ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 15 (1967)

ZAGADNIENIE ROZCHODZENIA SIĘ FAL W NIEOGRANICZONYM OŚRODKU LEPKOSPRĘŻYSTYM PRZY UWZGLĘDNIENIU SPRZĘŻENIA TERMOMECHANICZNEGO

JAROSŁAW STEFANIAK (POZNAŃ)

Wstęp

Nowsze wyniki badań nad rozchodzeniem się fal w ośrodkach lepkosprężystych liniowych w przypadku izotermicznym zebrane są w kilku monografiach [np. 1, 2 i 3]. Innym zagadnieniem jest rozchodzenie się fal w nieograniczonym ośrodku sprężystym przy uwzględnieniu sprzężenia termomechanicznego. Problem ten opracowali szczegółowo P. CHADWICK i I. N. SNEDDON [4]. Autorzy ci badali prędkość rozchodzenia się fal i współczynnik tłumienia w zależności od częstości drgań.

Praca niniejsza stanowi próbę połączenia obydwu zagadnień, tzn. uwzględnienia sprzężenia termomechanicznego w przypadku ciał lepkosprężystych. Podobnym problemem zajmował się również S. C. HUNTER [5]. Rozpatrywał on falę płaską w nieograniczonym ośrodku i podał przybliżone wartości na prędkość rozchodzenia się fali oraz na współczynnik tłumienia dla modeli ciał lepkosprężystych o stałym module ściśliwości w przypadku małej częstości drgań. W niniejszej pracy podaje się ścisłe wzory na prędkość fali c i współczynnik tłumienia δ w zależności od częstości ω dla modeli Kelvina-Voigta i Maxwella. Następnie bada się te wielkości w przypadku, gdy $\varrho_0 \to 0$ i $\varrho_0 \to \infty$, gdzie ϱ_0 jest wielkością bezwymiarową związaną z częstością ω (taką samą jak wprowadzona przez P. CHADWICKA i I. N. SNEDDONA w pracy [4]). Ponadto rozpatruje się przedstawienia asymptotyczne dla c i δ przy ϱ_0 bardzo dużych i ϱ_0 bardzo małych.

1. Podstawowe związki i równania

Ruch ośrodka odkształcalnego opisany jest jak wiadomo układem równań

$$\sigma_{ij,j}+X_i = \gamma \ddot{u}_i, \tag{1.1}$$

gdzie symbol σ_{ij} oznacza składowe stanu naprężenia, X_i składowe sił masowych, u_i składowe wektora przemieszczeń oraz γ gęstość. Ponadto w ramach liniowej teorii spełnione są związki geometryczne

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}), \tag{1.2}$$

gdzie ε_{ij} oznacza składowe stanu odkształcenia.

Jeśli rozpatrujemy zagadnienie w liniowej teorii ciał lepkosprężystych, to związki między naprężeniami i odkształceniami można przyjąć w postaci [6]

$$P_1(D)\, s_{ij} = P_2(D)\, e_{ij}, \qquad P_3(D)\, \sigma_{ii} = P_4(D)\,(\varepsilon_{ii} - 3\alpha_t\, \theta).$$

Równania te można przekształcić do postaci

$$\begin{aligned}(1.3)\quad P_1(D)\,P_3(D)\,\sigma_{ij} &= P_2(D)\,P_3(D)\,\varepsilon_{ij}+\\ &+\delta_{ij}\left\{\frac{1}{3}\,[P_1(D)\,P_4(D) - P_2(D)\,P_3(D)]\,e - P_1(D)\,P_4(D)\,\alpha_t\theta\right\}.\end{aligned}$$

Przyjęto tu oznaczenia

$$P_i(D) = \sum_{k=0}^{N_i} {}^i a_k D^k, \qquad D = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}, \qquad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\,\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}, \qquad \theta = T - T_0, \qquad e = \varepsilon_{ii}.$$

Ponadto $T = T(x_r, t)$ oznacza temperaturę bezwzględną ciała, $T_0 = T_0(x_r)$ temperaturę ciała w stanie naturalnym (beznaprężeniowym), δ_{ij} deltę Kronneckera oraz α_t współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej.

Łatwo zauważyć, że gdy w operatorach $P_i(D)$ przyjąć

$$\begin{aligned}&{}^1a_0 = 1, \quad {}^2a_0 = 2G, \quad {}^3a_0 = 1, \quad {}^4a_0 = 3K,\\ &{}^ia_k = 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, \ldots, \max N_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,\end{aligned}$$

to związki (1.3) dadzą zależności między naprężeniami i odkształceniami dla ciał sprężystych.

Aby określić stan ciała, trzeba równania (1.1)–(1.3) uzupełnić równaniem przewodnictwa ciepła. Równanie to można wyprowadzić kilkoma sposobami (np. [5, 7 i 8]). Przy przyjęciu szeregu założeń upraszczających metoda podana w pracy [8] pozwala napisać to równanie w postaci

$$(1.4)\qquad k'\,\theta_{,kk} - c'\gamma\dot{\theta} = -W - T_0\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\theta}\,\dot{\varepsilon}_{ij},$$

gdzie k' oznacza współczynnik przewodnictwa cieplnego, c' ciepło właściwe przy stałym odkształceniu, W wydajność źródła ciepła. Dla interesujących nas modeli (Kelvina-Voigta i Maxwella) zachodzi związek

$$aP_3(D) = P_4(D),$$

gdzie $a = \text{const}$. Wówczas równanie (1.4) przyjmie postać

$$(1.5)\qquad k'\,\theta_{,kk} - c'\gamma\dot{\theta} = -W + a\alpha_t T_0\,\dot{e}.$$

Równania (1.1)–(1.3) można przy pominięciu działania sił masowych doprowadzić do równań przemieszczeniowych

$$\begin{aligned}(1.6)\quad P_2(D)\,P_3(D)\,u_{i,kk} + \frac{1}{3}\,[2P_4(D)\,P_1(D) + P_2(D)\,P_3(D)]\,e_{,i} &=\\ = 2P_4(D)\,P_1(D)\,\alpha_t\,\theta_{,i} + P_1(D)\,P_3(D)\,\gamma\ddot{u}_i&.\end{aligned}$$

Układ czterech równań (1.5) i (1.6) pozwala wyznaczyć temperaturę θ i przemieszczenia u_i. Gdy znane są przemieszczenia i temperatura, można łatwo ze związków (1.2) wyznaczyć odkształcenia i dalej ze związków (1.3) naprężenia σ_{ij}.

2. Fale w ośrodku nieograniczonym

Rozpatrzmy zmiany stanu wywołane pewnymi zjawiskami zmieniającymi się harmonicznie w czasie. Niech to będzie na przykład źródło ciepła zmieniające się okresowo $W(x_r, t) = W^*(x_r)\, e^{i\omega t}$, gdzie ω jest częstością. Wówczas rozwiązań układu (1.5) i (1.6) można szukać w postaci

$$(2.1)\qquad \{\theta(x_r, t), u_i(x_r, t)\} = \{\theta^*(x_r), u_i^*(x_r)\}\, e^{i\omega t}.$$

Po wyznaczeniu θ^* i u_i^* będzie można naprężenia i odkształcenia napisać w podobnej postaci

$$\{\sigma_{ij}(x_r, t), \varepsilon_{ij}(x_r, t)\} = \{\sigma_{ij}^*(x_r), \varepsilon_{ij}^*(x_r)\}\, e^{i\omega t}.$$

Po podstawieniu wyrażeń (2.1) do (1.5) i (1.6) otrzymujemy

$$(2.2)\qquad \theta^*_{,kk} - \frac{i\omega}{\varkappa}\theta^* - \eta i\omega e^* = -\frac{Q^*}{\varkappa},$$

$$(2.3)\qquad \mu u^*_{i,kk} + (\lambda+\mu)\, u^*_{k,ki} + \gamma\omega^2 u_i^* = m\theta^*_{,i},$$

gdzie

$$\varkappa = \frac{k'}{c'\gamma}, \qquad Q^* = \frac{W^*}{c'\gamma}, \qquad m = \alpha_t(3\lambda+2\mu), \qquad \eta = \frac{mT_0}{\varkappa\gamma c'},$$

$$\mu = \mu(i\omega) = \frac{1}{2}\frac{P_2(i\omega)}{P_1(i\omega)}, \qquad \lambda = \lambda(i\omega) = \frac{1}{3}\left[\frac{P_4(i\omega)}{P_3(i\omega)} - \frac{P_2(i\omega)}{P_1(i\omega)}\right].$$

Występującą w tych wzorach wielkość $\varkappa$ nazywamy współczynnikiem przewodnictwa cieplnego.

Widać stąd, że wielkości λ i μ, które zależą od $i\omega$, są odpowiednikami stałych Lamégo w ciałach sprężystych. Równania (2.2) i (2.3) mają identyczną postać z postacią odpowiedniego równania dla ciał sprężystych. Można tu więc stosować te same metody, które stosuje się dla ośrodków sprężystych. W celu wyznaczenia naprężeń i temperatury w ciele nieograniczonym wygodnie jest wprowadzić potencjał termosprężystego przemieszczenia Φ zdefiniowany następująco [6]:

$$u_i = \Phi_{,i},$$

przy czym w przypadku drgań harmonicznych $\Phi(x_r, t) = \Phi^*(x_r)\, e^{i\omega t}$. Wówczas układ czterech równań (2.2) i (2.3) można przekształcić następująco:

Zauważmy, mianowicie że

$$u^*_{i,kk} = \Phi^*_{,ikk}, \qquad u^*_{k,ki} = \Phi^*_{,kki}.$$

Układ równań (2.3) można więc napisać w postaci

$$(\lambda+2\mu)\,\Phi^*_{,ikk}+\gamma\omega^2\,\Phi^*_{,i} = m\theta^*_{,i}.$$

Po scałkowaniu każdego z tych równań względem x_i otrzymujemy za każdym razem takie samo równanie postaci następującej:

$$(\lambda+2\mu)\,\Phi^*_{,kk}+\gamma\omega^2\,\Phi^* = m\theta^*.$$

Równanie to oraz równanie przewodnictwa cieplnego (2.2) po podstawieniu $e^* = u^*_{k,k} = \Phi^*_{,kk}$ dają układ dwóch równań

$$\theta^*_{,kk} - \frac{i\omega}{\varkappa}\,\theta^* - \eta i\omega\Phi^*_{,kk} = -\frac{Q^*}{\varkappa}, \qquad \Phi^*_{,kk}+\sigma^2\,\omega^2\,\Phi^* = \vartheta\theta^*, \tag{2.4}$$

gdzie

$$\sigma^2 = \sigma^2(i\omega) = \frac{\gamma}{\lambda+2\mu}, \qquad \vartheta = \vartheta(i\omega) = \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\,\alpha_t.$$

Naprężenia wyrażają się za pomocą funkcji Φ^* wzorami

$$\sigma_{ij} = \sigma^*_{ij}e^{i\omega t},$$

gdzie

$$\sigma^*_{ij} = 2\mu\,(\Phi^*_{,ij} - \delta_{ij}\,\Phi^*_{,kk}) - \gamma\omega^2\,\Phi^*\,\delta_{ij}.$$

Rozwiązanie otrzymane za pomocą funkcji Φ jest dla ośrodka nieograniczonego rozwiązaniem spełniającym w nieskończoności warunki brzegowe [6]. Nie trzeba więc tego rozwiązania uzupełniać innymi funkcjami. Układ równań (2.4) można napisać w postaci

$$\left((\nabla^2 - \frac{i\omega}{\varkappa}\right)\theta^* - \eta i\omega\nabla^2\,\Phi^* = -\frac{Q^*}{\varkappa}, \qquad \vartheta\theta^* - (\nabla^2+\sigma^2\,\omega^2)\,\Phi^* = 0.$$

Jak łatwo zauważyć, można ten układ doprowadzić do dwóch równań niezależnych

$$\begin{aligned} &(\nabla^2 - q)\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_1^2}\right)\theta^* - q\varepsilon'\,\nabla^2\,\theta^* = -\frac{1}{\varkappa}\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_1^2}\right)Q^*, \\ &(\nabla^2 - q)\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_1^2}\right)\Phi^* - q\varepsilon'\,\nabla^2\Phi^* = -\frac{\vartheta}{\varkappa}\,Q^*. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Przyjęto tu oznaczenia następujące: ∇^2 oznacza operator Laplace'a, $q = i\omega/\varkappa$, $\varepsilon' = \eta\varkappa\vartheta$, $1/v^2 = \sigma^2$.

Rozpatrzmy drgania wywołane płaskim źródłem ciepła umieszczonym w płaszczyźnie $x = 0$. Można wówczas napisać $Q^* = Q_0\,\delta(x)$, gdzie $\delta(x)$ jest funkcją Diraca. Operator ∇^2 zredukuje się wówczas do pochodnej $\partial^2/\partial x^2$. Rozwiązania równań (2.5) będą oczywiście zależały tylko od zmiennej x. Dzięki analogii równań (2.5) do odpowiednich równań dla ośrodka sprężystego można wykorzystać otrzymane już dla tego ośrodka wyniki [6]:

$$\Phi^* = \frac{Q_0 \vartheta}{2\varkappa (k_1^2 - k_2^2)} \left(\frac{1}{k_1} e^{-k_1 x} - \frac{1}{k_2} e^{-k_2 x} \right),$$

$$\theta^* = \frac{Q_0}{2\varkappa (k_1^2 - k_2^2)} \left[\left(\frac{\omega^2}{v_1^2} + k_1^2 \right) \frac{1}{k_1} e^{-k_1 x} - \left(\frac{\omega^2}{v_1^2} + k_2^2 \right) \frac{1}{k_2} e^{-k_2 x} \right]$$

dla $x > 0$. Naprężenia otrzymamy ze wzorów

$$\sigma_{xx}^* = -\gamma \omega^2 \Phi^*, \quad \sigma_{yy}^* = \sigma_{zz}^* = -\left(2\mu \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} + \gamma \omega^2 \Phi^* \right), \quad \sigma_{xy}^* = \sigma_{yz}^* = \sigma_{xz}^* = 0.$$

Występujące we wzorach na Φ^* i θ^* wielkości k_1 i k_2 są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$k^4 - k^2 \left[\frac{i\omega}{\varkappa} \left(1 + \frac{\varepsilon^*}{v_1^2} \right) - \frac{\omega^2}{v_1^2} \right] - \frac{i\omega}{\varkappa} \frac{\omega^2}{v_1^2} = 0, \tag{2.6}$$

gdzie $\varepsilon^* = \varepsilon' v_1^2$.

Z czterech pierwiastków tego równania trzeba oczywiście wziąć te, dla których części rzeczywiste są dodatnie. Prędkość fazowa rozchodzenia się fali c i współczynnik tłumienia δ określone są za pomocą wzorów

$$c = \frac{\omega}{\mathrm{Im}(k)} \quad \text{i} \quad \delta = \mathrm{Re}\,(k).$$

Trzeba przeprowadzić dyskusję pierwiastków k_1 i k_2 w zależności od ω dla poszczególnych modeli ciał lepkosprężystych. Dyskusja ogólna jest tu utrudniona, gdyż występująca w równaniu wielkość zespolona v_1^2 jest różna dla poszczególnych modeli.

3. Pierwiastki równania charakterystycznego

1. Model Kelvina-Voigta. Dla tego modelu mamy [6]

$$P_1(i\omega) = 1, \quad P_2(i\omega) = 2\mu_0 (t_1 i\omega + 1), \quad P_3(i\omega) = i\omega, \quad P_4(i\omega) = 3K_0 i\omega,$$

$$K_0 = \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{3},$$

gdzie $t_1 = \eta'/\mu_0$ oznacza czas opóźnienia oraz η' lepkość elementu tłumiącego.

Z powyższych zależności na podstawie wzorów

$$\lambda(i\omega) = \frac{1}{3} \left(\frac{P_4}{P_3} - \frac{P_2}{P_1} \right), \quad \mu(i\omega) = \frac{1}{2} \frac{P_2}{P_1},$$

mamy

$$\lambda(i\omega) + 2\mu(i\omega) = \lambda_0 + 2\mu_0 + \frac{4}{3} \mu_0 t_1 i\omega,$$

$$3\lambda(i\omega) + 2\mu(i\omega) = 3K_0 = 3\lambda_0 + 2\mu_0,$$

a stąd

$$v_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma} = c_1^2 + \frac{4\mu_0}{3\gamma} t_1 i\omega = c_1^2 + \frac{4}{3} c_2^2 t_1 i\omega, \qquad \vartheta = \alpha_t \frac{3\lambda_0 + 2\mu_0}{\gamma v_1^2}.$$

Przez c_1 oznaczono tu prędkość fali dylatacji w ciele sprężystym, a przez c_2 prędkość fali skrętnej w ciele sprężystym.

Jeśli $t_1 \to 0$, to $v_1^2 \to c_1^2$, $\varepsilon' \to \varepsilon$, co odpowiada modelowi ciała sprężystego. Równanie (2.6) jest wówczas identyczne z odpowiednim równaniem dla ciała sprężystego. Wprowadzając nową zmienną bezwymiarową $\varrho_1 = \omega\varkappa/v_1^2$ można równanie (2.6) napisać w postaci następującej:

$$k^4 - k^2 \frac{v_1^2 \varrho_1^2}{\varkappa^2}\left[i\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{\varepsilon^*}{\omega\varkappa}\right) - 1\right] - \frac{i}{\varrho_1}\frac{\varrho_1^4 v_1^4}{\varkappa^4} = 0, \tag{3.1}$$

gdzie ϱ_1 jest oczywiście wielkością zespoloną. Istotne dla nas jest znalezienie części rzeczywistej i części urojonej pierwiastków równania (2.6). W tym celu przedstawimy $1/\varrho_1$ w postaci

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_0} + \alpha i,$$

gdzie $\varrho_0 = \omega\varkappa/c_1^2$ jest wielkością rzeczywistą, taką samą jaką wprowadzili P. Chadwick i I. N. Sneddon [2] dla ciała sprężystego, a $\alpha = 4\mu_0 t_1/3\gamma\varkappa$. Wprowadzenie zmiennej ϱ_0 jest wygodne ze względu na to, że jest to bezwymiarowa zmienna rzeczywista pozwalająca porównać otrzymane wyniki z wynikami otrzymanymi dla ciała sprężystego.

Równanie (3.1) można teraz napisać w postaci

$$k^4 - k^2 \frac{c_1^2 \varrho_1}{\varkappa^2}[\xi i - (1+\alpha)\varrho_0] + \frac{c_1^4 \varrho_1^2}{\varkappa^4}(\alpha\varrho_0^2 - i\varrho_0) = 0,$$

gdzie $\xi = 1+\varepsilon$ a $\varepsilon = \varepsilon^*/c_1^2$ jest wielkością identyczną z odpowiednią wielkością dla ciała sprężystego przy uwzględnieniu sprzężenia [6].

Wprowadzając oznaczenia

$$\Delta_1 = [\xi i - (1+\alpha)\varrho_0]^2 - 4(\alpha\varrho_0^2 - \varrho_0 i) = \alpha_2^2 \varrho_0^2 + 2i(2 - \xi\alpha_1)\varrho_0 - \xi^2,$$

$$\alpha_1 = 1+\alpha, \quad \alpha_2 = 1-\alpha,$$

$$\bar{k}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi i - \alpha_1\varrho_0 \pm \sqrt{\Delta_1})^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[-\alpha_1\varrho_0 \pm \operatorname{Re}(\sqrt{\Delta_1}) + \xi i \pm i \operatorname{Im}(\sqrt{\Delta_1})]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1,2} + b_{1,2}\, i)^{1/2},$$

otrzymamy

$$k_{1,2} = \frac{c_1}{\varkappa}\sqrt{\varrho_1}\,\bar{k}_{1,2},$$

co po rozbiciu na część rzeczywistą i urojoną daje

$$\operatorname{Re}(k_{1,2}) = \frac{c_1\sqrt{\varrho_0}}{\varkappa\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha^2\varrho_0^2}}\Big[\operatorname{Re}(\bar{k}_{1,2})(\sqrt{1+\alpha^2\varrho_0^2}+1)^{1/2} + \operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2})(\sqrt{1+\alpha^2\varrho_0^2}-1)^{1/2}\Big], \tag{3.2}$$

$$\operatorname{Im}(k_{1,2}) = \frac{c_1\sqrt{\varrho_0}}{\varkappa\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha^2\varrho_0^2}}\,[\operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2})(\sqrt{1+\alpha^2\varrho_0^2}+1)^{1/2} - \operatorname{Re}(\bar{k}_{1,2})(\sqrt{1+\alpha^2\varrho_0^2}-1)^{1/2}],$$

gdzie

$$\operatorname{Re}(\bar{k}_{1,2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}+a_{1,2})^{1/2}, \qquad \operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2}) = \frac{1}{2}(\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}-a_{1,2})^{1/2},$$

$$a_{1,2} = -\alpha_1\varrho_0 \pm \operatorname{Re}(\sqrt{\Delta_1}), \qquad b_{1,2} = \xi \pm \operatorname{Im}(\sqrt{\Delta_1}),$$

$$\operatorname{Re}(\sqrt{\Delta_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\sqrt{(\alpha_2^2\varrho_0^2-\xi^2)^2+4\varrho_0^2(2-\xi\alpha_1)^2}+(\alpha_2^2\varrho_0^2-\xi^2)]^{1/2},$$

$$\operatorname{Im}(\sqrt{\Delta_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\sqrt{(\alpha_2^2\varrho_0^2-\xi^2)^2+4\varrho_0^2(2-\xi\alpha_1)^2}-(\alpha_2^2\varrho_0^2-\xi^2)]^{1/2}.$$

Jeśli w powyższych wzorach przyjąć $\alpha = 0$ (czyli $t_1 = 0$), tzn. rozpatrywać ciało sprężyste, oraz $\varepsilon = 0$, tzn. pominąć wpływ sprzężenia, to $k_1 = \sqrt{i\omega/\varkappa}$, $k_2 = (\omega/c_1)\,i$. Oznacza to, że pierwiastek k_1 odpowiada składnikowi związanemu z propagacją ciepła, a k_2 zmodyfikowanej fali sprężystej.

Należy jeszcze zbadać, przy jakich warunkach dla α powyższe wzory są słuszne. Otóż część rzeczywista i urojona $\sqrt{\Delta_1}$ będą miały te same znaki, gdy $\operatorname{Im}(\Delta_1)$ będzie dodatnie, tzn. wówczas, gdy $2-\xi\alpha_1 > 0$, czyli gdy $\alpha < (1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$. Trzeba również rozpatrzeć znak $\operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2}^2)$:

$$\operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2}^2) = \frac{1}{2}b_{1,2} = \frac{1}{2}[\xi \pm \operatorname{Im}(\sqrt{\Delta_1})].$$

Oczywiście $\operatorname{Im}(\bar{k}_1^2) > 0$. Można wykazać, że również $\operatorname{Im}(\bar{k}_2^2) > 0$, jeśli tylko $\alpha < 1/(1+\varepsilon)$. W tym wypadku $\operatorname{Re}(\bar{k}_{1,2})$ i $\operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2})$ mają te same znaki. We wzorach (3.2) wielkość $\operatorname{Im}(k_{1,2})$ jest również zawsze dodatnia.

Interesująca jest zależność wielkości c/c_1 i δ/δ_∞ od ϱ_0. Ogólna odpowiedź nie jest łatwa, gdyż w wyrażeniach określających k_2 występuje zbyt wiele parametrów. Można natomiast obliczyć granice, do których zmierzają te wielkości, gdy $\varrho_0 \to 0$ i $\varrho_0 \to \infty$. Symbol δ_∞ oznacza tu współczynnik tłumienia dla $t_1 = 0$ i $\varrho_0 \to \infty$. Zmierzanie ϱ_0 do zera lub do nieskończoności odpowiada zmierzaniu do zera lub do nieskończoności częstości ω.

Gdy $\varrho_0 \to 0$, to

$$\lim_{\varrho_0\to 0}\frac{c}{c_1} = \sqrt{\xi}, \qquad \lim_{\varrho_0\to 0}\frac{\delta}{\delta_\infty} = 0.$$

Te wartości graniczne są identyczne z otrzymanymi dla ciała sprężystego z uwzględnieniem sprzężenia.

Gdy $\varrho_0 \to \infty$, to

$$\lim_{\varrho_0\to\infty}\frac{c}{c_1} = \infty, \quad \lim_{\varrho_0\to\infty}\frac{\delta}{\delta_\infty} = \infty.$$

Dla bardzo dużych ϱ_0 można napisać wzory asymptotyczne dla c i δ w postaci

$$c \approx c_1 \sqrt{2a\varrho_0}, \qquad \delta \approx \delta_\infty \frac{\sqrt{2\varrho_0}}{\varepsilon\sqrt{a}}.$$

Wynika to stąd, że

$$\lim_{\varrho_0 \to \infty} \frac{c}{c_1\sqrt{2a\varrho_0}} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{\varrho_0 \to \infty} \frac{\delta\varepsilon\sqrt{a}}{\delta_\infty\sqrt{2\varrho_0}} = 1 .$$

Ponieważ $\delta_\infty = c_1\, \varepsilon/2\varkappa$, to wyrażenie asymptotyczne dla δ możemy napisać w postaci

$$\delta \approx \frac{c_1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\varrho_0}{2a}} .$$

Badanie zachowania się c/c_1 i δ/δ_∞ przy $\varrho_0 \to \infty$ ma praktycznie niewielkie znaczenie, gdyż dla drgań mechanicznych mamy zwykle $\varrho_0 \ll 1$.

Rozpatrzmy jeszcze wyrażenia $\mathrm{Re}\,(k_2)$ i $\mathrm{Im}\,(k_2)$ dla bardzo małych ϱ_0 (bliskich zeru). Można wówczas rozwinąć w szereg potęgowy funkcje $\sqrt{\varDelta_1}$, $\bar{k}_{1,2}$ oraz $(1+a\varrho_0\, i)^{-1/2}$. Otrzymamy

$$\sqrt{\varDelta_1} \approx \xi i + \frac{2}{\xi}\varrho_0 - a_1\varrho_0 + \frac{-a_2^2\xi^2+(2-\xi a_1)^2}{2\xi^2}\varrho_0\, i ,$$

$$\bar{k}_1 \approx \sqrt{\xi i}\left(1 - \frac{1-\xi a_1}{2\xi^2}\varrho_0 i\right), \qquad \bar{k}_2 \approx \sqrt{\frac{\varrho_0}{\xi}}\left(1 + \frac{1-\xi a_1 + a\xi^2}{2\xi^2}\varrho_0 i\right),$$

$$(1+a\varrho_0\, i)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}a\varrho_0\, i .$$

Stąd

$$k_1 \approx \frac{c_1}{\varkappa}\frac{\sqrt{\varrho_0}}{\sqrt{2}}\sqrt{\xi}\left[1 - \frac{a_1\xi - 1}{2\xi^2}\varrho_0 + \frac{1}{2}a\varrho_0 + i\left(1 - \frac{1}{2}a\varrho_0 - \frac{1-\xi a_1}{2\xi^2}\varrho_0\right)\right]$$

oraz

$$k_2 \approx \frac{c_1}{\varkappa}\frac{\varrho_0}{\sqrt{\xi}}\left(\varrho_0\frac{a_1\xi - 1 - a\xi^2}{2\xi^2} + \frac{1}{2}a\varrho_0 + i\right). \tag{3.3}$$

Jeżeli w powyższych wzorach przyjąć $a = 0$ (co oznacza, że będziemy rozpatrywali ciało sprężyste), to wzory te będą identyczne z otrzymanymi przez P. CHADWICKA i I. N. SNEDDONA [4]. Dla małych ϱ_0 możemy więc, korzystając z ostatniego wzoru, napisać prędkość rozchodzenia się fali w postaci

$$c \approx c_1\sqrt{1+\varepsilon}$$

oraz współczynnik tłumienia w postaci

$$\delta \approx \frac{c_1}{\varkappa}\frac{\varepsilon+\xi a}{2\xi^{5/2}}\varrho_0^2 = \frac{c_1}{\varkappa}\left(\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\xi^5}} + \frac{a}{2\sqrt{\xi^3}}\right)\varrho_0^2 .$$

Dla ośrodka sprężystego tłumienie wynosi

$$\delta_s \approx \frac{c_1\,\varepsilon}{\varkappa 2\sqrt{\xi^5}}\varrho_0^2 .$$

Tak więc

$$\frac{\delta}{\delta_s} \approx 1+\xi\frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

Widać stąd, że w przypadku modelu Kelvina-Voigta w tym zakresie, w którym z wystarczającą dokładnością możemy posługiwać się wzorem (3.3), prędkość fali w ciele lepkosprężystym nie różni się od prędkości fali w ciele sprężystym. Wyraźnie natomiast zmienia się tłumienie. Zmiana tłumienia zależy od stosunku α/ε.

2. Model Maxwella. Dla tego modelu mamy [6]

$$P_1(i\omega) = i\omega+t_0^{-1}, \quad P_2(i\omega) = 2\mu_0 i\omega, \quad P_3(i\omega) = i\omega, \quad P_4(i\omega) = 3K_0 i\omega,$$

$$K_0 = (3\lambda_0+2\mu_0)/3,$$

gdzie $t_0 = \eta'/\mu_0$ oznacza czas relaksacji oraz η' lepkość elementu tłumiącego. Mamy również

$$\lambda(i\omega)+2\mu(i\omega) = [(\lambda_0+2\mu_0)i\omega+K_0 t_0^{-1}]\frac{1}{i\omega+t_0^{-1}},$$

$$3\lambda(i\omega)+2\mu(i\omega) = 3\lambda_0+2\mu_0 = 3K_0,$$

a stąd

$$v_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\gamma} = \frac{i\omega}{i\omega+t_0^{-1}}\left(c_1^2-\frac{K_0 t_0^{-1}}{\gamma\omega}i\right) = \frac{1}{z}c^{*2}.$$

We wzorach tych c_1 oznacza prędkość fali dylatacji w ciele sprężystym,

$$z = 1+\frac{t_0^{-1}}{i\omega}, \qquad c^{*2} = c_1^2-\frac{K_0 t^{-1}}{\gamma\omega}i.$$

Jeżeli $t_0 \to \infty$, to $v_1^2 \to c_1^2$ i równanie (2.6) będzie identyczne z równaniem otrzymanym dla ciała sprężystego.

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe $\varrho_1 = \omega\varkappa/c^{*2}$ i $\varrho_0 = \omega\varkappa/c_1^2$ widzimy, że

$$z = 1-\frac{\beta}{\varrho_0}i, \qquad \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_0}-\frac{\alpha}{\varrho_0^2}i,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{K_0\varkappa t_0^{-1}}{\gamma c_1^4} = \frac{K_0}{\gamma c_1^2}\beta, \qquad \beta = \frac{\varkappa t_0^{-1}}{c_1^2}$$

oraz

$$v_1^2 = \frac{\varrho_0-\alpha i}{\varrho_0-\beta i}c_1^2.$$

Jeśli ponadto oznaczymy $\varepsilon^*/c_1^2 = \varepsilon$, gdzie ε jest wielkością tą samą, co w przypadku ciała sprężystego, to równanie (2.6) można napisać w postaci

$$k^4-k^2\frac{c_1^2\varrho_0}{\varkappa^2(\varrho_0-\alpha i)}(-\varrho_0^2+i\varrho_0\xi'+A)-\frac{c_1^4}{\varkappa^4}\frac{\varrho_0^2}{(\varrho_0-\alpha i)^2}(i\varrho_0^3+B\varrho_0^2-i\varrho_0 C) = 0.$$

Przyjęto tu oznaczenia

$$\xi' = 1+\beta+\varepsilon, \qquad A = \alpha+\beta\varepsilon = \beta\left(\frac{K_0}{\gamma c_1^2}+\varepsilon\right),$$

$$B = \alpha+\beta = \beta\left(\frac{K_0}{\gamma c_1^2}+1\right), \qquad C = \alpha\beta = \beta^2\frac{K_0}{\gamma c_1^2}.$$

Oznaczając dalej

$$\Delta_1 = (-\varrho_0^2+i\varrho_0\,\xi'+A)^2 - 4\,(i\varrho_0^3+B\varrho_0^2 - i\varrho_0\,C) =$$

$$= \varrho_0^4 - 2i\varrho_0^3(\xi'-2) - \varrho_0^2(\xi'^2+2A-4B)+2i\varrho_0(A\xi'-2C)+A^2$$

oraz

$$\bar{k}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\varrho_0^2+i\varrho_0\,\xi'+A\pm\sqrt{\Delta_1})^{1/2},$$

otrzymamy rozwiązanie w postaci

$$k_{1,2} = \frac{c_1\sqrt{\varrho_0}}{\varkappa\sqrt{\varrho_0-\alpha i}}\,\bar{k}_{1,2}.$$

W celu znalezienia części rzeczywistej i urojonej pierwiastków k_1 i k_2 przedstawimy te wyrażenia w postaci wyraźniejszej:

$$\bar{k}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\varrho_0^2+A+\mathrm{Re}(\sqrt{\Delta_1})+i\varrho_0\,\xi'+i\,\mathrm{Im}(\bar{\Delta}_1)]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1+ib_1]^{1/2},$$

$$\bar{k}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\varrho_0^2+A-\mathrm{Re}(\sqrt{\Delta_1})+i\varrho_0\,\xi'-i\,\mathrm{Im}(\sqrt{\Delta_1})]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}[a_1+ib_2]^{1/2},$$

$$k_{1,2} = \frac{c_1\sqrt{\varrho_0}}{\varkappa\sqrt{\varrho_0^2+\alpha^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\varrho_0+\alpha i)^{1/2}(a_{1,2}+b_{1,2}\,i)^{1/2},$$

co w rozbiciu na część rzeczywistą i urojoną daje

$$\mathrm{Re}(k_{1,2}) = \frac{c_1\sqrt{\varrho_0}}{2\varkappa\sqrt{\varrho_0^2+\alpha^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{Re}(\bar{k}_{1,2})(\sqrt{\varrho_0^2+\alpha^2}+\varrho_0)^{1/2} -$$

$$- \mathrm{Im}(\bar{k}_{1,2})(\sqrt{\varrho_0^2+\alpha^2}-\varrho_0)^{1/2}],$$

$$\mathrm{Im}(k_{1,2}) = \frac{c_1\sqrt{\varrho_0}}{2\varkappa\sqrt{\varrho_0^2+\alpha^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}[\mathrm{Re}(\bar{k}_{1,2})(\sqrt{\varrho_0^2+\alpha^2}-\varrho_0)^{1/2} +$$

$$+ \mathrm{Im}(\bar{k}_{1,2})(\sqrt{\varrho_0^2+\alpha^2}+\varrho_0)^{1/2}].$$

Wprowadzono tu następujące oznaczenia:

$$\mathrm{Re}(\bar{k}_{1,2}) = (\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}-a_{1,2})^{1/2}, \qquad \mathrm{Im}(\bar{k}_{1,2}) = (\sqrt{a_{1,2}^2+b_{1,2}^2}-a_{1,2})^{1/2},$$

$$a_{1,2} = -\varrho_0^2+A\pm\mathrm{Re}(\sqrt{\Delta_1}), \qquad b_{1,2} = \varrho_0\,\xi'\pm\mathrm{Im}(\sqrt{\Delta_1}),$$

$$\mathrm{Re}(\sqrt{\Delta_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(\varrho_0^4-a\varrho_0^2+A^2)^2+4\varrho_0^2[(2-\xi')\varrho_0^2+b]^2}+\varrho_0^4-a\varrho_0^2+A^2\}^{1/2},$$

$$\operatorname{Im}(\sqrt{\Delta_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{(\varrho_0^4 - a\varrho_0^2+A^2)^2+4\varrho_0^2[(2-\xi')\varrho_0^2+b]^2} - \varrho_0^4+a\varrho_0^2 - A^2\}^{1/2},$$

$$a = \xi'^2+2A-4B, \qquad b = A\xi'-2C.$$

Jeżeli w powyższych wzorach przyjąć $\varepsilon = 0$, tzn. nie uwzględniać sprzężenia, oraz $t_0 = \infty$ (ciało traktować jako sprężyste), czyli przyjąć $A = B = C = 0$, $\xi' = 1$, to $k_1 = \sqrt{i\omega/\varkappa}$, $k_2 = (\omega/c_1)\, i$. Oznacza to, że k_1 odpowiada zmodyfikowanej fali cieplnej, a k_2 zmodyfikowanej fali sprężystej. Trzeba jeszcze zbadać, przy jakich warunkach na α (czyli na t_0) powyższe wzory są prawdziwe.

Dla $\sqrt{\Delta_1}$ będziemy mieli ten sam znak przy $\operatorname{Re}(\sqrt{\Delta_1})$ i $\operatorname{Im}(\sqrt{\Delta_1})$, gdy $\operatorname{Im}(\Delta_1) > 0$. Warunek ten będzie spełniony, gdy $(2-\xi')\varrho_0^2+A\xi'-2C > 0$. Nierówność powyższa będzie prawdziwa dla wszystkich ϱ_0, gdy $(2-\xi') > 0$ oraz $A\xi'-2C > 0$, a te nierówności będą spełnione dla $\beta < 1-\varepsilon$ (nierówność pierwsza) i $\beta < \frac{1}{2}+(\varepsilon\gamma c_1^2/2K_0)$. Ponieważ na ogół ε jest wielkością bardzo małą (rzędu 10^{-2}), istotnym ograniczeniem jest warunek drugi. Na to, aby przy $\operatorname{Re}(\bar{k}_{1,2})$ i $\operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2})$ wystąpiły te same znaki, potrzeba, aby $\operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2}^2) > 0$. Dla $\bar{k}_1^2$ warunek ten jest zawsze spełniony. Dla $\bar{k}_2^2$ mamy $\operatorname{Im}(\bar{k}_{1,2}^2) = \frac{1}{2}[\varrho_0\xi' - \operatorname{Im}(\sqrt{\Delta_1})]$. Trzeba więc rozwiązać nierówność $\varrho_0\xi' - \operatorname{Im}(\sqrt{\Delta_1}) > 0$. Nierówność ta jest prawdziwa dla każdego ϱ_0, jeżeli $\beta < 1$.

Zachowanie się c/c_1 i δ/δ_∞ przy $\varrho_0 \to 0$ i $\varrho_0 \to \infty$ przedstawia się następująco:

$$\lim_{\varrho_0\to 0}\frac{c}{c_1} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}+\varepsilon} = \sqrt{\frac{K_0}{\gamma c_1^2}+\varepsilon}, \qquad \lim_{\varrho_0\to 0}\frac{\delta}{\delta_\infty} = 0,$$

$$\lim_{\varrho_0\to\infty}\frac{c}{c_1} = 1, \qquad \lim_{\varrho_0\to\infty}\frac{\delta}{\delta_\infty} = 1+\frac{\beta+\alpha}{\varepsilon}.$$

Ostatnie dwa wzory, mówiące o zachowaniu się prędkości fazowej fali i współczynnika tłumienia dla bardzo dużych ϱ_0, nie mają praktycznego znaczenia, gdyż jak wiadomo zwykle $\varrho_0 \ll 1$.

Interesujący jest fakt, że stosunek c/c_1 przy $\varrho \to 0$ nie zależy od czasu relaksacji. Dla małych wartości ϱ_0 nie można otrzymać przybliżonych wartości k_1 i k_2 przez rozwinięcie w szereg potęgowy odpowiednich funkcji, jak to miało miejsce w przypadku modelu Kelvina-Voigta bez ustalenia parametru A. Można natomiast funkcję $\sqrt{\Delta_1}$, $\bar{k}_{1,2}$, $(\varrho_0 - \alpha i)^{-1/2}$ rozwinąć w szereg ze względu na $1/\varrho_0$ dla bardzo dużych ϱ_0. Wówczas po odrzuceniu wyrazów rzędu $(1/\varrho_0)^2$ i wyższych otrzymamy:

$$k_1 \approx \frac{c_1}{\varkappa}\sqrt{\varrho_0}\left\{1+\frac{B+(1-\xi')}{2}\frac{1}{\varrho_0} - \frac{\alpha}{2\varrho_0} + i\left[1-\frac{B+(1-\xi')}{2}\frac{1}{\varrho_0}+\frac{\alpha}{2\varrho_0}\right]\right\},$$

$$k_2 \approx \frac{c_1}{\varkappa}\left[\frac{\xi'-1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \varrho_0 i + \frac{\alpha(\xi'-1)}{4\varrho_0} i\right].$$

Gdy $t_0 \to \infty$, wzory powyższe przechodzą we wzory otrzymane dla ciała sprężystego.

Literatura cytowana w tekście

1. A. M. Freudenthal, H. Geiringer, *The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum*, Springer-Verlag 1958.

2. D. R. Bland, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, 1960.

3. S. C. Hunter, *Progress in Solid Mechanics*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1960.

4. P. Chadwick, I. N. Sneddon, *Plane waves in an elastic solid conducting heat*, J. Mech. Phys. Solids, **6** (1958).

5. S. C. Hunter, *Tentative equations for the propagation of stress, strain and temperature fields in viscoelastic solid*, J. Mech. Phys. Solids, **9** (1961).

6. W. Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.

7. B. A. Boley, J. H. Weiner, *Theory of Thermal Stresses*, New York-London 1960.

8. J. Stefaniak, *Fale Rayleigha w ciałach lepkosprężystych przy uwzględnieniu sprzężenia termomechanicznego*, Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, 1965.

Резюме

ВОПРОС РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В БЕСКОНЕЧНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ УЧЕТЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО СОПРЯЖЕНИЯ

Рассматривается вопрос распространения волны в бесконечной вязкоупругой среде, вызванной действием плоского источника тепла, гармонически изменяющегося во времени. Рассматриваются модели Кельвина-Фойгта и Максвелла. Для обеих моделей, получаются формулы, определяющие фазовую скорость c и коэффициент затухания δ, как безразмерной функции переменной $\varrho_0 = \omega\varkappa/c_1^2$. Для случая модели Кельвина-Фойгта для $\varrho_0 \ll 1$, получаются приближенные значения c и δ. Оказывается, что скорость волны, в этом случае, не разнится от скорости волны в случае упругого тела с учетом сопряжения. Коэффициент демпфирования же зависит от времени запаздывания t_1. Для модели Максвелла не удалось получить приближенных значений для c и δ при $\varrho_0 \ll 1$, без предшествующего предположения, касающегося порядка величины времени релаксации t_0.

Summary

PROPAGATION OF WAVES IN AN INFINITE VISCO-ELASTIC MEDIUM TAKING INTO CONSIDERATION THE THERMOMECHANICAL COUPLING

The wave mentioned in the title is produced by a plane harmonic source of heat. The Kelvin-Voigt and Maxwell body are considered. Equations are obtained for both determining the phase velocity c and the damping coefficient δ in function of the dimensionless coordinate $\varrho_0 = \omega\varkappa/c_1^2$. In the case of the Kelvin-Voigt model approximate values of c and δ are obtained for $\varrho_0 \ll 1$. It is found that the wave velocity does not differ, in this case, from the corresponding value in the case of an elastic body with coupling. The damping coefficient depends on the creep time t_1. For the Maxwell model no approximate values for c and δ have been obtained for $\varrho_0 \ll 1$ without previous assumption of the relaxation time t_0.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 września 1965 r.