

WARSTWA SPRĘŻYSTA POD DZIAŁANIEM MOMENTU SKUPIONEGO

ROMUALD ŚWITKA (POZNAŃ)

1. Wstęp

W pracy zostanie rozpatrzona izotropowa nieograniczona warstwa sprężysta o grubości H . Brzeg górny warstwy jest wolny od naprężeń, brzeg dolny jest przytwierdzony do nieodkształcalnego podłoża. W punkcie $(r = 0, z = \zeta)$ walcowego układu współrzędnych i w płaszczyźnie równoległej do brzegów działa lewoskrętny moment skupiony M . Wszystkie dane przedstawia rys. 1. Dla tak sformułowanego problemu wyznaczmy składowe stanu przemieszczenia i naprężenia.

Zaznaczmy, że stan przemieszczenia i naprężenia jest osiowo-symetryczny. Jediną różną od zera składową stanu przemieszczenia jest u_θ ($u_r = u_z = 0$), którą oznaczmy krótko przez $u = u(r, z)$. Stan naprężenia określają dwie składowe:

$\sigma_{z\theta} = \sigma_{z\theta}(r, z)$ i $\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}(r, z)$; pozostałe składowe stanu naprężenia są równe zeru. Wobec tego warunki równowagi wewnętrznej sprowadzają się do jednego równania

$$(1.1) \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0,$$

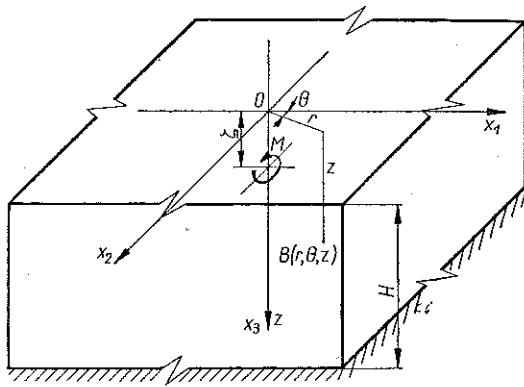
a związki geometryczne mają postać

$$(1.2) \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}.$$

Podstawiając (1.2) do (1.1) otrzymuje się równanie

$$(1.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

które musi spełniać jedyna różna od zera składowa stanu przemieszczenia.



Rys. 1

Rozwiązanie zadania będzie się składało z dwóch części: 1) osobliwej, odpowiadającej działaniu momentu skupionego na nieograniczoną przestrzeń sprężystą; 2) regularnej, którą tak dobierzemy, aby spełnić warunki brzegowe zadania. Przez $u'(r, z)$ oznaczymy część osobliwą rozwiązania, a część regularną oznaczymy przez $u''(r, z)$. Będzie więc

$$(1.4) \quad u(r, z) = u'(r, z) + u''(r, z).$$

Funkcja $u(r, z)$ musi spełniać następujące warunki brzegowe:

$$(1.5) \quad u(r, H) = 0, \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial z} = 0.$$

2. Część osobliwa rozwiązania

Weźmy pod uwagę nieograniczoną przestrzeń sprężystą. Niech w początku układu współrzędnych i w płaszczyźnie $x_1 O x_2$ działa moment skupiony M . Oznaczmy przez $u_i^{(\alpha)}$ współrzędne wektora przemieszczenia odpowiadającego działaniu jednostkowej siły skupionej zaczepionej w początku układu współrzędnych i skierowanej zgodnie z dodatnim kierunkiem osi x_α . Funkcje $u_i^{(\alpha)}$ odpowiadają więc zagadnieniu Kelvina:

$$(2.1) \quad u_i^{(\alpha)} = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left(\frac{x_i x_\alpha}{R^3} + \delta_{i\alpha} \frac{3-4\nu}{R} \right),$$

$$R = (x_k x_k)^{1/2}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie $\delta_{i\alpha}$ jest symbolem Kroneckera.

Współrzędne wektora przemieszczenia, odpowiadającego działaniu momentu skupionego w przestrzeni sprężystej, otrzymamy wykonując na funkcjach (2.1) operację określoną wzorem

$$(2.2) \quad u_i = \frac{M}{2} (u_{,1}^{(2)} - u_{,2}^{(1)}).$$

W wyniku otrzymuje się

$$(2.3) \quad u_i = \frac{M}{8\pi G} (\delta_{i1} x_2 - \delta_{i2} x_1)$$

lub po przejściu do układu współrzędnych walcowych ($u_0 = u, u_r = u_z = 0$):

$$(2.4) \quad u = -\frac{M}{8\pi G} r (r^2 + z^2)^{-3/2}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad z = x_3.$$

Wobec tego część osobliwa rozwiązania, odpowiadająca działaniu momentu skupionego w punkcie ($r = 0, z = \zeta$) przestrzeni sprężystej, ma postać

$$(2.5) \quad u'(r, z) = -\frac{M}{8\pi G} r [r^2 + (z - \zeta)^2]^{-3/2}.$$

Łatwo można sprawdzić, że funkcja (2.4) spełnia równanie (1.3).

3. Część regularna rozwiązania

Część regularna rozwiązania musi również spełniać równanie (1.3). Wobec tego

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2 u''}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u''}{\partial r} - \frac{u''}{r^2} + \frac{\partial^2 u''}{\partial z^2} = 0.$$

Niech

$$\tilde{u}''(\varrho, z) = \int_0^{\infty} u''(r, z) J_1(r\varrho) r dr$$

będzie transformatą Hankela funkcji $u''(r, z)$. $J_1(r\varrho)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju, rzędu pierwszego. Wykonując na równaniu (3.1) transformację Hankela otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne

$$(3.2) \quad \frac{d^2 \tilde{u}''}{dz^2} - \varrho^2 \tilde{u}'' = 0,$$

którego rozwiązanie jest funkcją

$$(3.3) \quad \tilde{u}''(\varrho, z) = A(\varrho) e^{-\varrho z} + B(\varrho) e^{\varrho z}.$$

Wykonajmy z kolei transformację na równaniach brzegowych (1.5):

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(\varrho, H) &= \tilde{u}'(\varrho, H) + \tilde{u}''(\varrho, H) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}(\varrho, 0) &= \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial z}(\varrho, 0) + \frac{\partial \tilde{u}''}{\partial z}(\varrho, 0) = 0, \end{aligned}$$

i posługując się tablicami [1] wyznaczmy transformaty Hankela wyrażeń występujących w równaniach (3.4), odnoszących się do części osobliwej rozwiązania:

$$\begin{aligned} \tilde{u}'(\varrho, H) &= -\frac{M}{8\pi G} \int_0^{\infty} r^2 [r^2 + (H - \zeta)^2]^{-3/2} J_1(r\varrho) dr = -\frac{M}{8\pi G} e^{-\varrho(H-\zeta)}, \\ \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial z}(\varrho, 0) &= -\frac{3M}{8\pi G} \zeta \int_0^{\infty} r^2 (r^2 + \zeta^2)^{-5/2} J_1(r\varrho) dr = -\frac{M}{8\pi G} \varrho e^{-\varrho \zeta}. \end{aligned}$$

Uwzględniając ponadto w (3.4) rozwiązanie (3.3) otrzymuje się układ równań

$$(3.5) \quad \begin{aligned} A(\varrho) e^{-\varrho H} + B(\varrho) e^{\varrho H} &= \frac{M}{8\pi G} e^{-\varrho(H-\zeta)}, \\ -A(\varrho) + B(\varrho) &= \frac{M}{8\pi G} e^{-\varrho \zeta}, \end{aligned}$$

skąd obliczamy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} A(\varrho) &= -\frac{M}{8\pi G} \operatorname{sh} \varrho(H - \zeta) \operatorname{sech} \varrho H, \\ B(\varrho) &= \frac{M}{8\pi G} e^{-\varrho H} \operatorname{ch} \varrho \zeta \operatorname{sech} \varrho H \end{aligned}$$

i wobec tego

$$(3.7) \quad \tilde{u}''(\varrho, z) = -\frac{M}{8\pi G} [\operatorname{sh} \varrho (H - \zeta) \operatorname{sech} \varrho H e^{-\varrho z} - \operatorname{ch} \varrho \zeta \operatorname{sech} \varrho H e^{-\varrho(H-z)}].$$

Wykonanie transformacji odwrotnej daje wynik w postaci następującej:

$$(3.8) \quad u''(r, z) = -\frac{M}{8\pi G} \left[\int_0^{\infty} \operatorname{sh} \varrho (H - \zeta) \operatorname{sech} \varrho H e^{-\varrho z} J_1(\varrho r) \varrho d\varrho - \int_0^{\infty} \operatorname{ch} \varrho \zeta \operatorname{sech} \varrho H e^{-\varrho(H-z)} J_1(\varrho r) \varrho d\varrho \right].$$

Otrzymana postać rozwiązania nie jest dogodna dla obliczeń numerycznych. Dlatego wyrażenie podcałkowe przekształcimy, rozwijając funkcję $\operatorname{sech} \varrho H$ w szereg [2]:

$$(3.9) \quad \operatorname{sech} \varrho H = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)\varrho H}.$$

Uwzględniając (3.9) w rozwiązaniu (3.8) otrzymamy

$$u''(r, z) = -\frac{M}{4\pi G} \left[\int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\varrho[(2k+1)H+z]} \operatorname{sh} \varrho (H - \zeta) J_1(\varrho r) \varrho d\varrho - \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-\varrho[2(k+1)H-z]} \operatorname{ch} \varrho \zeta J_1(\varrho r) \varrho d\varrho \right].$$

Szeregi pod znakiem całki są zbieżne jednostajnie w przedziale $[0, \infty)$. Zatem można je całkować wyraz za wyrazem:

$$u''(r, z) = -\frac{M}{8\pi G} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\int_0^{\infty} e^{-\varrho(2kH+z+\zeta)} J_1(\varrho r) \varrho d\varrho - \int_0^{\infty} e^{-\varrho[2(k+1)H+z-\zeta]} J_1(\varrho r) \varrho d\varrho - \int_0^{\infty} e^{-\varrho[2(k+1)H-z-\zeta]} J_1(\varrho r) \varrho d\varrho - \int_0^{\infty} e^{-\varrho[2(k+1)H-z+\zeta]} J_1(\varrho r) \varrho d\varrho \right].$$

Otrzymane w ten sposób całki są znane [1] i wynik możemy ostatecznie zapisać w postaci szeregu:

$$(3.10) \quad u''(r, z) = -\frac{M}{8\pi G} r \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \{ [r^2 + (2kH+z+\zeta)^2]^{-3/2} - [r^2 + (2(k+1)H+z-\zeta)^2]^{-3/2} - [r^2 + (2(k+1)H-z-\zeta)^2]^{-3/2} - [r^2 + (2(k+1)H-z+\zeta)^2]^{-3/2} \}.$$

4. Zestawienie rozwiązań

Dodając część osobliwą (2.5) i regularną (3.10) rozwiązania, po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych

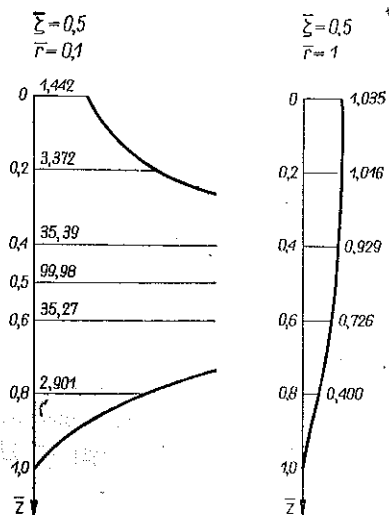
$$(4.1) \quad \bar{r} = \frac{r}{H}, \quad \bar{z} = \frac{z}{H}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{H},$$

otrzymujemy wynik końcowy w postaci następującej:

$$(4.2) \quad u(r, z) = -\frac{M}{8\pi G} \frac{\bar{r}}{H^2} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\bar{r}^2 + (2k + \bar{z} + \bar{\zeta})^2]^{-3/2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\bar{r}^2 + (2k + \bar{z} - \bar{\zeta})^2]^{-3/2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\bar{r}^2 + (2k - \bar{z} - \bar{\zeta})^2]^{-3/2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\bar{r}^2 + (2k - \bar{z} + \bar{\zeta})^2]^{-3/2} \right\}, \\ \sigma_{z\theta}(r, z) = \frac{3M}{8\pi} \frac{\bar{r}}{H^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k + \bar{z} + \bar{\zeta}) [\bar{r}^2 + (2k + \bar{z} + \bar{\zeta})^2]^{-5/2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k + \bar{z} - \bar{\zeta}) [\bar{r}^2 + (2k + \bar{z} - \bar{\zeta})^2]^{-5/2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (2k - \bar{z} - \bar{\zeta}) [\bar{r}^2 + (2k - \bar{z} - \bar{\zeta})^2]^{-5/2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (2k - \bar{z} + \bar{\zeta}) [\bar{r}^2 + (2k - \bar{z} + \bar{\zeta})^2]^{-5/2} \right\}, \\ \sigma_{r\theta}(r, z) = \frac{3M}{8\pi} \frac{\bar{r}^2}{H^3} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\bar{r}^2 + (2k + \bar{z} + \bar{\zeta})^2]^{-5/2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [\bar{r}^2 + (2k + \bar{z} - \bar{\zeta})^2]^{-5/2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\bar{r}^2 + (2k - \bar{z} - \bar{\zeta})^2]^{-5/2} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\bar{r}^2 + (2k - \bar{z} + \bar{\zeta})^2]^{-5/2} \right\}.$$

W powyższych wzorach część osobliwa rozwiązania została włączona pod znak sumy.

Łatwo można sprawdzić, że dla $\bar{z} = 0$ poszczególne szeregi wyrażające $\sigma_{z\theta}$ redukują się wzajemnie i otrzymuje się dokładnie $\sigma_{z\theta}(r, 0) = 0$. W podobny sposób dla $\bar{z} = 1$ otrzymuje się $u(r, H) = 0$. Wynik (4.2) spełnia więc w sposób ścisły warunki brzegowe.



Rys. 2

Na rysunku 2 dane są wykresy przemieszczeń obwodowych u dla $\bar{r} = 0, 1$ i $\bar{r} = 1$. Wartości (bezwymiarowe) z wykresów należy mnożyć przez $-M/8\pi GH^2$. W obliczeniach uwzględniono sześć pierwszych wyrazów każdego szeregu. Warto zaznaczyć, że naprężenia wyrażają się przez szeregi znacznie szybciej zbieżne.

Literatura cytowana w tekście

1. H. BATEMAN, *Tables of Integral Transforms*, Mc Graw-Hill Book Comp., New York-Toronto-London 1954.
2. И. М. РЫЖИК, И. С. ГРАДШТЕЙН, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Гос. Издат. Техничко-Теорет. Лит., Москва-Ленинград 1951.

Резюме

УПРУГИЙ СЛОЙ ПОД ВЛИЯНИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОГО МОМЕНТА

В работе рассматривается поле перемещений и напряженное состояние в упругом слое, вызванное действием сосредоточенного момента. Верхняя плоскость, ограничивающая слой — свободна от напряжений, нижняя же закреплена. Сосредоточенный момент действует в произвольной плоскости, параллельной краям слоя. Применяется интегральное преобразование Ганкеля. Заключительный результат дается в виде ряда, которому точно удовлетворяют краевые условия.

Summary

AN ELASTIC SLAB UNDER THE ACTION OF A CONCENTRATED MOMENT

The subject of the considerations is the state of displacement and stress in an elastic slab produced by a concentrated moment. The upper boundary plane of the slab is free from load, the lower one being fixed. The concentrated moment acts at any level. The result, obtained by applying the Hankel transformation, is represented in the form of a series satisfying the boundary conditions in an accurate manner.

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 czerwca 1966 r.