

DRGANIA I ZGINANIE STATYCZNE POWŁOK
O ZMIENNYCH KRZYWIZNACH I O MAŁYCH WYNIOSŁOŚCIACH

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Powłoki sprężyste o małych wyniosłościach dzięki dużym zaletom ekonomicznym, konstrukcyjnym i architektonicznym są często stosowane jako dźwigary powierzchniowe, spełniające rolę przekryć dachowych. Z tego względu rozwiązania statyki i dynamiki tych powłok mają istotne znaczenie dla praktyki inżynierskiej.

Opisane w literaturze technicznej rozwiązania dotyczą w większości różnych szczególnych przypadków pod względem kształtu powłok i warunków brzegowych. Tylko niektóre ze znanych rozwiązań mają charakter ogólny, tzn. nie ograniczają się do ściśle określonych parametrów kształtu lub sposobów podparcia powłok (np. [1 i 2]).

W pracy tej rozważono problem drgań harmonicznym i problem zginania statycznego sprężystych, izotropowych powłok o małych grubościach i o małych wyniosłościach oraz o zmiennych krzywiznach i o różnych warunkach brzegowych. Rozważania dotyczą powłok dowolnie obciążonych i rozpiętych na prostokącie.

Punktem wyjścia jest układ dwóch równań różniczkowych cząstkowych dla amplitudy przemieszczenia normalnego i dla amplitudy funkcji naprężeń, uwzględniający uproszczenia i założenia przyjęte w tzw. technicznej teorii powłok W. Z. WŁASOWA [3].

W celu otrzymania rozwiązania, umożliwiającego spełnienie różnych warunków brzegowych zastosowano metodę skończonej transformacji Fouriera. Wyrażając amplitudę ugięcia i amplitudę funkcji naprężeń za pomocą podwójnego szeregu Fouriera doprowadzono rozwiązanie problemu brzegowego do dwóch niezależnych, nieskończonych układów algebraicznych, niejednorodnych równań liniowych. W jednym z tych układów równań występują niewiadome współczynniki szeregu Fouriera, opisującego równanie powierzchni ugięcia powłoki, w drugim zaś niewiadome współczynniki szeregu Fouriera, wyrażającego amplitudę funkcji naprężeń. Poza tym w otrzymanych układach równań występują wyrażenia zależne od amplitud ugięć i momentów zginających wzdłuż brzegów powłoki. Wyrażenia te w wielu przypadkach mogą być wyeliminowane po wykorzystaniu odpowiednich warunków wynikających ze sposobu podparcia powłoki.

W dalszej części pracy rozważono różne przypadki podparcia powłoki oraz otrzymano odpowiednie dla tych przypadków nieskończone układy algebraicznych

równań liniowych. Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań umożliwia obliczenie niewiadomych współczynników Fouriera oraz wyznaczenie amplitud ugięć i funkcji naprężeń, a następnie amplitud sił wewnętrznych. W przypadku drgań własnych doprowadzono rozwiązania do nieskończonych układów algebraicznych jednorodnych równań liniowych. Rozwiązania niezerowe tych układów równań (przy ograniczeniu się do pewnej skończonej liczby równań) umożliwiają wyznaczenie różnych częstości drgań własnych powłoki.

Znaczne uproszczenia można uzyskać dla niektórych kształtów powłok, np. w przypadku powłoki walcowej oraz w przypadku powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej.

Inne rozwiązanie problemu statyki i dynamiki powłok o małych wyniosłościach podano w pracy [1].

2. Rozwiązanie problemu

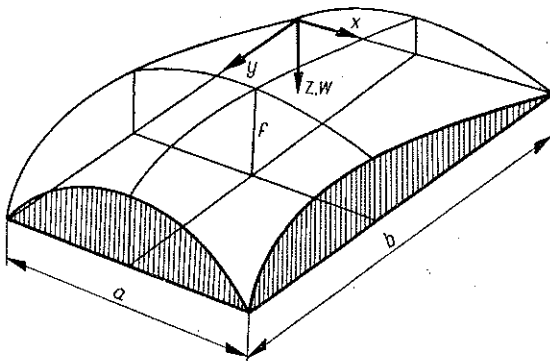
Układ równań różniczkowych, opisujący amplitudy harmonicznych drgań wymuszonych sprężystej, izotropowej powłoki o zmiennych krzywiznach i o małej wyniosłości ($5f < a$, gdzie $a \leq b$, por. rys. 1) można zgodnie z założeniami «technicznej» teorii powłok W. Z. Własowa napisać w postaci

$$(2.1) \quad L(\varphi) + D\nabla^4 w - \rho\omega^2 w = p, \quad \nabla^4 \varphi - EhL(w) = 0,$$

gdzie

$$(2.2) \quad L = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2k_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2.$$

W powyższych równaniach przyjęto oznaczenia: $\varphi = \varphi(x, y)$ jest amplitudą funkcji naprężeń, $w = w(x, y)$ — amplitudą ugięcia powłoki, $p = p(x, y)$ — ampli-



Rys. 1

tudą obciążenia wymuszającego drgania, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ — sztywnością zginania, E — modułem Younga, h — grubością powłoki, ν — współczynnikiem Poissona, ρ — masą przypadającą na jednostkę środkowej powierzchni powłoki,

ω — częstotścią drgań wymuszonych, k_1, k_2, k_{12} — krzywiznami środkowej powierzchni powłoki i wielkością charakteryzującą skręcenie tej powierzchni.

Krzywizny $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$ i wielkość $k_{12}(x, y)$ wyrażamy za pomocą wzorów

$$(2.3) \quad k_1 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad k_{12} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad k_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

gdzie $z = z(x, y)$ jest funkcją opisującą kształt środkowej powierzchni powłoki.

Amplitudy momentów zginających i skręcających, zgodnie z uproszczeniami przyjętymi w «technicznej» teorii powłok, wyrażamy za pomocą wzorów

$$(2.4) \quad M_1 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_2 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{12} = M_{21} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Uwzględniając wzory (2.4) przedstawimy układ równań różniczkowych (2.1) w następującej postaci:

$$(2.5) \quad L(\varphi) - \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - \rho \omega^2 w = p,$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi - L(w) = 0.$$

W celu otrzymania rozwiązania możliwie ogólnego ze względu na warunki brzegowe zastosujemy skończoną transformację Fouriera.

Założymy, że funkcje transformowane czynią zadość warunkom Dirichłeta w przedziale $0 < x < a$, $0 < y < b$.

Skończone sinusowe i cosinusowe transformacje wyrażamy następująco:

$$(2.6) \quad T_1^{mn} \{f_1(x, y)\} = \int_0^a \int_0^b f_1(x, y) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy = f_{mn}^{(1)},$$

$$T_2^{mn} \{f_2(x, y)\} = \int_0^a \int_0^b f_2(x, y) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \, dx \, dy = f_{mn}^{(2)},$$

gdzie

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}.$$

Stosując na podstawie wzoru (2.6)₁ skończoną transformację sinusową do funkcji $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ i $p(x, y)$ znajdujemy

$$(2.7) \quad T_1^{mn} \{w\} = w_{mn}, \quad T_1^{mn} \{\varphi\} = \varphi_{mn}, \quad T_1^{mn} \{p\} = p_{mn}.$$

Transformacje odwrotne funkcji $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ i $p(x, y)$ wyrażamy za pomocą następujących podwójnych szeregów Fouriera:

$$\begin{aligned} T_1^{-1} \{w_{mn}\} &= w(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ (2.8) \quad T_1^{-1} \{\varphi_{mn}\} &= \varphi(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\ T_1^{-1} \{p_{mn}\} &= p(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y. \end{aligned}$$

Stosując skończoną sinusową transformację Fouriera do układu równań (2.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (2.9) \quad T_1^{mn} \{L(\varphi)\} - T_1^{mn} \left\{ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} \right\} - \rho \omega^2 w_{mn} &= p_{mn}, \\ \frac{1}{Eh} T_1^{mn} \{\nabla^4 \varphi\} - T_1^{mn} \{L(w)\} &= 0. \end{aligned}$$

Ograniczając rozważania do powłok o brzegach podpartych przegubowo-przesuwnie lub utwierdzonych przesuwnie, albo o brzegach swobodnych, zapewnimy spełnienie warunków brzegowych zależnych od odpowiednich pochodnych funkcji $\varphi(x, y)$. Z tego względu zastosujemy całkowanie przez części tylko do tych funkcji, które nie zawierają pochodnych $\varphi(x, y)$.

Podstawiając szereg (2.8)₂ do pierwszego składnika w równaniu (2.12) i wykonując proste przekształcenia otrzymujemy

$$(2.10) \quad T_1^{mn} \{L(\varphi)\} = -\frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij} R_{ijmn},$$

gdzie

$$\begin{aligned} R_{ijmn} &= \alpha_i^2 k_{ijmn}^{(2)} + 2\alpha_i \beta_j k_{ijmn}^{(12)} + \beta_j^2 k_{ijmn}^{(1)}, \\ (2.11) \quad k_{ijmn}^{(2)} &= \int_0^a \int_0^b k_2(x, y) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy, \\ k_{ijmn}^{(12)} &= \int_0^a \int_0^b k_{12}(x, y) \cos \alpha_i x \cos \beta_j y \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy, \\ k_{ijmn}^{(1)} &= \int_0^a \int_0^b k_1(x, y) \sin \alpha_i x \sin \beta_j y \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Następnie przedstawimy w innej postaci skończone sinusowe transformacje amplitud pochodnych momentów M_1 , M_{12} i M_2 .

Całkując przez części drugi składnik w równaniu (2.9)₁, otrzymujemy

$$(2.12) \quad \begin{aligned} T_1^{mn} \left\{ \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} \right\} &= -\alpha_m^2 T_1^{mn} \{M_1\} - \alpha_m M_{mn}^{(1)}, \\ T_1^{mn} \left\{ \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} \right\} &= \alpha_m \beta_n T_2^{mn} \{M_{12}\}, \\ T_1^{mn} \left\{ \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} \right\} &= -\beta_n^2 T_1^{mn} \{M_2\} - \beta_n M_{mn}^{(2)}. \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.13) \quad \begin{aligned} M_{mn}^{(1)} &= \int_0^b [(-1)^m M_1(a, y) - M_1(0, y)] \sin \beta_n y \, dy, \\ M_{mn}^{(2)} &= \int_0^a [(-1)^n M_2(x, b) - M_2(x, 0)] \sin \alpha_m x \, dx. \end{aligned}$$

Podobnie, uwzględniając wzory (2.4), doprowadzamy transformacje amplitud momentów M_1 , M_{12} i M_2 do następującej postaci:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} T_1^{mn} \{M_1\} &= D [(\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) w_{mn} + \alpha_m W_{mn}^{(1)} + \nu \beta_n W_{mn}^{(2)}], \\ T_2^{mn} \{M_{12}\} &= D (\nu - 1) [\alpha_m \beta_n w_{mn} + \alpha_m W_{mn}^{(2)} + \beta_n W_{mn}^{(1)} + W_{mn}^{(0)}], \\ T_1^{mn} \{M_2\} &= D [(\nu \alpha_m^2 + \beta_n^2) w_{mn} + \nu \alpha_m W_{mn}^{(1)} + \beta_n W_{mn}^{(2)}], \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.15) \quad \begin{aligned} W_{mn}^{(1)} &= \int_0^b [(-1)^m w(a, y) - w(0, y)] \sin \beta_n y \, dy, \\ W_{mn}^{(2)} &= \int_0^a [(-1)^n w(x, b) - w(x, 0)] \sin \alpha_m x \, dx, \\ W_{mn}^{(0)} &= [(-1)^{m+n} w(a, b) + w(0, 0) - (-1)^m w(a, 0) - (-1)^n w(0, b)]. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe przekształcenia przedstawimy drugi składnik, występujący w równaniu (2.9)₂, w postaci

$$(2.16) \quad T_1^{mn} \left\{ \frac{\partial_1 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} \right\} = -D \Delta_{mn} w_{mn} + B_{mn},$$

gdzie

$$(2.17) \quad \begin{aligned} B_{mn} &= \alpha_m M_{mn}^{(1)} + \beta_n M_{mn}^{(2)} + D \alpha_m (\alpha_m^2 + 2\beta_n^2 - \nu \beta_n^2) W_{mn}^{(1)} + \\ &\quad + D \beta_n (\beta_n^2 + 2\alpha_m^2 - \nu \alpha_m^2) W_{mn}^{(2)} + 2\alpha_m \beta_n D (1 - \nu) W_{mn}^{(0)}, \\ \Delta_{mn} &= (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2. \end{aligned}$$

Ostatecznie po wykorzystaniu wyrażeń (2.10), (2.16) doprowadzamy równanie (2.9)₁ do nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych

$$(2.18) \quad \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij} R_{ijmn} - w_{mn} (D\Delta_{mn} - \rho\omega^2) - B_{mn} + p_{mn} = 0$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Następnie zajmiemy się równaniem (2.9)₂. Uwzględniając szereg (2.8)₂ wyrażamy pierwszy składnik następująco:

$$(2.19) \quad \frac{1}{Eh} T_1^{mn} \{\nabla^4 \varphi\} = \frac{1}{Eh} \nabla_{mn} \varphi_{mn}.$$

Natomiast drugi składnik, tj.

$$(2.20) \quad T_1^{mn} \{L(w)\} = T_1^{mn} \left\{ k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2k_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\}$$

przekształcamy, całkując przez części:

$$(2.21) \quad T_1^{mn} \left\{ k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} = -\alpha_m K_{mn}^{(2)} - \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \alpha_i^2 k_{ijmn}^{(2)},$$

$$T_1^{mn} \left\{ k_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} = \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \alpha_i \beta_j k_{ijmn}^{(12)},$$

$$T_1^{mn} \left\{ k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} = -\beta_n K_{mn}^{(1)} - \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} \beta_j^2 k_{ijmn}^{(1)},$$

gdzie

$$(2.22) \quad K_{mn}^{(2)} = \int_0^b [w(a, y) k_2(a, y) (-1)^m - w(0, y) k_2(0, y)] \sin \beta_n y \, dy,$$

$$K_{mn}^{(1)} = \int_0^a [w(x, b) k_1(x, b) (-1)^n - w(x, 0) k_1(x, 0)] \sin \alpha_m x \, dx,$$

a współczynniki $k_{ijmn}^{(1)}$, $k_{ijmn}^{(12)}$ i $k_{ijmn}^{(2)}$ wyrażają się za pomocą wzorów (2.11).

Ostatecznie, po wykorzystaniu przekształceń (2.19) i (2.21) doprowadzamy równanie (2.9)₂ do następującego, nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych:

$$(2.23) \quad \frac{\Delta_{mn}}{Eh} \varphi_{mn} + C_{mn} + \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} R_{ijmn} = 0 \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(2.24) \quad C_{mn} = \alpha_m K_{mn}^{(2)} + \beta_n K_{mn}^{(1)}.$$

Po zmianie indeksów otrzymujemy

$$(2.25) \quad \varphi_{rs} = -\frac{4Eh}{ab\Delta_{rs}} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} R_{ijrs} - \frac{Eh}{\Delta_{rs}} C_{rs}.$$

Uwzględniając wyrażenie (2.25) doprowadzamy układ równań (2.18) do postaci

$$(2.26) \quad w_{mn} = \frac{p_{mn} - H_{mn}^{(1)} - B_{mn} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} S_{mnij}^{(1)}}{D\Delta_{mn} - \rho\omega^2}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(2.27) \quad S_{mnij}^{(1)} = \frac{16Eh}{a^2 b^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{R_{ijrs} R_{rsmn}}{\Delta_{rs}}, \quad H_{mn}^{(1)} = \frac{4Eh}{ab} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{R_{rsmn} C_{rs}}{\Delta_{rs}}.$$

Układ równań (2.26) można również przedstawić w postaci

$$(2.28) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} [S_{mnij}^{(1)} + (D\Delta_{ij} - \rho\omega^2) \delta_{im} \delta_{jn}] = p_{mn} - H_{mn}^{(1)} - B_{mn}$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie δ_{im} i δ_{jn} oznaczają symbole Kroneckera.

Rozwiązanie problemu doprowadzono zatem do nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych, zawierających niewiadome współczynniki w_{ij} . Występujące w tych równaniach wyrażenia $H_{mn}^{(1)}$ i B_{mn} zależą od brzegowych amplitud ugięć i momentów zginających, które mogą być wyeliminowane po wykorzystaniu odpowiednich warunków, wynikających ze sposobu podparcia powłoki.

Ustawimy jeszcze układ równań, zawierający niewiadome współczynniki szeregu Fouriera, przedstawiającego funkcję $\varphi(x, y)$.

Na podstawie równania (2.18) znajdujemy

$$(2.29) \quad w_{rs} = \frac{1}{D\Delta_{rs} - \rho\omega^2} \left(p_{rs} - B_{rs} + \frac{4}{ab} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij} R_{ijrs} \right).$$

Podstawiając funkcję (2.29) do równania (2.25) i wykonując proste przekształcenia, otrzymujemy następujący nieskończony układ algebraicznych równań liniowych:

$$(2.30) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij} (S_{mnij}^{(1)} + D\Delta_{ij} \delta_{im} \delta_{jn}) = H_{mn}^{(2)} - DEhC_{mn} - Q_{mn},$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(2.31) \quad S_{mnij}^{(2)} = \frac{16Eh}{a^2 b^2} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{R_{ijrs} R_{rsmn}}{\Delta_{rs} - \Omega},$$

$$H_{mn}^{(2)} = \frac{4Eh}{ab} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{rs} R_{rsmn}}{\Delta_{rs} - \Omega},$$

$$Q_{mn} = \frac{4Eh}{ab} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{p_{rs} R_{rsmn}}{\Delta_{rs} - \Omega},$$

$$\Omega = \frac{\rho\omega^2}{D}.$$

Poza niewiadomymi współczynnikami φ_{ij} występują w układzie równań (2.30) wyrażenia $H_{mn}^{(2)}$, C_{mn} , zależne od amplitud wielkości brzegowych, które, jak już nadmieniono poprzednio, mogą być wyeliminowane po wykorzystaniu odpowiednich warunków, wynikających ze sposobu podparcia powłoki.

Znając współczynniki φ_{ij} , można wyznaczyć funkcję $\varphi(x, y)$ i obliczyć amplitudy sił membranowych na podstawie następujących wzorów:

$$(2.32) \quad N_1 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad N_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad N_2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Ogólne rozwiązanie problemu drgań harmoniczných rozważanych powłok doprowadzono ostatecznie do dwóch niezależnych, nieskończonych układów (2.28) i (2.30) algebraicznych równań liniowych. Rozważania dotyczą powłok o brzegach podpartych przegubowo przesuwnie lub utwierdzonych przesuwnie albo swobodnych, a więc powłok podpartych w taki sposób, który zapewnia znikanie wzdłuż brzegów amplitud sił N_1 i N_2 . Wzdłuż brzegów powłoki wystąpią tylko siły styczne N_{12} , ale naprężenia wywołane tymi siłami są na ogół bardzo małe w porównaniu z naprężeniami, pochodzącymi od momentów zginających i skręcających.

Występujące w wyrażeniach (2.17) i (2.24) wielkości zależą od funkcji opisujących amplitudy ugięć i momentów wzdłuż brzegów powłoki. Funkcje te mogą być wyrażone w postaci następujących pojedynczych szeregów Fouriera:

$$(2.33) \quad \begin{aligned} M_1(0, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n^{(1)} \sin \beta_n y, & M_1(a, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n^{(2)} \sin \beta_n y, \\ M_2(x, 0) &= \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(3)} \sin \alpha_m x, & M_2(x, b) &= \sum_{m=1}^{\infty} e_m^{(4)} \sin \alpha_m x, \\ w(0, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(1)} \sin \beta_n y, & w(a, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(2)} \sin \beta_n y, \\ w(x, 0) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(3)} \sin \alpha_m x, & w(x, b) &= \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(4)} \sin \alpha_m x. \end{aligned}$$

Podstawiając szeregi (2.33) do wzorów (2.13), (2.15) i (2.22), otrzymujemy

$$(2.34) \quad \begin{aligned} M_{mn}^{(1)} &= \frac{b}{2} [(-1)^m e_n^{(2)} - e_n^{(1)}], & M_{mn}^{(2)} &= \frac{a}{2} [(-1)^n e_m^{(4)} - e_m^{(3)}], \\ W_{mn}^{(1)} &= \frac{b}{2} [(-1)^m w_n^{(2)} - w_n^{(1)}], & W_{mn}^{(2)} &= \frac{a}{2} [(-1)^n w_m^{(4)} - w_m^{(3)}], \\ K_{mn}^{(1)} &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^a [(-1)^n w_i^{(4)} k_1(x, b) - w_i^{(3)} k_1(x, 0)] \sin \alpha_i x \sin \alpha_m x dx, \\ K_{mn}^{(2)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^b [(-1)^m w_j^{(2)} k_2(a, y) - w_j^{(1)} k_2(0, y)] \sin \beta_j y \sin \beta_n y dy. \end{aligned}$$

Na podstawie otrzymanych układów równań (2.28) i (2.30) można uzyskać rozwiązania wielu praktycznych problemów z zakresu statyki i dynamiki rozważanych powłok.

Następnie rozważymy kilka szczególnych przypadków kształtu i sposobu podparcia powłok.

3. Przypadki szczególne

1. Rozważmy powłokę o krzywiznach $k_1 = 0, k_{12} = 0, k_2 = k_2(y)$.

W tym przypadku wzór (2.11) upraszcza się następująco:

$$(3.1) \quad R_{ijmn} = \frac{a}{2} \alpha_i^2 k_{jn}^{(2)} \delta_{im},$$

gdzie

$$(3.2) \quad k_{jn}^{(2)} = \int_0^t k_2(y) \sin \beta_j y \sin \beta_n y dy.$$

Wzory (2.27)₁ i (2.31)₁ przyjmują postać

$$(3.3) \quad S_{mnij}^{(1)} = S_{mnj}^{(1)} \delta_{im}, \quad S_{mnij}^{(2)} = S_{mnj}^{(2)} \delta_{im},$$

gdzie

$$(3.4) \quad S_{mnj}^{(1)} = \frac{4Eh}{b^2} \alpha_m^4 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_{js}^{(2)} k_{sn}^{(2)}}{\Delta_{ms}}, \quad S_{mnj}^{(2)} = \frac{4Eh}{b^2} \alpha_m^4 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_{js}^{(2)} k_{sn}^{(2)}}{\Delta_{ms} - \Omega}.$$

Natomiast pozostałe wyrażenia, tj. (2.27)₂, (2.31)₂ i (2.31)₃ upraszczają się następująco:

$$(3.5) \quad H_{mn}^{(1)} = \frac{2Eh}{b} \alpha_m^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_{sn}^{(2)} C_{ms}}{\Delta_{ms}}, \quad H_{mn}^{(2)} = \frac{2Eh}{b} \alpha_m^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_{sn}^{(2)} B_{ms}}{\Delta_{ms} - \Omega},$$

$$Q_{mn} = \frac{2Eh}{b} \alpha_m^2 \sum_{s=2}^{\infty} \frac{k_{sn}^{(2)} P_{ms}}{\Delta_{ms} - \Omega},$$

gdzie zgodnie ze wzorami (2.22) i (2.24)

$$(3.6) \quad C_{ms} = \alpha_m K_{ms}^{(2)}, \quad K_{ms}^{(2)} = \int_0^b k_2(y) [w(a, y) (-1)^m - w(0, y)] \sin \beta_s y dy.$$

Uwzględniając powyższe formuły doprowadzamy równania (2.28) i (2.30) do postaci

$$(3.7) \quad \sum_{j=1}^{\infty} w_{mj} [S_{mnj}^{(1)} + (D\Delta_{mj} - \rho\omega^2) \delta_{jn}] = p_{mn} - H_{mn}^{(1)} - B_{mn},$$

$m, n = 1, 2, 3, \dots,$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{mj} [S_{mnj}^{(2)} + D\Delta_{mj} \delta_{jn}] = H_{mn}^{(2)} - DEhC_{mn} - Q_{mn},$$

$m, n = 1, 2, 3, \dots$

2. Rozważmy następnie przypadek powłoki o stałych krzywiznach k_1 i k_2 przy $k_{12} = 0$ (paraboloida eliptyczna).

W tym przypadku wyrażenie (2.11)₁ upraszcza się następująco:

$$(3.8) \quad R_{ijn} = \frac{ab}{4} \bar{R}_{mn} \delta_{im} \delta_{jn},$$

gdzie

$$(3.9) \quad \bar{R}_{mn} = \alpha_m^2 k_2 + \beta_n^2 k_1.$$

Zatem wzory (2.27), i (2.31), przyjmują postać

$$(3.10) \quad \begin{aligned} S_{mni}^{(1)} &= Eh \frac{\bar{R}_{mn}^2}{\Delta_{mn}} \delta_{im} \delta_{jn}, \\ H_{mn}^{(1)} &= Eh \frac{\bar{R}_{mn} C_{mn}}{\Delta_{mn}}, \\ S_{mni}^{(2)} &= Eh \frac{\bar{R}_{mn}^2}{\Delta_{mn} - \Omega} \delta_{im} \delta_{jn}, \\ H_{mn}^{(2)} &= Eh \frac{\bar{R}_{mn} B_{mn}}{\Delta_{mn} - \Omega}, \\ Q_{mn} &= Eh \frac{\bar{R}_{mn} p_{mn}}{\Delta_{mn} - \Omega}. \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe wzory doprowadzamy układy równań (2.28) i (2.30) do następującej postaci:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} w_{mn} &= \frac{(p_{mn} - B_{mn}) \Delta_{mn} - Eh \bar{R}_{mn} C_{mn}}{(D\Delta_{mn} - \rho\omega^2) \Delta_{mn} + Eh \bar{R}_{mn}}, \\ \varphi_{mn} &= \frac{Eh [\bar{R}_{mn} (B_{mn} - p_{mn}) - C_{mn} (D\Delta_{mn} - \rho\omega^2)]}{Eh \bar{R}_{mn} + \Delta_{mn} - \rho\omega^2}, \end{aligned}$$

przy czym wielkości $K_{mn}^{(1)}$ i $K_{mn}^{(2)}$ występujące we wzorze (2.24) są w tym przypadku następujące:

$$(3.12) \quad K_{mn}^{(1)} = \frac{a}{2} k_1 [(-1)^n w_m^{(4)} - w_m^{(3)}], \quad K_m^{(2)} = \frac{b}{2} k_2 [(-1)^m w_n^{(2)} - w_n^{(1)}].$$

W przypadku powłoki cylindrycznej o stałej krzywiznie k_1 należy przyjąć we wzorach (3.11) i (3.12) $k_2 = 0$.

Wielkości B_{mn} i C_{mn} zależą od wielkości brzegowych, które mogą być wyeliminowane po wykorzystaniu związków, wynikających z warunków brzegowych.

3. Rozważmy następnie powłokę podpartą wzdłuż wszystkich brzegów przegubowo-przesuwnie w sposób uniemożliwiający przesuw w kierunkach stycznych do brzegów (rys. 2).

W tym przypadku szeregi (2.7)₁ i (2.7)₂ spełniają wszystkie warunki brzegowe i znikają funkcje, opisujące amplitudy wielkości brzegowych. Otrzymujemy więc

$$B_{mn} = C_{mn} = H_{mn}^{(1)} = H_{mn}^{(2)} = 0.$$

Zatem układy równań (2.28) i (2.30) upraszczają się do postaci:

$$(3.13) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} [S_{mni}^{(1)} + (D\Delta_{ij} - \rho\omega^2) \delta_{im} \delta_{jn}] = p_{mn},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{ij} (S_{mni}^{(2)} + D\Delta_{ij} \delta_{im} \delta_{jn}) = -Q_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań z układów (3.13) umożliwia obliczenie współczynników w_{ij} i φ_{ij} . Znając te współczynniki można wyznaczyć amplitudy przemieszczeń i sił wewnętrznych.

Podobnemu uproszczeniu w tym przypadku ulegną również równania (3.7).

Przyrównując do zera wyznacznik podstawowy pierwszego z układów równań (3.13), otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$(3.14) \quad \det [S_{mni}^{(1)} + (D\Delta_{ij} - \rho\omega^2) \delta_{im} \delta_{jn}] = 0,$$

$$m, n, i, j = 1, 2, 3, \dots,$$

którego rozwiązania niezerowe umożliwiają wyznaczenie różnych częstości drgań własnych.

Jeżeli krzywizny k_1 i k_2 są stałe oraz $k_{12} = 0$, to korzystamy z równań (3.11), które w tym przypadku upraszczają się do postaci

$$(3.15) \quad w_{mn} = \frac{p_{mn} \Delta_{mn}}{(D\Delta_{mn} - \rho\omega^2) \Delta_{mn} + Eh \bar{R}_{mn}^2},$$

$$\varphi_{mn} = \frac{-p_{mn} Eh \bar{R}_{mn}}{(D\Delta_{mn} - \rho\omega^2) \Delta_{mn} + Eh \bar{R}_{mn}^2}.$$

Różne częstości drgań własnych można obliczyć ze znanego wzoru

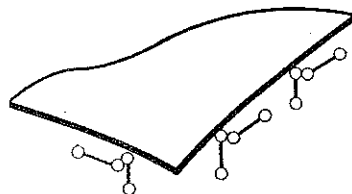
$$(3.16) \quad \omega_{mn}^2 = \frac{Eh \bar{R}_{mn}^2 + D\Delta_{mn}^2}{\rho\Delta_{mn}}.$$

4. Rozważmy powłokę utwierdzoną wzdłuż brzegu $x = 0$ oraz przegubowo przesuwnie podpartą wzdłuż trzech pozostałych brzegów. W tym przypadku zachodzi warunek:

$$(3.17) \quad \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0,$$

który po wykorzystaniu (2.8)₁ ma postać:

$$(3.18) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} a_m \sin \beta_n y = 0.$$



Rys. 2

Ponieważ warunek (3.18) jest spełniony dla każdej wartości y , więc można go przedstawić następująco:

$$(3.19) \quad \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} a_m = 0.$$

Uwzględniając fakt, że w tym przypadku wyrażenia (2.17), (2.27)₂ upraszczają się do postaci

$$(3.30) \quad H_{mn}^{(1)} = 0, \quad B_{mn} = -\frac{b}{2} a_m e_n^{(1)}$$

oraz podstawiając wyrażenie (2.26)₁ do równania (3.19), otrzymujemy

$$(3.21) \quad \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{[p_{mn} + b a_m e_n^{(1)} - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} S_{mni}^{(1)}]}{D \Delta_{mn} - \rho \omega^2} = 0.$$

Z równania (3.21) znajdujemy współczynnik

$$(3.22) \quad e_n^{(1)} = \frac{2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} S_{nij}^{(1)} - P_n^{(1)}}{b S_n^{(1)}},$$

gdzie

$$(3.23) \quad S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{\Delta_{kn} - \Omega}, \quad P_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k p_{kn}}{\Delta_{kn} - \Omega}, \quad S_{nij}^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k S_{knij}^{(1)}}{\Delta_{kn} - \Omega}.$$

Podstawiając wyrażenie (3.22) do równania (2.26) oraz wykonując proste przekształcenia, doprowadzamy w tym przypadku rozwiązanie do następującego nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych:

$$(3.24) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} [D (\Delta_{ij} - \Omega) S_j^{(1)} \delta_{im} \delta_{nj} - a_m S_{nij}^{(1)} + S_n^{(1)} S_{mni}^{(1)}] = p_{mn} S_n^{(1)} - a_m P_n^{(1)}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań układu (3.24) umożliwi obliczenie współczynników w_{ij} oraz wyznaczenie na podstawie szeregu (2.8)₁ amplitud ugięć środkowej powierzchni powłoki. Znając współczynniki w_{ij} oraz mając na uwadze, że w tym przypadku $C_{rs} = 0$, można ze wzoru (2.25) obliczyć współczynniki φ_{rs} oraz na podstawie szeregu (2.8)₂ określić funkcję $\varphi(x, y)$, a następnie za pomocą wzorów (2.32) obliczyć amplitudy sił wewnętrznych, występujących w powłoce.

Przyrównanie do zera wyznacznika podstawowego układu równań (3.24) daje równanie charakterystyczne

$$(3.25) \quad \det [D (\Delta_{ij} - \Omega) S_j^{(1)} \delta_{im} \delta_{jn} - a_m S_{nij}^{(1)} + S_n^{(1)} S_{mni}^{(1)}] = 0$$

$$m, n, i, j = 1, 2, 3, \dots,$$

które przy ograniczeniu się do pewnej skończonej liczby równań umożliwia obliczenie różnych częstości drgań własnych powłoki.

5. Rozważmy powłokę utwierdzoną wzdłuż dwóch przeciwległych brzegów $x = 0$, $x = a$ i przegubowo podpartą wzdłuż dwóch pozostałych brzegów.

W tym przypadku powinny być spełnione warunki

$$(3.26) \quad \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right]_{x=a} = 0,$$

które po wykorzystaniu (2.8)₁ przedstawimy w postaci

$$(3.27) \quad \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} a_m = 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} (-1)^m a_m = 0.$$

Uwzględniając fakt, że w tym przypadku wyrażenie (2.17) upraszcza się do postaci

$$(3.28) \quad B_{mn} = -\frac{b}{2} a_m [e_n^{(1)} - (-1)^m e_n^{(2)}]$$

oraz podstawiając wyrażenie (2.26) do równań (3.27), otrzymujemy po prostych przekształceniach następujący układ równań:

$$(3.29) \quad \begin{aligned} 2P_n^{(1)} + e_n^{(1)} S_n^{(1)} b - e_n^{(2)} S_n^{(2)} b - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} S_{nij}^{(1)} &= 0, \\ 2P_n^{(2)} + e_n^{(1)} S_n^{(2)} b - e_n^{(2)} S_n^{(1)} b - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} S_{nij}^{(2)} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie szeregi $S_n^{(1)}$, $S_{nij}^{(1)}$ i $P_n^{(1)}$ określone są za pomocą wzorów (3.23), a pozostałe szeregi są następujące:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} S_n^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 (-1)^k}{\Delta_{kn} - \Omega}, & S_{nij}^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{knij}^{(1)} a_k (-1)^k}{\Delta_{kn} - \Omega}, \\ P_n^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{kn} a_k (-1)^k}{\Delta_{kn} - \Omega}. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (3.29) względem współczynników $e_n^{(1)}$ i $e_n^{(2)}$ oraz podstawiając otrzymane wyrażenia do wzoru (2.26) znajdujemy ostatecznie następujący nieskończony układ algebraicznych, niejednorodnych równań liniowych:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} [DG_j (\Delta_{ij} - \Omega) \delta_{im} \delta_{jn} + G_n S_{mni}^{(1)} + \\ + a_m (S_n^{(1)} S_{nij}^{(1)} - S_n^{(2)} S_{nij}^{(2)} + a_m (-1)^m (S_n^{(1)} S_{nij}^{(2)} - S_n^{(2)} S_{nij}^{(1)})] = \\ = G_n p_{mn} + a_m (S_n^{(1)} P_n^{(1)} - S_n^{(2)} P_n^{(2)}) + a_m (-1)^m (S_n^{(1)} P_n^{(2)} - S_n^{(2)} P_n^{(1)}), \end{aligned}$$

$m, n = 1, 2, 3, \dots$

gdzie

$$(3.32) \quad G_n = [S_n^{(2)}]^2 - [S_n^{(1)}]^2.$$

Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań z układu (3.31) umożliwia obliczenie współczynników w_{ij} . Znając te współczynniki, można wyznaczyć amplitudy przemieszczeń i sił wewnętrznych, występujących w środkowej powierzchni powłoki.

Przyrównanie do zera wyznacznika podstawowego układu równań (3.31) daje równanie charakterystyczne:

$$(3.33) \quad \det [G_j D (\Delta_{ij} - \Omega) \delta_{im} \delta_{jn} + G_n S_{mni}^{(1)} + a_m (S_n^{(1)} S_{nij}^{(1)} - S_n^{(2)} S_{nij}^{(1)}) + \\ + a_m (-1)^m (S_n^{(1)} S_{nij}^{(2)} - S_n^{(2)} S_{nij}^{(1)})] = 0, \quad m, n, i, j = 1, 2, 3, \dots,$$

którego rozwiązanie przy ograniczeniu się do pewnej skończonej liczby równań w układzie (3.31) umożliwi obliczenie różnych częstości drgań własnych powłoki w rozważanym przypadku warunków brzegowych.

6. Rozważmy powłokę utwierdzoną wzdłuż dwóch przyległych brzegów $x = 0$, $y = 0$ i przegubowo podpartą wzdłuż dwóch pozostałych brzegów. W takim przypadku powinny być spełnione warunki

$$(3.34) \quad \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0,$$

które po wykorzystaniu (2.8)₁ wyrażamy w postaci

$$(3.35) \quad \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn} a_m = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \beta_n = 0.$$

Wzór (2.17) upraszcza się w tym przypadku następująco:

$$(3.36) \quad B_{mn} = -\frac{b}{2} a_m e_n^{(1)} - \frac{a}{2} \beta_n e_m^{(3)}.$$

Uwzględniając wzór (3.36) oraz podstawiając wyrażenie (2.26) do równań (3.35), otrzymujemy następujący układ równań:

$$(3.37) \quad 2P_n^{(1)} + e_n^{(1)} S_n^{(1)} b + a \beta_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e_m^{(3)} a_m}{\Delta_{mn} - \Omega} - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} S_{nij}^{(1)} = 0, \\ 2P_m^{(3)} + b a_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n^{(1)} \beta_n}{\Delta_{mn} - \Omega} + e_m^{(3)} S_m^{(3)} a - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_{ij} S_{mij}^{(3)} = 0,$$

gdzie szeregi $S_n^{(1)}$, $S_{nij}^{(1)}$ i $P_n^{(1)}$ określone są za pomocą wzorów (3.23), a pozostałe szeregi są następujące:

$$(3.38) \quad S_m^{(3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{\Delta_{mk} - \Omega}, \quad S_{mij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{mkij} \beta_k}{\Delta_{mk} - \Omega}, \quad P_m^{(3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{mk} \beta_k}{\Delta_{mk} - \Omega}.$$

W tym przypadku podparcia powłoki współczynniki $e_n^{(1)}$ i $e_m^{(3)}$ nie mogą być wyeliminowane, ponieważ występują pod znakami sum. Rozwiązanie doprowadzono do trzech nieskończonych układów algebraicznych równań liniowych (2.26) i (3.37), w których występują niewiadome współczynniki Fouriera w_{ij} , $e_n^{(1)}$ i $e_m^{(3)}$. Współczynniki te mogą być oczywiście obliczone przy ograniczeniu się do pewnej skończonej liczby równań oraz do pewnej skończonej liczby wyrazów w tych szeregach, w których wielkości niewiadome występują pod znakami sum. Znając wyżej wymienione współczynniki Fouriera, można wyznaczyć amplitudy przemieszczeń i sił wewnętrznych występujących w środkowej powierzchni powłoki.

7. Rozważmy powłokę o swobodnym brzegu wzdłuż $y = 0$ oraz przegubowo-przesuwnie podpartą wzdłuż pozostałych trzech brzegów. Założymy, że $k_1 = 0$, $k_{12} = 0$ oraz $k_2 = k_2(y)$.

W tym przypadku wzory (2.17), (2.24), (2.27)₂ i (2.34)₁ upraszczają się do postaci:

$$(3.39) \quad W_{mn}^{(1)} = 0, \quad W_{mn}^{(2)} = -\frac{a}{2} w_m^{(3)}, \quad K_{mn}^{(1)} = K_{mn}^{(2)} = 0, \quad C_{mn} = 0,$$

$$H_{mn}^{(1)} = 0, \quad B_{mn} = -\frac{Da}{2} \beta_n \gamma_{mn} w_m^{(3)},$$

gdzie

$$(3.40) \quad \gamma_{mn} = \beta_n^2 + 2\alpha_m^2 - \nu\alpha_m^2.$$

Współczynnik $w_m^{(3)}$ wyznaczamy z warunku, że wzdłuż brzegu $y = 0$ znika siła Kirchhoffa:

$$(3.41) \quad [V_2]_{y=0} = \left[\frac{\partial M_2}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x} \right]_{y=0} = 0.$$

Wyrażamy funkcję $V_2(x, y)$ w postaci następującego podwójnego szeregu Fouriera:

$$(3.42) \quad V_2(x, y) = \frac{4}{ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{mn} \lambda_n \sin \alpha_m x \cos \beta_n y,$$

gdzie $\lambda_n = 1 - 0,5\delta_{n0}$, a δ_{n0} oznacza symbol Kroneckera.

Uwzględniając szereg (3.42) przedstawiamy warunek (3.41) następująco:

$$(3.43) \quad \sum_{n=0}^{\infty} V_{mn} \lambda_n = 0,$$

gdzie

$$(3.44) \quad V_{mn} = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial M_2}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x} \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \, dx \, dy.$$

Wykonując całkowanie przez części oraz wykorzystując wzory (2.14) i (3.39), otrzymujemy

$$(3.45) \quad V_{mn} = D\beta_n \gamma_{mn} w_{mn} - \frac{Da}{2} (\gamma_{mn} - \nu\alpha_m^2) w_m^{(3)}.$$

Podstawiając zgodnie ze wzorem (3.7)₁ wielkość

$$(3.46) \quad w_{mn} = \frac{p_{mn} - B_{mn} - \sum_{j=1}^{\infty} w_{mj} S_{mnj}^{(1)}}{D(\Delta_{mn} - \Omega)}$$

do wzoru (3.45) oraz uwzględniając związki (3.39), otrzymujemy

$$(3.47) \quad V_{mn} = \frac{1}{\Delta_{mn} - \Omega} \left\{ \beta_n \gamma_{mn} \left[p_{mn} - \sum_{j=1}^{\infty} w_{mj} S_{mnj}^{(1)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{Da}{2} w_m^{(3)} [(v^2 \alpha_m^4 - \alpha_m^4 + \Omega) \beta_n^2 - 2\alpha_m^2 (1 - \nu) (\alpha_m^4 - \Omega)] \right\}.$$

Podstawiając (3.47) do równania (3.43), znajdujemy

$$(3.48) \quad w_m^{(3)} = \frac{2}{DaU_m} \left(F_m + \sum_{j=1}^{\infty} w_{mj} W_{mj} \right),$$

gdzie

$$(3.49) \quad U_m = S_m^{(3)} [\Omega - \alpha_m^4 (1 - \nu^2)] - 2S_m \alpha_m^2 (1 - \nu) (\alpha_m^4 - \Omega)$$

oraz

$$(3.50) \quad \begin{aligned} F_m &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{mn} \beta_n [\alpha_m^2 (2 - \nu) + \beta_n^2]}{\Delta_{mn} - \Omega}, \\ W_{mj} &= (2 - \nu) S_{mj}^{(1)} + S_{mj}^{(2)}, \\ S_{mj}^{(1)} &= \frac{4Eh}{b^2} \alpha_m^6 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_n k_{js}^{(2)} k_{sn}^{(2)}}{(\Delta_{mn} - \Omega) \Delta_{ms}}, \\ S_{mj}^{(2)} &= \frac{4Eh}{b^2} \alpha_m^{(4)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_n^3 k_{js}^{(2)} k_{sn}^{(2)}}{(\Delta_{mn} - \Omega) \Delta_{ms}}, \\ S_m^{(3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n^2}{\Delta_{mn} - \Omega}, \quad S_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta_{mn} - \Omega}. \end{aligned}$$

Ze wzorów (3.44) i (3.35), znajdujemy

$$(3.51) \quad B_{mn} = - \frac{\beta_n}{U_m} \gamma_{mn} \left(F_m + \sum_{j=1}^{\infty} w_{mj} W_{mj} \right).$$

Podstawiając wyrażenie (3.51) do wzoru (3.46) doprowadzamy ostatecznie rozwiązanie w rozważanym przypadku do następującego nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych:

$$(3.52) \quad \sum_{j=1}^{\infty} w_{mj} [DU_m (\Delta_{mn} - \Omega) \delta_{jn} - \beta_n \gamma_{mn} W_{mj} + S_{mnj}^{(1)} U_m] = \\ = p_{mn} U_m + \beta_n \gamma_{mn} F_m, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Rozwiązanie pewnej skończonej liczby równań umożliwia obliczenie współczynników w_{mj} . Znając te współczynniki, można wyznaczyć amplitudy przemieszczeń i sił wewnętrznych, występujących w środkowej powierzchni powłoki.

Przyrównanie do zera wyznacznika podstawowego układu równań (3.52) daje równanie charakterystyczne:

$$(3.53) \quad \det [DU_m (\Delta_{mn} - \Omega) \delta_{jn} - \beta_n \gamma_{mn} W_{mj} + S_{mnj}^{(1)} U_m] = 0, \\ m, n, j = 1, 2, 3, \dots,$$

którego rozwiązanie przy ograniczeniu się do pewnej skończonej liczby równań w układzie (3.52) umożliwia obliczenie różnych częstości drgań własnych powłoki w rozważanym przypadku.

4. Uwagi końcowe

Przedstawiony w tej pracy sposób rozwiązywania skomplikowanych i ważnych problemów brzegowych ze statyki i dynamiki powłok dachowych może znaleźć zastosowanie przy rozwiązywaniu wielu zagadnień, występujących w praktyce inżynierskiej. Istotną zaletę stanowi możliwość uwzględnienia różnych warunków brzegowych w powłokach o zmiennych krzywiznach. Mogą tu więc wchodzić w zakres rozważań powłoki walcowe, powłoki w kształcie paraboloidy eliptycznej lub w kształcie paraboloidy hiperbolicznej, konoidy i inne. Wymagającemu czytelnikowi mogą się nasuwać uwagi krytyczne odnośnie braku wykazania regularności otrzymanych nieskończonych układów algebraicznych równań liniowych. Wykazanie regularności tych układów równań jest jednak w rozważonych problemach bardzo trudne ze względu na ogólną i skomplikowaną postać współczynników (szeregi i wyrażenia całkowite). Otrzymanie konkretnych rozwiązań może być w pewnych przypadkach dość pracochłonne pod względem rachunkowym. Nie są to jednak obecnie istotne trudności wobec możliwości wykonania obliczeń za pomocą matematycznych maszyn liczących.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. MAZURKIEWICZ, A. WIWEGER, *Static and dynamic problems of elastic shells of small rise*, Arch. Mech. Stos., 2, 20 (1968).
2. W. PIETRASZKIEWICZ, *Przypadek obrotowej symetrii powłok o małej wyniosłości*, Rozpr. Inż., 2, 14 (1966).
3. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва 1949.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ И СТАТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННЫХ КРИВИЗН МАЛОЙ ПОЛОГОСТИ

В работе рассматривается вопрос гармонических колебаний и вопрос статического изгиба упругих, изотропных оболочек малой толщины и малой пологости, а также переменных кривизн с разными краевыми условиями. Разсуждения касаются произвольно нагруженных оболочек, построенных на плане прямоугольника.

Исходной точкой является система двух дифференциальных уравнений с частными производными, для амплитуды нормального перемещения и амплитуды функции напряжений, учитывающей упрощения и предположения, принятые в так наз. „технической” теории оболочек В. З. Власова.

Чтобы получить решение, дающее возможность удовлетворить разным краевым условиям, применяется метод конечного преобразования Фурье. Выражая амплитуду прогиба и амплитуду функции напряжений с помощью двойного ряда Фурье, решение краевой задачи сводится к двум независимым, алгебраическим неоднородным, линейным уравнениям. В одной из этих систем находятся неизвестные коэффициенты ряда Фурье, описывающие уравнение поверхности прогиба оболочки, а в другой — неизвестные коэффициенты ряда Фурье, выражающие амплитуду функции напряжений. Кроме того, в полученных системах уравнений, находятся выражения, зависящие от амплитуд прогибов и изгибающих моментов.

тов, вдоль краев оболочки. Эти выражения в многих случаях могут быть устранены, после использования соответствующих условий, вытекающих из способа опирания оболочки.

В дальнейшей части работы, рассматриваются разные практические случаи опирания оболочки и получаются, соответствующие для этих случаев, бесконечные системы алгебраических линейных уравнений. Решение некоторого количества уравнений, дает возможность вычислить неизвестные коэффициенты Фурье и определить амплитуды прогибов и функций напряжений, а затем амплитуды внутренних сил. Для случая собственных колебаний, решение сводится к бесконечным системам алгебраических, однородных линейных уравнений. Ненулевое решение этих уравнений (ограничиваясь некоторым конечным числом уравнений) дает возможность определить разные частоты собственных колебаний оболочки.

В работе показано, что полученные системы уравнений, подвергаются упрощениям в некоторых особых случаях форм оболочек, часто применяемых в кровельных перекрытиях.

Summary

VIBRATIONS AND STATIC BENDING OF SHALLOW SHELLS WITH VARIABLE CURVATURE

Two problems considered concern harmonic vibrations and static bending of elastic isotropic thin and shallow shells with variable curvature and various boundary conditions. The shells investigated are stretched over a rectangular profile and can be arbitrarily loaded.

The starting point is a set of two differential partial equations for the amplitudes of normal displacement and of stress function. This set takes into account the simplifications and assumptions introduced into the "technical" theory of shell developed by V. Z. Vlasov.

To obtain a solution enabling to fulfil various boundary conditions, the method of the Fourier finite transformation has been employed. By expressing the deflection amplitude and the stress function amplitude in the form of the double Fourier series, the solution to the boundary problem has been reduced to two independent infinite sets of algebraic nonhomogeneous linear equations. In one of these set, there appear coefficients of the Fourier series describing the equation of the shell deflection surface. The unknown coefficients of the Fourier series involved into the second set express the amplitude of the stress function. Moreover, the obtained sets of equations contain terms depending on the amplitudes of deflections and bending moments along the shell boundaries. These terms can be, in many cases, eliminated by making use of proper conditions resulting from the manner of shell support.

Various practical cases of the shell support are considered in the further part of the paper and the corresponding infinite sets of algebraic linear equations are obtained. Solving a finite number of these equations enables to calculate the Fourier unknown coefficients and then to determine amplitudes of deflections and stress functions and then of internal forces. In the case of free vibrations, the solutions are led to the infinite sets of algebraic homogeneous linear equations. The non-zero solutions to these sets of equations (with restriction to a finite number of equations) make possible to determine various free frequencies of the shell vibrations.

It has been shown in this work that the obtained sets of equations can be simplified for some particular shapes of shells widely applicable in roof coverings.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 czerwca 1968 r.