy wszystkie wyrazy i opisuje pełną teorię tarczy z mikrostrukturą. Napiszemy go dla uproszczenia dalszej analizy w postaci operatorowej:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} & (N^\beta + k^{-1} N^\beta + k^{-2} N^\beta + k^{-3} N^\beta) (\varphi + k^{-1} \varphi + k^{-2} \varphi + \dots) + \\ & + (M^{\beta\nu} + k^{-1} M^{\beta\nu} + k^{-2} M^{\beta\nu}) (\mu_\nu + k^{-1} \mu_\nu + k^{-2} \mu_\nu + \dots) = 0, \\ & ({}' \tilde{C}^{\beta\nu} F_{,\beta} + k^{-1} \nabla_\beta {}' \tilde{C}^{\beta\nu}) (\mu_\nu + k^{-1} \mu_\nu + k^{-2} \mu_\nu + \dots) = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 N^\beta &\equiv \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{,\alpha} F_{,\mu} F_{,\nu}, \\
 N^\beta &\equiv \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{,\alpha} (2F_{,(\nu} \nabla_{\mu)} + F_{,\nu\mu}) + \nabla_\alpha \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu}, \\
 N^\beta &\equiv \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{,\alpha} \nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\alpha \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} (2F_{,(\nu} \nabla_{\mu)} + F_{,\nu\mu}), \\
 N^\beta &\equiv \nabla_\alpha \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu, \\
 M^{\beta\nu} &\equiv -\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{,\alpha} F_{,\mu} + {}'\tilde{C}^{\beta\nu}, \\
 M^{\beta\nu} &\equiv -\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{,\alpha} \nabla_\mu - \nabla_\alpha \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} F_{,\mu}, \\
 M^{\beta\nu} &\equiv -\nabla_\alpha \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \nabla_\mu.
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Cyfra w nawiasie ponad operatorami określa ich rząd. Operator ∇_α oznacza różniczkowanie kowariantne względem zmiennej x^α całego wyrażenia, które występuje po nim w iloczynie; np. $M^{\beta\nu}{}_{,\mu\nu} = -\nabla_\alpha \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu} \nabla_\mu \mu_\nu = -(\tilde{a}^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{,\mu\nu} \mu_\nu, \mu)_\alpha$.

Przyrównując do zera pierwsze współczynniki wielomianów (3.8) otrzymujemy

$$N^\beta \varphi + M^{\beta\nu}{}_{,\mu\nu} = 0, \quad {}'\tilde{C}^{\beta\nu} F_{,\beta} \mu_\nu = 0.
 \tag{3.10}$$

Jeśli założymy, że $\varphi \neq 0$, to powyższy układ równań nie jest sprzeczny, jeśli

$$\begin{vmatrix}
 N^1 & M^{11} & M^{12} \\
 N^2 & M^{21} & M^{22} \\
 0 & {}'\tilde{C}^{\beta 1} F_{,\beta} & {}'\tilde{C}^{\beta 2} F_{,\beta}
 \end{vmatrix} = 0.
 \tag{3.11}$$

Związki (3.10) będziemy wykorzystywać w następującej postaci:

$$\mu_\nu = -(M^{-1})_{\nu\beta} N^\beta \varphi, \quad {}'\tilde{C}^{\beta\nu} (M^{-1})_{\nu\mu} N^\mu \varphi = 0,
 \tag{3.12}$$

gdzie

$$M^{\nu\beta} (M^{-1})_{\beta\mu} = \delta^\nu_\mu.$$

Równanie (3.11) pozwala wyznaczyć funkcję zmienności F . Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu, dla którego przyjmujemy warunek brzegowy [3]

$$F|_T = 0.
 \tag{3.13}$$

Przyrównanie do zera następnego współczynnika w układzie daje

$$\begin{aligned}
 N^\beta \varphi + M^{\beta\nu}{}_{,\mu\nu} &= -N^\beta \varphi - M^{\beta\nu}{}_{,\mu\nu}, \\
 {}'\tilde{C}^{\beta\nu} F_{,\beta} \mu_\nu &= -({}'\tilde{C}^{\beta\nu} \mu_\nu)_{,\beta}.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Wyznacznik główny tego układu jest zgodnie z (3.11) równy zeru. Aby układ nie był sprzeczny, musimy dodatkowo spełnić następujący warunek:

$$(3.15) \quad \begin{vmatrix} N^1 \overset{(1)}{\varphi} + M^{1\nu} \overset{(1)}{\mu}_\nu & M^{11} & M^{12} \\ N^2 \overset{(1)}{\varphi} + M^{2\nu} \overset{(1)}{\mu}_\nu & M^{21} & M^{22} \\ (\overset{(2,0)}{\tilde{C}^{\beta\nu}} \mu_\nu)_\beta & \overset{(0)}{\tilde{C}^{\beta 1}} F_{,\beta} & \overset{(0)}{\tilde{C}^{\beta 2}} F_{,\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

Wynika to z następującego twierdzenia: Jeśli w liniowym układzie równań

$$a_{ij} x^j = b_i \quad i, j = 1, \dots, n$$

spełniony jest warunek $\det a_{ij} = 0$ i co najmniej jeden z minorów rzędu $n - 1$ nie jest równy zeru, to układ powyższy nie jest sprzeczny, jeśli co najmniej jeden z minorów rzędu n (poza $\det a_{ij}$) macierzy dopełnionej jest równy zeru.

Równanie (3.15) w połączeniu z (3.12) pozwala znaleźć φ i μ_ν . Dla φ otrzymujemy

$$(3.16) \quad [F_{,\beta} (M^{21} \overset{(2,0)}{\tilde{C}^{\beta 2}} - M^{22} \overset{(2,0)}{\tilde{C}^{\beta 1}}) (N^1 - M^{1\nu} M^{-1}{}_{\nu\mu} N^\mu) - F_{,\beta} (M^{11} \overset{(0)}{\tilde{C}^{\beta 2}} - M^{12} \overset{(0)}{\tilde{C}^{\beta 1}}) (N^2 - M^{2\nu} M^{-1}{}_{\nu\mu} N^\mu) - (M^{11} M^{22} - M^{12} M^{21}) \nabla_\beta (\overset{(0)}{\tilde{C}^{\beta\nu}} M^{-1}{}_{\nu\mu} N^\mu)] \varphi = 0.$$

Otrzymane równanie pierwszego rzędu pozwala wyznaczyć φ i jednocześnie spełnić dodatkowo jeden warunek brzegowy. Współczynnik μ wyznacza się ze związku algebraicznego (3.12)₁.

Jeśli przyrównamy do zera kolejny współczynnik w układzie (3.8), to otrzymamy

$$(3.17) \quad N^\beta \overset{(0)}{\varphi} + M^{\beta\nu} \overset{(0)}{\mu}_\nu = -N^\beta \overset{(1)}{\varphi} - N^\beta \overset{(2)}{\varphi} - M^{\beta\nu} \overset{(1)}{\mu}_\nu - M^{\beta\nu} \overset{(2)}{\mu}_\nu, \\ \overset{(2,2)}{\tilde{C}^{\beta\nu}} F_{,\beta} \mu_\nu = -\overset{(2,1)}{\tilde{C}^{\beta\nu}} \mu_\nu.$$

Analogicznie jak poprzednio układ (3.17) nie jest sprzeczny, jeśli

$$(3.18) \quad \begin{vmatrix} N^\beta \overset{(1)}{\varphi} + N^\beta \overset{(2)}{\varphi} + M^{\beta\nu} \overset{(1)}{\mu}_\nu + M^{\beta\nu} \overset{(2)}{\mu}_\nu & M^{\beta\nu} \\ (\overset{(2,1)}{\tilde{C}^{\beta\nu}} \mu_\nu)_\beta & \overset{(0)}{\tilde{C}^{\beta\nu}} F_{,\beta} \end{vmatrix} = 0.$$

W połączeniu z (3.14) pozwala to znaleźć φ i μ_ν . Dla φ znów otrzymamy równanie różniczkowe pierwszego rzędu, a dla μ_ν — związek algebraiczny.

Po wykorzystaniu związków (2.1) i (3.2) otrzymujemy poszukiwane wielomiany. Ze wzoru (4.3)₁ otrzymujemy pierwsze dwa warunki brzegowe jako współczynniki przy ε w potęgach zerowej. Są one następujące:

$$(4.4) \quad n_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu} \varepsilon^{\beta\nu} \varphi_{,\nu\mu} \Big|_\Gamma = \bar{p}^\beta.$$

Wraz ze związkiem (2.3)₂ pozwalają one określić φ (wykorzystano tu związek (2.3)₁).

Następnie wzór (2.3)₅ pozwala wyznaczyć μ_α . To z kolei daje możliwość znalezienia warunku brzegowego dla φ . Otrzymujemy go z równania (4.3)₂ przyrównując do zera pierwszy współczynnik:

$$n_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta} \left(\mu_\beta + \exp \frac{F}{\varepsilon} \mu_\beta \right) \Big|_\Gamma = \bar{m}.$$

Ponieważ $F|_\Gamma = 0$, oraz zachodzi zależność (3.12)₁, więc powyższy warunek można przedstawić w postaci

$$n_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta} \left(\mu_\beta - M_{\beta\nu}^{-1} N^\nu \varphi \right) \Big|_\Gamma = \bar{m},$$

skąd ostatecznie otrzymujemy

$$(4.5) \quad \varphi \Big|_\Gamma = \frac{n_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta} \mu_\beta \Big|_\Gamma - \bar{m}}{n_\alpha \varepsilon^{\alpha\beta} M_{\beta\nu}^{-1} N^\nu \Big|_\Gamma}.$$

Warunek brzegowy (4.5) i równanie (3.17) jednoznacznie określają φ . To pozwala wyznaczyć z równania (3.12)₁ wielkość μ_ν . Następne dwa warunki brzegowe otrzymamy z (4.3)₁ dla funkcji φ . Przyrównując do zera drugi współczynnik znajdujemy:

$$(4.6) \quad n_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu} \varepsilon^{\beta\nu} \varphi_{,\nu\mu} \Big|_\Gamma = - n_\alpha \varepsilon^{\alpha\mu} \varepsilon^{\beta\nu} (F_{,\nu} F_{,\mu} \varphi - F_{,\mu} \mu_\nu) \Big|_\Gamma.$$

Prawa strona w (4.6) jest już znana, więc możemy rozwiązać zagadnienie brzegowe dla równania (2.3)₄. Mając φ możemy z (2.3)₅ znaleźć μ_ν , a z (4.3)₂ warunek brzegowy dla φ . Postępując analogicznie w dalszym ciągu znajdziemy wszystkie funkcje potrzebne do napisania rozwiązań (4.2).

5. Przykład

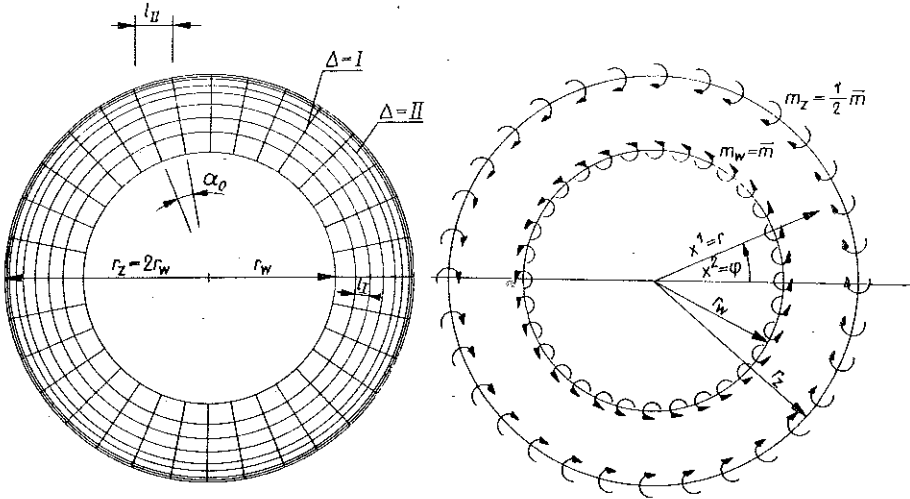
Na prostym przykładzie pokażemy tok postępowania przy wyznaczaniu współczynników w procesach iteracyjnych. Rozpatrzmy ramę pierścieniową o ortogonalnej siatce belek. Ich sztywności przyjęto za stałe i równe odpowiednio $(EA)_A$

oraz $(EJ)_\Delta$. Belki obwodowe są rozstawione w ten sposób, że zagęszczają się ze wzrostem promienia według wzoru (rys. 1)

$$(5.1) \quad l_{II} = \tilde{l}_{II} = \frac{r_w}{r} l.$$

Rozstaw belek promieniowych jest stały i wynosi a_0 . W związku z tym wykorzystywana dalej [2] wielkość l_I i odpowiednio \tilde{l}_{II} wynosi

$$(5.2) \quad l_{II} = \tilde{l}_I = a_0 r.$$



Rys. 1

Afinory sztywności, które występują we wzorach poprzednich punktów pracy mają budowę [2]

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \tilde{a}^{\alpha\beta\mu\lambda} &= -\epsilon^{\pi\alpha} \epsilon^{\rho\beta} \epsilon^{\sigma\mu} \epsilon^{\tau\nu} A_{\pi\rho\sigma\tau}^{-1}, \\ \tilde{c}^{\alpha\beta} &= -\epsilon^2 \epsilon^{\pi\alpha} \epsilon^{\rho\beta} C_{\pi\rho}^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.4) \quad \begin{aligned} A_{\pi\rho\sigma\tau}^{-1} A^{\sigma\tau\alpha\beta} &= \delta_\pi^\alpha \delta_\rho^\beta, & A^{\sigma\tau\alpha\beta} &= \sum_\Delta t_\Delta^{\sigma\alpha} (t_\Delta^{\tau\beta} R + \tilde{t}_\Delta^{\tau\beta} \tilde{R}), \\ C_{\pi\rho}^{-1} C^{\rho\mu} &= \delta_\pi^\mu, & C^{\rho\mu} &= \sum_\Delta t_\Delta^{\rho\mu} \hat{S}_\Delta, \end{aligned}$$

a wielkości R , \tilde{R} , \hat{S}_Δ są gęstościami sztywności, opisanymi zależnościami

$$(5.5) \quad \begin{aligned} R &= \frac{(EA)_\Delta}{l_\Delta}, & \tilde{R} &= \frac{12 (EJ)_\Delta}{l_\Delta^2 \tilde{l}_\Delta}, \\ \tilde{S}_\Delta &= \epsilon^2 r_w^2 \frac{12 (EJ)_\Delta}{4 a_0 r_w^2 \tilde{l}_\Delta}, & \epsilon^2 &= \frac{\max l}{\min L} = 4 a_0^2. \end{aligned}$$

We wzorach (5.4) występują poza tym dla poszczególnych rodzin belek ortonormalne bazy wektorowe (t, \tilde{t}) , które w układzie współrzędnych biegunowych mają następujące składowe: ^{4 4}

$$(5.6) \quad \|\tilde{t}_2^\alpha\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{bmatrix}, \quad \|\tilde{t}_2^\alpha\| = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po wykorzystaniu związków (5.1–5.2) oraz (5.5–5.6) otrzymujemy zależności dla afinorów sztywności w następującej postaci:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \tilde{a}^{1111} &= -\frac{r_w l}{(EA)_{II} r}, & \tilde{a}^{1212} &= -\alpha_0 \frac{r_w l}{12(EJ)_{II} r}, \\ \tilde{a}^{2121} &= -\alpha_0 \frac{r_w^2 l^2}{12(EJ)_I r^3}, & \tilde{a}^{2222} &= -\alpha_0 \frac{1}{(EA)_I r^3}, \\ \tilde{C}^{11} &= \frac{\alpha_0 r_w l}{3(EJ)_{II} r}, & \tilde{C}^{22} &= -\frac{\alpha_0^2}{3(EJ)_I r}. \end{aligned}$$

Pozostałe składowe afinorów są zerowe.

Opisaną powyżej ramę obciążymy momentami brzegowymi, jak to przedstawiono na rys. 1. Przy tym obciążeniu wszystkie funkcje opisujące zachowanie się ramy będą tylko funkcjami zmiennej $x^1 = r$.

W omawianym przypadku podstawowy układ równań rozpada się na dwie grupy, z których jedna pozwala znaleźć μ_2 , a druga φ oraz μ_1 . Mianowicie dla μ_2 otrzymujemy równanie

$$(5.8) \quad \begin{aligned} & -\varepsilon^2 \left[\tilde{a}^{1212} \frac{d^2 \mu_2}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \tilde{a}^{1212} + \frac{d\tilde{a}^{1212}}{dr} - r\tilde{a}^{2222} \right) \frac{d\mu_2}{dr} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{r} \frac{d\tilde{a}^{1212}}{dr} + \frac{1}{r^2} \tilde{a}^{1212} - \tilde{a}^{2222} \right) \mu_2 \right] + \tilde{C}^{22} \mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Natomiast φ i μ_1 będziemy wyznaczać z następującego układu:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} & \varepsilon^2 \left\{ \left[\tilde{a}^{1111} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} + \left(\frac{d\tilde{a}^{1111}}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{a}^{1111} \right) \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \tilde{a}^{2121} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \right] - \right. \\ & \left. - \left[\tilde{a}^{1111} \frac{d^2 \mu_1}{dr^2} + r\tilde{a}^{2121} \frac{d\mu_1}{dr} - \tilde{a}^{2121} \mu_1 \right] \right\} + \tilde{C}^{11} \mu_1 = 0, \\ & \tilde{C}^{11} \frac{d\mu_1}{dr} + \left(\frac{d\tilde{C}^{11}}{dr} + \frac{1}{r} \tilde{C}^{11} \right) \mu_1 = 0. \end{aligned}$$

Po podstawieniu do powyższych równań rozwiązań z pierwszego procesu iteracyjnego oraz afinorów sztywności (5.7) otrzymamy następujące związki dla μ_1 i φ :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^{(1,i)}\mu_1}{dr} + \frac{\mu_1^{(1,i)}}{r} = 0 \quad i = 0, 1, \dots, \\
 (5.10) \quad & \frac{d^{(1,0)}\varphi}{dr^3} - \frac{(EA)_{II} a_0 r_w l}{12(EJ)_I} \frac{1}{r^2} \frac{d^{(1,0)}\varphi}{dr} + \frac{(EA)_{II} a_0}{3(EJ)_{II}} \mu_1^{(1,2)} = 0, \\
 & \frac{d^{(1,1)}\varphi}{dr^3} - \frac{(EA)_{II} a_0 r_w l}{12(EJ)_I} \frac{1}{r^2} \frac{d^{(1,1)}\varphi}{dr} + \frac{(EA)_{II} a_0}{3(EJ)_{II}} \mu_1^{(1,3)} = 0, \\
 & \frac{d^{(1,i)}\varphi}{dr^3} - \frac{(EA)_{II} a_0 r_w l}{12(EJ)_I} \frac{1}{r^2} \frac{d^{(1,i)}\varphi}{dr} + \frac{(EA)_{II} a_0}{3(EJ)_{II}} \mu_1^{(1,i+2)} - \\
 & - \left[\frac{d^{(1,i)}\mu_1}{dr^2} + \frac{(EA)_{II} a_0 r_w l}{12(EJ)_I} \frac{1}{r} \frac{d^{(1,i)}\mu_1}{dr} - \frac{(EA)_{II} a_0 r_w l}{12(EJ)_I} \frac{1}{r^2} \mu_1^{(1,i)} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Nim sformułujemy zagadnienie brzegowe dla powyższych równań, przedstawimy drugi proces iteracyjny. Rozwiązania zgodnie z rozważaniami p. 3 przedstawimy w postaci

$$(5.11) \quad \varphi = \varepsilon^3 \exp \frac{F}{\varepsilon} \Phi, \quad \mu_\nu = \varepsilon^2 \exp \frac{F}{\varepsilon} \Psi_\nu,$$

gdzie

$$(5.12) \quad \Phi = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \varphi^{(2,n)}, \quad \Psi_\nu = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \mu_\nu^{(2,n)}.$$

Po podstawieniu powyższych związków do wzorów (5.8–5.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{a}^{1212} \left(\frac{dF}{dr} \right)^2 + \tilde{C}^{22} = 0, \\
 (5.13) \quad & \frac{d^{(2,0)}\mu_2}{dr} + \frac{\tilde{a}^{1212} \frac{d^2 F}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \tilde{a}^{1212} + \frac{d\tilde{a}^{1212}}{dr} - r\tilde{a}^{2222} \right) \frac{dF}{dr}}{2\tilde{a}^{1212} \frac{dF}{dr}} \mu_2^{(2,0)} = 0, \\
 & \frac{d^{(2,i)}\mu_2}{dr^2} + \frac{\tilde{a}^{1212} \frac{d^2 F}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \tilde{a}^{1212} + \frac{d\tilde{a}^{1212}}{dr} - r\tilde{a}^{2222} \right) \frac{dF}{dr}}{2\tilde{a}^{1212} \frac{dF}{dr}} \mu_2^{(2,i)} = \\
 & = - \frac{1}{2} \frac{dF}{dr} \frac{d^{(2,i-1)}\mu_2}{dr^2} - \frac{1}{2\tilde{a}^{1212} \frac{dF}{dr}} \left[\left(\frac{1}{r} \tilde{a}^{1212} + \frac{d\tilde{a}^{1212}}{dr} - r\tilde{a}^{2222} \right) \frac{d\mu_2^{(2,i-1)}}{dr} - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{1}{r} \frac{d\tilde{a}^{1212}}{dr} + \frac{1}{r^2} \tilde{a}^{1212} - \tilde{a}^{2222} \right) \mu_2^{(2,i-1)} \right], \quad i = 2, \dots, N,
 \end{aligned}$$

oraz

$$(5.14) \quad \begin{matrix} (2, i) \\ \mu_1 = 0, \end{matrix} \quad \begin{matrix} (2, i) \\ \varphi = 0, \end{matrix} \quad i = 0, \dots, N.$$

Związek (5.13)_I jest odpowiednikiem zależności (3.11), w której w naszym przypadku należy podstawić $N^2 = 0$, $M^{21} = 0$ oraz $\tilde{C}^{21} = 0$, a szukany związek otrzyma się z równania $M^{22} = 0$. Wyznamy z niego funkcję zmienności F . Będzie ona miała inną postać dla zewnętrznego i wewnętrznego brzegu i dlatego należy wprowadzić dwie funkcje warstwy brzegowej. Po podstawieniu odpowiednich składowych afinorów sztywności otrzymujemy ze wzoru (5.13)_I następujące równanie:

$$(5.15) \quad \left(\frac{dF}{dr} \right)^2 = \frac{4\alpha_0}{r_w l} \frac{(EJ)_I}{(EJ)_{II}},$$

skąd mamy

$$(5.16) \quad F = \pm r \sqrt{\frac{4\alpha_0}{r_w l} \frac{(EJ)_I}{(EJ)_{II}}} + b,$$

gdzie b jest dowolną stałą.

Z warunku (3.13) mamy

$$(5.17) \quad F|_{r=r_z} = 0, \quad F|_{r=r_w} = 0.$$

Jednocześnie zakładamy, że istnieje efekt brzegowy i tym samym wykładnik w rozkładach (5.11) musi być ujemny. Dla brzegu zewnętrznego otrzymujemy wtedy następującą funkcję zmienności:

$$(5.18) \quad F_z = -(r_z - r) \sqrt{\frac{4\alpha_0}{r_w l} \frac{(EJ)_I}{(EJ)_{II}}} = -\frac{(r_z - r)}{r_w} \sqrt{\frac{4\alpha_0 r_w}{l} \frac{(EJ)_I}{(EJ)_{II}}}.$$

Dla brzegu wewnętrznego funkcja F przyjmuje postać

$$(5.19) \quad F_w = -(r - r_w) \sqrt{\frac{4\alpha_0}{r_w l} \frac{(EJ)_I}{(EJ)_{II}}} = -\frac{(r - r_w)}{r_w} \sqrt{\frac{4\alpha_0 r_w}{l} \frac{(EJ)_I}{(EJ)_{II}}}.$$

Przejdziemy obecnie do podstawienia i rozwiązania zagadnienia brzegowego. Ze względu na antysymetrię zagadnienia muszą zniknąć naprężenia momentowe m^2 , a tym samym znika μ_1 . Ponieważ zachodzi wzór (5.14)_I, więc z powyższego stwierdzenia wynika

$$(5.20) \quad \begin{matrix} (1, i) \\ \mu_1 = 0, \end{matrix} \quad i = 0, \dots, N.$$

Tak więc dla φ ($i = 0, \dots, N$) otrzymujemy ze związków (5.10) równania jednorodne o rozwiązaniu

$$(5.21) \quad \begin{matrix} (1, i) \\ \varphi = D_1^{(i)} \left[\exp \frac{1}{2} \left(3 + \sqrt{1 + \frac{(EA)_{II} \alpha_0 r_w l}{3 (EJ)_I}} \right) \right]^{\ln r} + \\ + D_2^{(i)} \left[\exp \frac{1}{2} \left(3 - \sqrt{1 + \frac{(EA)_{II} \alpha_0 r_w l}{3 (EJ)_I}} \right) \right]^{\ln r} + D_3^{(i)}, \quad i = 0, \dots, N. \end{matrix}$$

Należy zaznaczyć, że stałe $D_3^{(i)}$ nie są istotne dla rozwiązania, gdyż nie występują one we wzorach na naprężenia.

Warunki brzegowe dla funkcji (5.21) otrzymamy ze wzorów (4.1)₁. Będą one następujące:

$$(5.22) \quad \left[\frac{d\varphi}{dr} \right]_{r=r_w}^{(1,i)} = 0, \quad \left[\frac{d\varphi}{dr} \right]_{r=r_z}^{(1,i)} = 0.$$

Warunki (5.22) prowadzą do trywialnego rozwiązania dla φ (o ile nie nastąpi utrata stateczności, czym tutaj nie będziemy się zajmować).

Pozostała do określenia funkcja μ_2 . Równanie (5.13) po wykorzystaniu wzorów (5.7) i (5.18–5.19) ma postać

$$(5.23) \quad \frac{d\mu_2}{dr} - \lambda_1 \frac{1}{r} \mu_2 = \pm \frac{r_w}{\lambda_2} \left[-\frac{1}{2} \frac{d^2\mu_2}{dr^2} + \lambda_1 \frac{1}{r} \left(\frac{d\mu_2}{dr} - \frac{1}{r} \mu_2 \right) \right],$$

gdzie

$$(5.24) \quad \lambda_1 \equiv \frac{6(EJ)_{II}}{r_w l(EA)_I}, \quad \lambda_2 \equiv \left| \sqrt{\frac{4\alpha_0 r_w (EJ)_I}{l (EJ)_{II}}} \right|.$$

Znak górny z prawej strony równania bierzemy dla efektu brzegowego w otoczeniu $r = r_z$, a dolny – w otoczeniu brzegu $r = r_w$.

Warunki brzegowe dla równań (5.23) otrzymamy z (4.1)₂. Mają one postać:

$$(5.25) \quad \left[\mu_2 \right]_{r=r_z} = \frac{1}{2} r_z \bar{m} = r_w \bar{m}, \quad \left[\mu_2 \right]_{r=r_w} = r_w \bar{m}.$$

Po podstawieniu związku (5.11)₂ otrzymujemy

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \left[\mu_2 \right]_{r=r_z}^{(2,0)} &= \frac{r_w \bar{m}}{\varepsilon^2}, & \left[\mu_2 \right]_{r=r_z}^{(2,i)} &= 0, & i &= 1, \dots, N, \\ \left[\mu_2 \right]_{r=r_w}^{(2,0)} &= \frac{r_w \bar{m}}{\varepsilon^2}, & \left[\mu_2 \right]_{r=r_w}^{(2,i)} &= 0, & i &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe warunki do rozwiązań równań (5.23) mamy ostatecznie:

$$(5.27) \quad \begin{aligned} \varphi &= 0, & \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \bar{m} r_w \left(\frac{r}{2r_w} \right)^{\lambda_1} \left\{ 1 + \varepsilon \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - 1)}{2\lambda_2} \left(\frac{1}{2} - \frac{r_w}{r} \right) + \varepsilon^2 \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - 1)}{8\lambda_2} \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{\lambda_1 (\lambda_1 - 1)}{\lambda_2} \left(\frac{1}{2} - \frac{r_w}{r} \right) + \frac{(\lambda_1 + 1) (\lambda_1 - 2)}{2\lambda_2} \left(\frac{1}{2} - \frac{r_w}{r} \right) \right] + \dots \left. \right\} \times \\ &\quad \times \exp \left[- \left(2 - \frac{r}{r_w} \right) \frac{\lambda_2}{\varepsilon} \right] + \bar{m} r_w \left(\frac{r}{r_w} \right)^{\lambda_1} \left\{ 1 - \varepsilon \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - 1)}{2\lambda_2} \left(1 - \frac{r_w}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \frac{\lambda_1 (\lambda_1 - 1)}{4\lambda_2} \left[\frac{\lambda_1 (\lambda_1 - 1)}{\lambda_2} \left(1 - \frac{r_w}{r} \right) - \frac{(\lambda_1 + 1) (\lambda_1 - 2)}{2\lambda_2} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(1 - \frac{r_w}{r} \right) \right] - \dots \right\} \exp \left[- \left(\frac{r}{r_w} - 1 \right) \frac{\lambda_2}{\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

Łatwo dostrzec, że zarówno w pobliżu zewnętrznego jak i wewnętrznego brzegu μ_2 ma charakter efektu brzegowego. Mianowicie ze związków (5.24) wynika, że wielkość λ_1 przy gęstej siatce jest co najwyżej rzędu ε (gdy wymiary poprzecznych przekrojów belek są tego samego rzędu, co wymiary otworów siatki. Omówiony przykład dotyczy jednak siatki prętowej, a więc wielkość λ_1 jest mniejsza). Natomiast wielkość λ_2 jest rzędu jedności. W pobliżu $r = r_z$ mamy więc zależność

$$(5.28) \quad \mu_2 \approx \bar{m}r_w \exp \left[- \left(2 - \frac{r}{r_w} \right) \frac{\lambda_2}{\varepsilon} \right],$$

a w pobliżu $r = r_w$

$$(5.29) \quad \mu_2 \approx \bar{m}r_w \exp \left[- \left(\frac{r}{r_w} - 1 \right) \frac{\lambda_2}{\varepsilon} \right].$$

Funkcje (5.28) i (5.29) bardzo szybko maleją przy oddalaniu się od brzegu, jeśli ε jest, zgodnie z założeniem, małym parametrem.

6. Zakończenie

Przedstawiona w pracy metoda rozwiązania równań tarczy z mikrostrukturą pozwala w oparciu o rozkład asymptotyczny wykorzystać szereg istniejących rozwiązań w zakresie tarcz anizotropowych. Unika się jednocześnie bardzo kłopotliwego rozwiązywania układu równań różniczkowych, gdyż zarówno pierwszy jak i drugi proces iteracyjny prowadzą do różniczkowych równań rekurencyjnych, rozwikłanych zarówno w zakresie operatorów różniczkowych, jak i warunków brzegowych. Wydaje się jednak, że drugi proces iteracyjny stałby się bardziej pogładowy przez wprowadzenie układu współrzędnych, którego pewne linie parametryczne pokrywają się z brzegiem Γ . Można wtedy zaobserwować szybkość zanikania efektu brzegowego. Dodatkową trudność stanowi znalezienie rozwiązań układu różniczkowych równań zwyczajnych, który się wtedy otrzymuje. Z tego powodu w praktycznych zastosowaniach bardziej celowa jest chyba metoda, przedstawiona w powyższej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. CZ WOŹNIAK, *Efekt brzegowy w tarczach o strukturze siatkowej*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Tech., in print.
2. CZ WOŹNIAK, *Dźwigary o strukturze siatkowej. Zagadnienie płaskie*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966).
3. А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Москва 1953.
4. К. Ф. Черных, *Линейная теория оболочек*, ч. II, Изд. Ленинградского Университета, 1964.
5. А. Л. Гольденвейзер, *Некоторые математические проблемы линейной теории упругих тонких оболочек*, УМН, вып. 5 (95), 25 (1960).
6. А. С. Григорьев, А. Л. Гольденвейзер, *Современные проблемы теории оболочек*, Варшава 1964.
7. K. WILMAŃSKI, *O pewnych własnościach metody asymptotycznej, zastosowanej do płaskiego ciała z mikrostrukturą* (w przygotowaniu).
8. K. WILMAŃSKI, *O pewnym włóknistym modelu gęstego rusztu*, Rozpr. Inżyn., 1, 14 (1966), 127-134.

Резюме

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
С МИКРОСТРУКТУРОЙ. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

В работе обсуждается применение асимптотических методов к системе уравнений, описывающих плоское тело с микроструктурой. Использовалось свойство этой среды, которое вызывает появление малого параметра при дифференциальных операторах самого высшего порядка. Решения представлены в виде суммы функций, соответствующим двум итерационным процессам. Этот метод в обоих процессах применен по примеру работ Гольденвейзера, где используется его в теории оболочек.

В заключение дается пример, в котором этот метод применялся к волокнистой среде. В описанной задаче волокнистая среда является сплошной моделью полярного ростерка.

Summary

ASYMPTOTIC METHODS IN THE THEORY OF A BODY
WITH MICROSTRUCTURE. THE PLANE PROBLEM

This paper is devoted to the application of asymptotic methods to the set of equations describing a plane body with microstructure. The property of this body consisting in the presence of a small parameter at the differential operators of the highest order is made use of. The solution is represented in the form of a sum of functions from two iteration processes. The procedure is based on the works of Goldenweiser in which the present method is applied in the theory of shells. The paper ends by an example in which the method is applied to a fibrous medium, which is a continuous model of a polar grate.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 listopada 1966 r.
