

NACISK STEPLA NA NIEJEDNORODNĄ PÓŁPŁASZCZYNĘ SPRĘŻYSTĄ

BARBARA STACHOWICZ, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy [7] autorzy podali rozwiązanie problemu kontaktowego dla niejednorodnej półpłaszczyzny sprężystej. Niejednorodność ta była określona przez zmienny wzdłuż głębokości moduł sprężystości $E(y) = E_0 y^m$, $0 < m < 1$. W pracy niniejszej rozważymy analogiczne zagadnienie, lecz dla niejednorodności typu

$$(1.1) \quad E(y) = E_0 e^{Ay}, \quad A = \text{const.}$$

Ośrodek niejednorodny z modułem (1.1) był przedmiotem prac PREDELEANU i TEODORSCU [4] oraz ROSTOWCEWA [5], problem kontaktowy jednak dla takiej postaci niejednorodności nie był dotąd rozpatrywany. Rozważymy więc nacisk stempla określonego kształtu, spoczywającego bez tarcia na nieważkiej, nieobciążonej, niejednorodnej półpłaszczyźnie sprężystej. Ograniczając się do jednego stempla posiadającego oś symetrii, podamy rozwiązanie przez zastosowanie kosinusowej transformacji całkowitej Fouriera. Problem kontaktowy sprowadzimy do dualnych równań całkowych, dla których podamy przybliżone, lecz efektywne rozwiązanie.

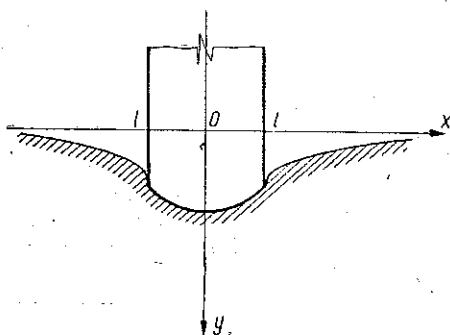
2. Sformułowanie problemu i ogólna postać jego rozwiązania.

Rozważmy nacisk symetrycznego stempla na niejednorodną półpłaszczyznę sprężystą (rys. 1) przy następujących warunkach brzegowych:

$$\text{dla } y = 0$$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \\ v &= \Delta(x), \quad |x| < l, \\ \sigma_y &= 0, \quad |x| > l, \end{aligned}$$

gdzie τ_{xy} oznacza naprężenie styczne, σ_y naprężenie normalne w kierunku osi y oraz v przemieszczenie pionowe.



Rys. 1

Traktując wspólnie płaski stan odkształcenia i naprężenia, stosując funkcję naprężeń Airy'ego oraz uwzględniając zmienność modułu sprężystości $E(y)$, otrzymujemy następujące równanie nierozdzielności odkształceń, określające funkcję naprężeń:

$$(2.2) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2 \frac{E'(y)}{E(y)} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} - 2 \frac{E'(y)}{E(y)} \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \\ + \left[\frac{E''(y)}{E(y)} - 2 \left(\frac{E'(y)}{E(y)} \right)^2 \right] \nu_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \left[\frac{E''(y)}{E(y)} - 2 \left(\frac{E'(y)}{E(y)} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

Tutaj $F(x, y)$ oznacza funkcję naprężeń, ν współczynnik Poissona oraz

$$\nu_1 = \begin{cases} \frac{\nu}{1-\nu} & \text{dla płaskiego stanu odkształcenia,} \\ \nu & \text{dla płaskiego stanu naprężenia.} \end{cases}$$

Przecinkiem oznaczyliśmy różniczkowanie modułu. Przyjmując moduł sprężystości $E(y)$ w postaci (1.1) otrzymamy

$$(2.3) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2A \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} - 2A \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + A^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - A^2 \nu_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Stosując kosinusową transformację całkową Fouriera otrzymamy dla transformaty

$$\tilde{F}(a, y) = \int_0^{\infty} F(x, y) \cos ax \, dx$$

równanie zwyczajne

$$(2.4) \quad \tilde{F}^{(4)} - 2A\tilde{F}''' + (A^2 - 2a^2)\tilde{F}'' + 2Aa^2\tilde{F}' + (a^4 + A^2 a^2 \nu_1)\tilde{F} = 0.$$

Jego równanie charakterystyczne

$$(2.5) \quad \lambda^4 - 2A\lambda^3 + (A^2 - 2a^2)\lambda^2 + 2Aa^2\lambda + a^4 + A^2 a^2 \nu_1 = 0$$

ma cztery pierwiastki zespolone

$$\lambda_1 = a(a) + \frac{A}{2} + ib(a), \quad \lambda_2 = -a(a) + \frac{A}{2} - ib(a), \\ \lambda_3 = a(a) + \frac{A}{2} - ib(a), \quad \lambda_4 = -a(a) + \frac{A}{2} + ib(a),$$

gdzie

$$(2.6) \quad a(a) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \frac{A^2}{4} + \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)^2 + A^2 a^2 \nu_1}}}{2}, \\ b(a) = \frac{\sqrt{-\alpha^2 - \frac{A^2}{4} + \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)^2 + A^2 a^2 \nu_1}}}{2}.$$

Całka ogólna równania (2.4) przybierze więc postać

$$\tilde{F}(a, y) = C_1(a) e^{\lambda_1 y} + C_2(a) e^{\lambda_2 y} + C_3(a) e^{\lambda_3 y} + C_4(a) e^{\lambda_4 y}.$$

Przyjmując zerowe wartości naprężeń dla $y \rightarrow \infty$, należy przyjąć

$$C_1(a) = C_3(a) = 0,$$

skąd ostatecznie

$$(2.7) \quad \tilde{F}(a, y) = C_2(a) e^{(-a + \frac{A}{2} - ib)y} + C_4(a) e^{(-a + \frac{A}{2} + ib)y} = \\ = e^{(-a + \frac{A}{2})y} (C_2 \cos by + C_4 \sin by).$$

Dla retransformaty otrzymujemy

$$(2.8) \quad F(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{F}(a, y) \cos ax \, da = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{(-a + \frac{A}{2})y} (C_2 \cos by + C_4 \sin by) \cos ax \, da.$$

Naprężenia i przemieszczenia wyznaczmy ze znanych związków (naprężenia ze związków Airy'ego, przemieszczenia z prawa Hooke'a i związków geometrycznych), które po uwzględnieniu (2.8) przyjmą postać

$$(2.9) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a - \frac{A}{2})y} \left\{ \left[C_2 \left(\left(\frac{A}{2} - a \right)^2 - b^2 \right) + 2b \left(\frac{A}{2} - a \right) C_4 \right] \times \right. \\ \left. \times \cos by + \left[C_4 \left(\left(\frac{A}{2} - a \right)^2 - b^2 \right) - 2b \left(\frac{A}{2} - a \right) C_2 \right] \sin by \right\} \cos ax \, da, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a - \frac{A}{2})y} (-a^2 C_2 \cos by - a^2 C_4 \sin by) \cos ax \, da, \\ \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-(a - \frac{A}{2})y} \left\{ \left[-a \left(\frac{A}{2} - a \right) C_2 - ba C_4 \right] \cos by + \right. \\ \left. + \left[ab C_2 - a \left(\frac{A}{2} - a \right) C_4 \right] \sin by \right\} \sin ax \, da, \\ u = \frac{1}{\pi E_0} \int_0^{\infty} e^{-(a + \frac{A}{2})y} \left\{ \left[C_2 \left(\left(\frac{A}{2} - a \right)^2 - b^2 + v_1 a^2 \right) + 2b \left(\frac{A}{2} - a \right) C_4 \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos by}{a} + \left[C_4 \left(\left(\frac{A}{2} - a \right)^2 - b^2 + v_1 a^2 \right) - 2b \left(\frac{A}{2} - a \right) C_2 \right] \frac{\sin by}{a} \right\} \times \\ \times \sin ax \, da + \Phi(y), \\ v = \frac{1}{\pi E_0} \int_0^{\infty} e^{-(a + \frac{A}{2})y} \left\{ \left[C_2 \left[\left(-a - \frac{A}{2} \right) \left(-a^2 - v_1 \left(\frac{A}{2} - a \right)^2 + v_1 b^2 \right) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 2v_1 b^2 \left(\frac{A}{2} - a \right) \right] + C_4 \left[\left(\frac{A}{2} + a \right) \cdot 2bv_1 \left(\frac{A}{2} - a \right) - b \left(-a^2 - v_1 \times \right. \right. \right.$$

$$\times \left(\frac{A}{2} - a \right)^2 + \nu_1 b^2 \Big] \Big] \cos by + \left[C_2 \left[b \left(-a^2 - \nu_1 \left(\frac{A}{2} - a \right)^2 + \nu_1 b^2 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2b\nu_1 \left(\frac{A^2}{4} - a^2 \right) \right] + C_4 \left[-2b^2\nu_1 \left(\frac{A}{2} - a \right) - \left(\frac{A}{2} + a \right) \left(-a^2 - \nu_1 \times \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left(\frac{A}{2} - a \right)^2 + \nu_1 b^2 \right) \right] \right] \sin by \Big\} \frac{\cos ax}{\left(a + \frac{A}{2} \right)^2 + b^2} da + \Psi(x).$$

Tutaj σ_x oznacza naprężenie normalne w kierunku osi x oraz u przemieszczenie poziome.

Z warunku zgodności odkształceń

$$(2.10) \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

otrzymamy po przekształceniach

$$\frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\Psi}{dx} = 0,$$

a wobec symetrii ($u(0, y) = 0$) będzie można przyjąć

$$(2.11) \quad \Phi(y) = \Psi(x) = \text{const} = 0.$$

Związki (2.9) i (2.11) oraz warunki brzegowe (2.1) pozwalają wyznaczyć funkcje $C_2(a)$ i $C_4(a)$.

Z (2.1)₁ otrzymamy

$$C_2 \left(\frac{A}{2} - a \right) + C_4 b = 0,$$

skąd

$$(2.12) \quad C_4 = - \frac{\frac{A}{2} - a}{b} C_2.$$

Mieszany warunek (2.1)_{2,3} daje

$$(2.13) \quad \frac{1}{\pi E_0} \int_0^\infty \left\{ C_2 \left[\left(-\frac{A}{2} - a \right) \left(-a^2 - \nu_1 \left(\frac{A}{2} - a \right)^2 + \nu_1 b^2 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2b^2\nu_1 \left(\frac{A}{2} - a \right) \right] + C_4 \left[\left(\frac{A^2}{4} - a^2 \right) 2b\nu_1 - b \left(-a^2 - \nu_1 \left(\frac{A}{2} - a \right)^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \nu_1 b^2 \right) \right] \right\} \frac{\cos ax}{\left(\frac{A}{2} - a \right)^2 + b^2} da = \Delta(x), \quad 0 < x < l.$$

$$\int_0^\infty C_2 a^2 \cos ax da = 0, \quad x > l.$$

Uwzględniając (2.12) i postać funkcji $a(\alpha)$ i $b(\alpha)$ z (2.6) otrzymamy po przekształceniach

$$(2.14) \quad \int_0^{\infty} C_2 \frac{\frac{2\alpha^2 + v_1 A^2}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)} + \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)^2 + v_1 A^2 \alpha^2} - v_1 A \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)^2 + v_1 A^2 \alpha^2} - v_1 \frac{A^3}{4}}{\frac{A}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)} + \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)^2 + v_1 A^2 \alpha^2} + \sqrt{\left(\alpha^2 + \frac{A^2}{4}\right)^2 + v_1 A^2 \alpha^2} + \frac{A^2}{4}} \times \cos \alpha x \, d\alpha = \pi E_0 \Delta(x), \quad 0 < x < l,$$

$$\int_0^{\infty} C_2 \alpha^2 \cos \alpha x \, d\alpha = 0, \quad x > l.$$

Podstawiając

$$(2.15) \quad \frac{x}{l} = t, \quad \alpha l = u, \quad \frac{Al}{2} = \eta, \quad f(t) = \pi E_0 \Delta(t)$$

i wykonując proste przekształcenia dostajemy związek

$$(2.16) \quad \int_0^{\infty} C_2(u) \frac{\sqrt{2}(u^2 + 2v_1 \eta^2) \sqrt{u^2 + \eta^2} + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4v_1 \eta^2 u^2} - 2v_1 \eta \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4v_1 \eta^2 u^2} - 2v_1 \eta^3}{\sqrt{2} \eta \sqrt{u^2 + \eta^2} + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4v_1 \eta^2 u^2} + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4v_1 \eta^2 u^2} + \eta^2} \times \cos tu \, du = f(t), \quad t < 1,$$

$$\int_0^{\infty} C_2(u) u^2 \cos tu \, du = 0, \quad t > 1.$$

Oznaczając dalej

$$(2.17) \quad C_2(u) u^2 = \varphi(u),$$

$$(2.18) \quad G(u) = \frac{1}{u^2} \frac{\sqrt{2}(u^2 + 2v_1 \eta^2) \sqrt{u^2 + \eta^2} + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4v_1 \eta^2 u^2} - 2v_1 \eta \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4v_1 \eta^2 u^2} - 2v_1 \eta^3}{\sqrt{2} \eta \sqrt{u^2 + \eta^2} + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4v_1 \eta^2 u^2} + \sqrt{(u^2 + \eta^2)^2 + 4v_1 \eta^2 u^2} + \eta^2},$$

otrzymamy ostatecznie warunek (2.1)₂ w postaci

$$(2.19) \quad \int_0^{\infty} \varphi(u) G(u) \cos tu \, du = f(t), \quad t < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(u) \cos tu \, du = 0, \quad t > 1.$$

Związki (2.19) stanowią przypadek dualnych równań całkowych z jądrem trygonometrycznym. Dla dostatecznie ogólnej postaci funkcji $G(u)$ były one badane przez SZEFERA w pracy [8]. Tutaj jednak z uwagi na złożoną postać funkcji $G(u)$ zastosujemy metodę Noble'a [3] polegającą na sprowadzeniu równań (2.19) do jednego równania całkowego Fredholma I rodzaju. W tym celu weźmy dla $y = 0$

$$\sigma_y = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C_2 a^2 \cos ax \, da$$

i oznaczmy przez $p(x)$ nie znaną wartość tego naprężenia pod stemplem:

$$(2.20) \quad \sigma_y = \begin{cases} -p(x), & 0 < x < l, \\ 0, & x > l. \end{cases}$$

Traktując $p(x)$ jak funkcję znaną możemy dla funkcji

$$(2.21) \quad k(x) = \begin{cases} -p(x), & 0 < x < l, \\ 0, & x > l \end{cases}$$

wyznaczyć transformatę Fouriera:

$$(2.22) \quad \kappa(a) = \int_0^{\infty} k(x) \cos ax \, dx = -\int_0^l p(x) \cos ax \, dx,$$

skąd

$$k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\kappa}(a) \cos ax \, da.$$

Dla $y = 0$ otrzymujemy z (2.20)

$$\sigma_y = k(x),$$

a więc

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C_2 a^2 \cos ax \, da = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{\kappa}(a) \cos ax \, da,$$

skąd

$$C_2 a^2 = -\tilde{\kappa}(a) = \int_0^l p(x) \cos ax \, dx.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń (2.15) i (2.17) znajdziemy

$$(2.23) \quad \varphi(u) = l^3 \int_0^1 p(t) \cos tu \, dt.$$

Powracając do równań (2.19) widzimy, iż dla $t > 1$ równanie (2.19)₂ jest spełnione (na podstawie transformacji) natomiast nie znane naprężenia kontaktowe $p(t)$ wyznaczmy z (2.19)₁ po podstawieniu (2.23):

$$\int_0^{\infty} \left[l^3 \int_0^1 p(t) \cos tu dt \right] G(u) \cos tu du = f(t).$$

Po zmianie kolejności całkowania otrzymamy

$$\int_0^1 p(\xi) \left[\int_0^{\infty} G(u) \cos tu du \right] \cos \xi u d\xi = \frac{f(t)}{l^3}$$

oraz

$$\int_0^1 p(\xi) \left[\int_0^{\infty} G(u) \cos tu \cos \xi u du \right] d\xi = F(t),$$

gdzie

$$(2.24) \quad F(t) = \frac{f(t)}{l^3}.$$

Ostatecznie napiszemy krótko

$$(2.25) \quad \int_0^1 p(\xi) K(\xi, t) d\xi = F(t),$$

gdzie

$$(2.26) \quad K(\xi, t) = \int_0^{\infty} G(u) \cos tu \cos \xi u du.$$

Równanie (2.25) jest równaniem całkowym Fredholma I rodzaju z jądrem słabo osobliwym. Z uwagi na złożoną postać jądra (2.26) można podać tylko jego przybliżone rozwiązanie.

3. Rozwiązanie równania (2.25)

Dla dostatecznie małego η możemy przyjąć $\eta^2 \approx 0$, np. dla $A = 0,01 \text{ m}^{-1}$ $l = 1 \text{ m}$, $\eta = 0,005$. Przy tak małym A moduł sprężystości na głębokości 100 m rośnie prawie trzykrotnie:

$$E(100) = E_0 e^{A \cdot 100} = E_0 e \approx 3E_0.$$

Wynika stąd, że przyjęcie małego η jest praktycznie uzasadnione. Funkcja $G(u)$ przyjmie wtedy postać

$$G(u) \approx \frac{2}{u} \frac{u - v_1 \eta}{u + 2\eta} = \frac{2}{u + 2\eta} - 2v_1 \eta \frac{1}{u(u + 2\eta)}.$$

Rozkładając drugi składnik na ułamki proste otrzymujemy

$$(3.1) \quad G(u) \approx \frac{2 + v_1}{u + 2\eta} - \frac{v_1}{u}.$$

Wyrażając iloczyn kosinusów przez sumę, otrzymamy z (2.26) po uwzględnieniu (3.1)

$$(3.2) \quad K(\xi, t) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G(u) \cos(t+\xi) u \, du + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G(u) \cos(t-\xi) u \, du \approx \\ \approx \frac{1}{2} \left[(2+\nu_1) \left(\int_0^{\infty} \frac{\cos(t+\xi) u}{u+2\eta} \, du + \int_0^{\infty} \frac{\cos(t-\xi) u}{u+2\eta} \, du \right) - \right. \\ \left. - \nu_1 \left(\int_0^{\infty} \frac{\cos(t+\xi) u}{u} \, du + \int_0^{\infty} \frac{\cos(t-\xi) u}{u} \, du \right) \right].$$

Dwie pierwsze całki dadzą się wyznaczyć w postaci zamkniętej w klasie funkcji specjalnych. Mianowicie mamy

$$(3.3) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos zu}{u+2\eta} \, du = -\operatorname{si} 2\eta z \sin 2\eta z - \operatorname{ci} 2\eta z \cos 2\eta z,$$

gdzie funkcje «si» i «ci» są sinusem i kosinusem całkowym, określonymi związkami

$$(3.4) \quad \operatorname{si} 2\eta z = -\frac{\pi}{2} \mathbb{1} + \int_0^{2\eta z} \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad \operatorname{ci} 2\eta z = C + \ln 2\eta z + \int_0^{2\eta z} \frac{\cos x - 1}{x} \, dx,$$

a $C = 0,577216$ jest stałą Eulera.

Dla małych wartości argumentu możemy przyjąć:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \operatorname{si} 2\eta z &\approx -\frac{\pi}{2} - 2\eta z, & \operatorname{ci} 2\eta z &\approx C + \ln 2\eta z, \\ \sin 2\eta z &\approx 2\eta z, & \cos 2\eta z &\approx 1. \end{aligned}$$

Całka (3.3) przyjmie wtedy postać

$$(3.6) \quad I_1 \approx - \left[2\eta z \left(-\frac{\pi}{2} + 2\eta z \right) + C + \ln 2\eta \right] \approx - (C + \ln 2\eta z) + \pi \eta z - \ln z.$$

Jeżeli wynik ten uwzględnimy w (3.2), to otrzymamy

$$\dot{K}(\xi, t) = \frac{2+\nu_1}{2} \{ [- (C + \ln 2\eta) + \pi \eta (t+\xi) - \ln |t+\xi|] + [- (C + \ln 2\eta) + \\ - \pi \eta (t-\xi) - \ln |t-\xi|] \} - \frac{\nu_1}{2} \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(t+\xi) u}{u} \, du + \int_0^{\infty} \frac{\cos(t-\xi) u}{u} \, du \right]$$

i po prostych przekształceniach

$$(3.7) \quad K(\xi, t) = (2+\nu_1) [\pi \eta t - (C + \ln 2\eta)] + \frac{2+\nu_1}{2} (\ln |t+\xi| + \ln |t-\xi|) - \\ - \frac{\nu_1}{2} \left[\int_0^{\infty} \frac{\cos(t+\xi) u}{u} \, du + \int_0^{\infty} \frac{\cos(t-\xi) u}{u} \, du \right].$$

Pozostałe dwie całki są rozbieżne i nie istnieją w klasycznym sensie. Opierając się jednak na teorii dystrybucji [2] możemy je traktować jako dystrybucyjne transformaty Fouriera funkcji u^{-1} . Transformaty te istnieją (w sensie dystrybucji) i wynoszą

$$(3.8) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(t+\xi)u}{u} du = -2\ln|t+\xi|+B,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(t-\xi)u}{u} du = -2\ln|t-\xi|+B,$$

gdzie B jest dowolną stałą.

Do wyniku tego dojść można też drogą intuicyjnych rozważań korzystając z przedstawienia całkowego przemieszczenia $v(x, y)$ w zagadnieniu Flamanta dla ośrodka jednorodnego. Przemieszczenie to jak łatwo wykazać określone jest za pomocą wzoru

$$v(x, y) = -\frac{1}{\pi E} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ay}}{a} (1+ay) \cos ax da + \Psi(x).$$

Wiadomo z kolei [1], że

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi E} \left[\ln(x^2+y^2) + (1+\nu_1) \frac{x^2}{x^2+y^2} \right] + \Psi(x),$$

skąd dla $y=0$ otrzymujemy

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{a} da = -2 \ln x - (1+\nu_1),$$

a więc wzór (3.8), w którym

$$B = -(1+\nu_1).$$

Uwzględniając ten wynik w (3.7), otrzymamy

$$(3.9) \quad K(\xi, t) = (2+\nu_1) [\pi\eta t - (C + \ln 2\eta)] - \nu_1 B - \left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) (\ln|t+\xi| + \ln|t-\xi|).$$

Podstawiając (3.9) do równania (2.25) znajdziemy

$$\int_0^1 p(\xi) \left\{ -\nu_1 B + (2+\nu_1) [\pi\eta t - (C + \ln 2\eta)] - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) (\ln|t+\xi| + \ln|t-\xi|) \right\} d\xi = F(t),$$

$$[-\nu_1 B + (2+\nu_1)(\pi\eta t - C - \ln 2\eta)] \int_0^1 p(\xi) d\xi - \\ - \left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) \int_0^1 p(\xi) (\ln|t+\xi| + \ln|t-\xi|) d\xi = F(t)$$

oraz

$$(3.10) \quad \int_0^1 p(\xi) (\ln |t+\xi| + \ln |t-\xi|) d\xi = \\ = \frac{1}{1 - \frac{\nu_1}{2}} \left[\left(-\nu_1 B - (2+\nu_1)(C + \ln 2\eta) \right) \frac{P}{2} + \frac{P(2+\nu_1)\pi\eta}{2} t - F(t) \right],$$

gdzie

$$P = \int_{-1}^1 p(\xi) d\xi.$$

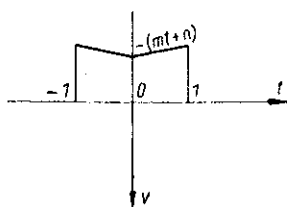
Jeżeli oznaczymy

$$(3.11) \quad m = \frac{2 + \nu_1}{2 - \nu_1} \pi \eta P, \quad n = \frac{P}{2 - \nu_1} [-\nu_1 B - (2 + \nu_1)(C + \ln 2\eta)],$$

a następnie uwzględnimy wartość $F(t)$ z (2.24) i (2.15)₄ i równocześnie całkę (3.10) napiszemy dla przedziału $(-1, 1)$, to otrzymamy ostatecznie

$$(3.12) \quad \int_{-1}^1 p(\xi) \ln |t - \xi| d\xi = m |t| + n - \frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) l^3} \Delta(t).$$

Postać (3.12) jest identyczna z równaniem analogicznego problemu kontaktowego w ośrodku jednorodnym, zawiera jedynie po prawej stronie dodatkowe wyrażenie $m|t| + n$. Wynika stąd, że problem kontaktowy dla ośrodka z niejednorodnością typu (1.1) dla małej wartości parametru A (a więc przy małej niejednorodności)



Rys. 2

jest w przybliżeniu równoważny problemowi nacisku stemplu na półpłaszczyznę jednorodną, a wpływ niejednorodności przejawia się przez dodatkowe przemieszczenie $mt + n$. Można więc wykorzystać wszystkie znane dotychczas rozwiązania dla ośrodka jednorodnego dodając dodatkowo fikcyjne przemieszczenie $-(m|t| + n)$ (rys. 2). To fikcyjne przemieszczenie odzwierciedla wpływ niejednorodności ośrodka na rozkład naprężeń kontaktowych pod stemplem. Rozwiązanie

równania (3.12) da się wyznaczyć w postaci jawnej. Wprowadźmy bowiem zamianę zmiennych

$$(3.13) \quad \xi = 2s - 1, \quad t = 2w - 1, \quad s \in [0, 1].$$

Będzie wtedy

$$\int_0^1 p(s) \ln 2 |w - s| ds = \frac{m}{2} |2w - 1| + \frac{n}{2} - \frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) l^3} \Delta(w)$$

oraz

$$\int_0^1 p(s) \ln |w - s| ds = \frac{m}{2} |2w - 1| + \frac{n}{2} - \frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) I^3} \Delta(w) - \frac{P \ln 2}{2}.$$

Oznaczając

$$(3.14) \quad h(w) = \frac{m}{2} |2w - 1| + \frac{n}{2} - \frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) I^3} \Delta(w) - \frac{P \ln 2}{2},$$

otrzymamy

$$(3.15) \quad \int_0^1 p(s) \ln |w - s| ds = h(w).$$

Równanie tego typu było badane przez CARLEMANNĄ [6]. Jego rozwiązanie ma postać

$$(3.16) \quad p(s) = -\frac{1}{2\pi^2 \log \sqrt{s(1-s)}} \int_0^1 \frac{h(w)}{\sqrt{w(1-w)}} dw + \\ + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{s(1-s)}} \int_0^1 \frac{h'(w) \sqrt{w(1-w)}}{w-s} dw.$$

Oznaczając przez $p^*(s)$ tę część rozwiązania $p(s)$, która pojawia się z powodu występowania wyrazów niejednorodności w funkcji $h(w)$, a więc

$$(3.17) \quad p^*(s) = -\frac{1}{2\pi^2 \log 2 \sqrt{s(1-s)}} \int_0^1 \frac{\frac{m}{2} |2w - 1| + \frac{n}{2}}{\sqrt{w(1-w)}} dw + \\ + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{s(1-s)}} \int_0^1 \frac{\left(\frac{m}{2} |2w - 1| + \frac{n}{2}\right)' \sqrt{w(1-w)}}{w-s} dw,$$

dostaniemy

$$(3.18) \quad p(s) = p^*(s) + \left[\frac{1}{2\pi^2 \log 2 \sqrt{s(1-s)}} \int_0^1 \frac{\frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) I^3} \Delta(w) + \frac{P \ln 2}{2}}{\sqrt{w(1-w)}} dw - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi^2 \sqrt{s(1-s)}} \int_0^1 \frac{\frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) I^3} \Delta'(w) \sqrt{w(1-w)}}{w-s} dw \right].$$

Całki występujące w (3.17) są elementarne i dadzą się wyznaczyć efektywnie. Po ich obliczeniu i wykonaniu prostych przekształceń otrzymamy

$$p^*(s) = \frac{C}{2\pi^2 \log 2 \sqrt{s(1-s)}} - \frac{2m}{\pi^2} \ln \frac{1-2s}{1+2\sqrt{s(1-s)}} - \frac{m}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{s(1-s)}},$$

$$C = m \left(1 - \frac{\pi}{2} \right) + n \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

a powracając do zmiennej ξ znajdziemy

$$(3.19) \quad p^*(\xi) = \frac{-C}{\pi^2 \log 2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{2m}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{2m}{\pi^2} \ln \frac{|\xi|}{1+\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Jest to ta część naprężenia kontaktowego, jaka związana jest z fikcyjnym przemieszczeniem (rys. 2), a więc uwzględniająca wpływ niejednorodności ośrodka.

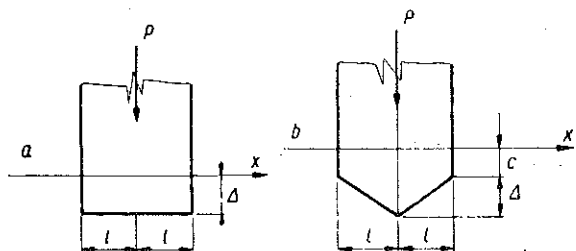
Ostateczne, całkowite naprężenie pod stemplem wynosi na podstawie (3.18) po uwzględnieniu (3.19):

$$(3.20) \quad p(\xi) = p^*(\xi) - \frac{P \ln 2}{2\pi \log 2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} + \left[\frac{E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right)^3 \pi \log 2 \sqrt{1-\xi^2}} \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 \frac{\Delta(w)}{\sqrt{w(1-w)}} dw - \frac{2E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right)^3 \pi \sqrt{1-\xi^2}} \int_0^1 \frac{\Delta'(w) \sqrt{w(1-w)}}{w - \frac{\xi+1}{2}} dw \right].$$

Wzór (3.20) podaje rozkład naprężeń kontaktowych dla dowolnego kształtu stempla $\Delta(w)$.

4. Przykłady

Jako przykład zastosowania wyprowadzonego wzoru rozważmy nacisk płaskiego stempla (rys. 3a) i stempla o kształcie prostoliniowego «ostrza» (rys. 3b).



Rys. 3

a. *Stempel płaski.* Wtedy $\Delta(w) = \Delta = \text{const}$. Całka występująca w (3.20) ma wartość

$$\int_0^1 \frac{\Delta(w)}{\sqrt{w(1-w)}} dw = \Delta \pi,$$

otrzymujemy więc

$$(4.1) \quad p(\xi) = p^*(\xi) + \frac{P \ln 2}{2\pi \log 2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{\Delta E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right)^3 \log 2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

a po uwzględnieniu (3.19)

$$(4.2) \quad p(\xi) = \frac{-C + \frac{P \ln 2}{2} + \Delta \frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right)^3}}{\pi \log 2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{2m}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{2m}{\pi^2} \ln \frac{|\xi|}{1+\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Całkując obustronnie w granicach $[0, 1]$ wyznaczmy związek pomiędzy siłą P , a przemieszczeniem Δ :

$$\frac{P}{2l} = \frac{-C + \frac{P \ln 2}{2} + \Delta \frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) l^3}}{\pi \log 2} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \frac{2m}{\pi^2} \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} + \ln \frac{|\xi|^{10}}{1 + \sqrt{1 - \xi^2}} \right] d\xi,$$

który po obliczeniu całek przyjmie postać

$$\frac{P}{2l} = \frac{-\frac{n}{2} + \frac{P \ln 2}{2} + \Delta \frac{\pi E_0}{\left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) l^3}}{\pi \log 2} \frac{\pi}{2} - \frac{2m}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - 1,6107 \right).$$

Uwzględniając dalej wartości m i n z (3.11) otrzymamy po prostych przekształceniach

$$(4.3) \quad \Delta = P \frac{\frac{1}{l} - \frac{2 \lg^2 - n' \pi}{4 \lg^2 2} + \frac{4m'}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2} - 1,6107 \right) + m' \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{\lg^2}}{\pi E_0} \left(1 - \frac{\nu_1}{2}\right) l^3 \log 2,$$

gdzie

$$(4.4) \quad n' = \frac{-\nu_1 B - (2 + \nu_1)(C + \ln 2\eta)}{2 - \nu_1}, \quad m' = \frac{2 + \nu_1}{2 - \nu_1} \pi \eta.$$

Podstawiając (4.3) do (4.2) dostaniemy ostatecznie

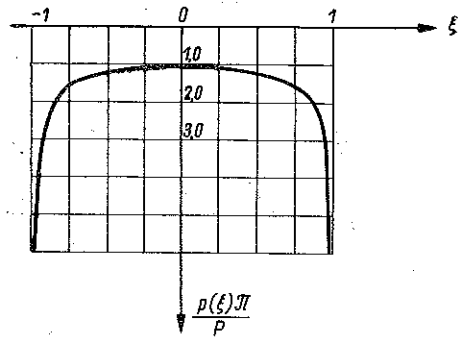
$$(4.5) \quad p(\xi) = \frac{P}{\pi l} \left[\frac{1 - 0,65m' l}{\sqrt{1 - \xi^2}} - \frac{2m' l}{\pi} \ln \frac{|\xi|}{1 + \sqrt{1 - \xi^2}} \right].$$

Wpływ niejednorodności jest stosunkowo nieduży ze względu na małą wartość m' , co wynika z (4.4). Np. dla płaskiego stanu odkształcenia przy $\nu = 0,2$, $l = 1$ m, $A = 0,01$ m⁻¹ mamy

$$\nu_1 = 0,25, \quad \eta = 0,005, \quad m' = 0,0202.$$

Dla takich wartości parametrów wykres naprężeń pod stemplem przedstawiono na rys. 4. Jest on niemal identyczny z podobnym wykresem dla ośrodka jednorodnego (różnice są rzędu kilku procent).

Wzór [4.5] traci ważność w otoczeniu 0 wskutek występowania wyrazu logarytmicznego, wynikającego z kształtu fikcyjnego przemieszczenia (rys. 2).



Rys. 4

b. *Stempel o kształcie ostrza prostoliniowego.* W tym przypadku

$$\Delta(x) = f(x) + c = -a|x| + \Delta + c,$$

gdzie $a = \operatorname{tg} \alpha$, a c oznacza przeszczenie stempla. Po zmianie zmiennej zgodnie z (2.15)₁ i (3.13)₂ znajdziemy

$$\Delta(w) = -2aw + \Delta + c + al, \quad w < 1/2.$$

Po podstawieniu do wzoru (3.20) i obliczeniu występujących całek dostaniemy

$$(4.6) \quad p(\xi) = p^*(\xi) + \frac{P \ln 2}{2\pi \log 2} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} + \frac{E_0}{l^3 \pi \left(1 - \frac{v_1}{2}\right) \log 2} \frac{D}{\sqrt{1-\xi^2}} +$$

$$+ \frac{4aE_0}{\left(1 - \frac{v_1}{2}\right) l^2 \pi \sqrt{1-\xi^2}} \left[\sqrt{1-\xi^2} \ln \frac{|\xi|}{1 + \sqrt{1-\xi^2}} + 1 \right], \quad D = \int_0^1 \frac{\Delta(w)}{\sqrt{w(1-w)}} dw,$$

a następnie

$$(4.7) \quad p(\xi) = \frac{A}{l^3 \left(1 - \frac{v_1}{2}\right) v^2 \pi^2 \log 2 \sqrt{1-\xi^2}} - \left(\frac{2m}{\pi^2} - \frac{4aE_0}{\left(1 - \frac{v_1}{2}\right) l^2 \pi} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} + \ln \frac{|\xi|}{1 + \sqrt{1+\xi^2}} \right).$$

$$A = E_0 D \pi - Cl^3 \left(1 - \frac{v_1}{2}\right) + P \frac{\ln 2}{2} \pi l^3 \left(1 - \frac{v_1}{2}\right).$$

Całkując obustronnie od zera do 1 otrzymamy

$$\frac{P}{2l} = \frac{A}{\pi^2 l^3 \left(1 - \frac{v_1}{2}\right) \lg 2} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{2m}{\pi^2} - \frac{4aE_0}{\left(1 - \frac{v_1}{2}\right) l^2 \pi} \right) \left(\frac{\pi}{2} - 1,6107 \right),$$

skąd

$$(4.8) \quad \frac{A}{\pi^2 l^3 \left(1 - \frac{v_1}{2}\right) \lg 2} = \frac{P}{l\pi} \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - 1,6107 \right) \frac{2m'}{\pi} l \right] -$$

$$- \frac{8aE_0}{\pi^2 l^2 \left(1 - \frac{v_1}{2}\right)} \left(\frac{\pi}{2} - 1,6107 \right).$$

Podstawiając ten wynik do (4.7) znajdziemy w końcu

$$(4.9) \quad p(\xi) = \frac{P}{\pi l} \left[\frac{1 - 0,65 m' l}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{2m' l}{\pi} \ln \frac{|\xi|}{1 + \sqrt{1-\xi^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{4aE_0}{\left(1 - \frac{v_1}{2}\right) \pi} \left[\frac{1,026}{\sqrt{1-\xi^2}} + \ln \frac{|\xi|}{1 + \sqrt{1-\xi^2}} \right] \right].$$

Jak widać, wpływ niejednorodności ośrodka jest analogiczny do wpływu w przypadku stempla płaskiego. Dla $a = 0$ otrzymujemy rozwiązanie zgodne z (4.5), a dla $\eta = 0$, $m' = 0$, skąd otrzymujemy rozwiązanie dla ośrodka jednorodnego.

Godnym uwagi jest fakt, iż w przytoczonych wzorach (4.5) i (4.9), podających rozkład naprężeń kontaktowych pod stemplem, nie figuruje parametr n' zawierający nieokreśloną stałą B .

Literatura cytowana w tekście

1. K. GIRKMAN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957.
2. M. J. LIGHTHILL, *Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji*, PWN, Warszawa 1963.
3. B. NOBLE, *Certain dual integral equations*, J. Math. Phys., 2, 1958.
4. M. PREDELEANU, P. P. TEODORESCU, *Quelques considerations sur le problème de corps elastiques heterogenes*, Non-Homogeneity in Elast. and Plastic., Proc. of the IUTAM Symp., Perg. Press, London 1958.
5. Н. А. РОСТОВЦЕВ, *К теории упругости неоднородной среды*, Прикл. Мат. Мех., 4, 28 (1964).
6. W. SCHMEIDLER, *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik u. Technik*, Lipsk 1955.
7. B. STACHOWICZ, G. SZEFER, *O pewnym zagadnieniu kontaktowym niejednorodnej półpłaszczyzny sprężystej*, Mech. Teoret. i Stosow., 2, 1966.
8. G. SZEFER, *Solution of certain dual integral equations*, Arch. Mech. Stos., 4, 16 (1964).

Резюме

НАЖИМ ШТАМПА НА НЕОДНОРОДНУЮ, УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

Дается эффективное решение контактной задачи, для симметрического штампа произвольной формы, лежащего без трения на неоднородной, упругой полуплоскости (рис. 1). Неоднородность среды определялась переменным по глубине модулем упругости формы (1.1).

Решение получено при использовании функций напряжений Эри и применений интегрального преобразования Фурье.

Контактная задача сводится к парным интегральным уравнениям (2.19). Применяя метод Нобля эти уравнения сводятся к интегральному уравнению Фредгольма первого рода (2.25), для которого дается приближенное (для малого параметра неоднородности A), однако эффективное, решение выраженное в квадратурах (3.20).

В заключение обсуждаются два примера: плоский штамп и прямолинейный штамп в форме «острия». Для обоих примеров даются решения (в классе элементарных функций). Приводятся диаграммы контактных напряжений под штампом (рис. 4).

Summary

THE PRESSURE OF A RIGID BODY AGAINST A NONHOMOGENEOUS SEMI-INFINITE ELASTIC PANEL

An effective solution is obtained for the contact problem of a symmetric body of any form in contact without friction with a nonhomogeneous elastic semi-infinite panel (Fig. 1). The nonhomogeneity of the body is expressed by a modulus of elasticity variable with the depth, in the form (1.1).

Solution is obtained by using the Airy stress function and applying the Fourier integral transformation.

The contact problem is reduced to dual integral equations (2.19) which are reduced, by means of the Noble method to a Fredholm integral equation of the first kind (2.25), for which is obtained an approximate (for a small nonhomogeneity parameter A) but effective solution expressed in quadratures (3.20).

The two examples given concern a blunt body and a wedge. The solutions (in the class of elementary functions) are obtained in both cases. The paper contains diagrams of stresses under the body in contact (Fig. 4).

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 marca 1966 r.
