ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
4, 16 (1968)

MIKROEFEKTY SKALI W DYNAMICE OŚRODKA CIĄGŁEGO

KRZYSZTOF WILMAŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Przedmiotem rozważań przedstawionych w poniższej pracy są pewne zagadnienia dynamiki ciał z mikrostrukturą. Punktem wyjścia są wyniki uzyskane w pracach [3 - 5]. Zasadniczym celem badań jest określenie wpływu mikrostruktury i efektów skali w mikrostrukturze na makroskopowy opis ośrodka ciągłego. Rozpatrzymy model uproszczony przyjmując, że wpływ wymiarów makrocząstek na własności materiału jest opisany dostatecznie dokładnie, gdy uwzględnimy dalekie oddziaływanie dwu punktów mikrostruktury. Pomijamy natomiast efekty pamięci i tzw. makroefekty skali (por. [3 i 5]). Tym samym zagadnienie jest lokalne w czasie i w przestrzeni makrocząsteczek.

Oprócz powyższych założeń przyjmiemy również uproszczenia w kinematyce ośrodka. Zostaną one omówione w p. 3 pracy. W p. 4 wyprowadzono podstawowy układ równań i przeprowadzono jego analizę, natomiast w p. 5 — jego linearyzację.

W pracy posługujemy się oznaczeniami wprowadzonymi we wcześniejszych pracach. Dlatego podamy tu tylko ważniejsze z nich. Przez Ω będziemy oznaczali zbiór cząstek X ciała z mikrostrukturą, przez Δ natomiast zbiór mikroelementów Z tego ciała. Zarówno jeden jak i drugi zbiór będzie w naszym przypadku trójwymiarową elementarną rozmaitością różniczkowalną [1]. Ruch tego ośrodka opisują dwie funkcje: makroruch cząstek X opisują funkcje $\psi^k(X^K; \tau)$, mikroruch opisują funkcje $\chi^k(Z^A; X^K; \tau) = \psi^k(X^K; \tau) + \varphi^k(Z^A; X^K; \tau)$. Funkcje φ^k są opisem ruchu względnego mikroelementów Z, zlokalizowanych w cząstce X.

Przez W oznaczać będziemy działania, a przez L i $\hat{L}$ funkcje dynamiczne, z których pierwsza opisuje własności dynamiczne makroukładu, a $\hat{L}$ — mikrostruktury.

Pozostałe oznaczenia omówimy w miarę ich wprowadzania.

2. Całka działania, równania ruchu i warunki niezmienniczości

Ze względu na szczegółowe omówienie przedstawionych w tym punkcie zagadnień w pracach [2 - 5] ograniczymy się tu do skrótowego przedstawienia najważniejszych wyników, potrzebnych do dalszych wywodów.

Ciałem z mikrostrukturą będziemy nazywali ośrodek ciągły z mikrostrukturą w sensie definicji w pracy [1], posiadający własności dynamiczne. Odnośnie ciała z mikrostrukturą przyjmiemy następujące postulaty:

A. Wszystkie własności dynamiczne ciała z mikrostrukturą opisuje całka działania o postaci

$$
(2.1) \qquad W = \int_{T\times\Omega} \Big[L(X^K, \tau, \psi^k_{,K}\,\psi^k, \dot{\psi}^k) + \\
+ \int_{\Delta\times\Delta} \hat{L}(Z^A, \bar{Z}^A, X^K, \tau, \psi^k, \psi^k_{,K}, \dot{\psi}^k, \chi^k, \bar{\chi}^k, \chi^k_{,A}, \bar{\chi}^k_{,A}, \dot{\chi}^k, \dot{\bar{\chi}}^k)\, d\bar{\Delta}\, d\Delta \Big] d\Omega\, d\tau,
$$

gdzie

$$
\psi^k_{,K} \equiv \frac{\partial\psi^k}{\partial X^K}, \; \dot{\psi}^k \equiv \frac{\partial\psi^k}{\partial\tau}, \; \chi^k_{,A} \equiv \frac{\partial\chi^k}{\partial Z^A}, \; \bar{\chi}^k_{,A} \equiv \frac{\partial\bar{\chi}^k}{\partial\bar{Z}^A} \quad \text{itd.}
$$

oraz

$$
\bar{\chi}^k \equiv \chi^k(\bar{Z}^A, X^K, \tau), \; \bar{Z}^A \in \Delta, \; Z^A \in \Delta, \; X^K \in \Omega, \tau \in T;
$$

$$
d\Delta \equiv dZ^1\, dZ^2\, dZ^3, \; d\bar{\Delta} \equiv d\bar{Z}^1\, d\bar{Z}^2\, d\bar{Z}^3, \; d\Omega \equiv dX^1\, dX^2\, dX^3.
$$

Punkty stacjonarności tego funkcjonału są wyznaczone przez równania ruchu ciała. Jak wspominaliśmy we wstępie, całka działania (2.1) została przyjęta w takiej postaci, aby otrzymać zagadnienie lokalne w czasie i w przestrzeni Ω, zachowując dalekie oddziaływanie w mikrostrukturze. Ten ostatni fakt wyraża się w związku (2.1) występowaniem funkcji dynamicznej $\hat{L}$ dwu punktów Z i $\bar{Z}$ przestrzeni Δ.

Wariacja funkcjonału W wywołana zmianą postaci zmiennych dynamicznych $\delta_0\psi^k$ i $\delta_0\chi^k$ oraz zmianą przestrzeni bazowej ma w naszym przypadku postać

$$
(2.2) \qquad \delta W = \int_{T\times\Omega} \Big[\frac{\partial L}{\partial\psi^k}\delta_0\psi^k + \frac{\partial L}{\partial\psi^k_{,K}}\delta_0\psi^k_{,K} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}^k}\delta_0\dot{\psi}^k + \int_{\Delta\times\Delta} \Big(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\psi^k}\delta_0\psi^k + \\
+ \frac{\partial\hat{L}}{\partial\psi^k_{,K}}\delta_0\psi^k_{,K} + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\psi}^k}\delta_0\dot{\psi}^k + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\chi^k}\delta_0\chi^k + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\bar{\chi}^k}\delta_0\bar{\chi}^k + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\chi^k_{,A}}\delta_0\chi^k_{,A} + \\
+ \frac{\partial\hat{L}}{\partial\bar{\chi}^k_{,A}}\delta_0\bar{\chi}^k_{,A} + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\chi}^k}\delta_0\dot{\chi}^k + \frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{\bar{\chi}}^k}\delta_0\dot{\bar{\chi}}^k \Big) d\bar{\Delta}\, d\Delta \Big] d\Omega\, d\tau + \Big[\int_{\Omega} \Big(L + \\
+ \int_{\Delta\times\Delta} \hat{L}\, d\bar{\Delta}\, d\Delta \Big) d\Omega\, \delta\tau \Big]_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_T \oint_\Pi \Big(L + \int_{\Delta\times\Delta} \hat{L}\, d\bar{\Delta}\, d\Delta \Big) \delta X^K\, d\Pi_K\, d\tau + \\
+ \int_{T\times\Omega\times\Delta} \oint_\Sigma \hat{L}\,\delta Z^A\, d\Sigma_A\, d\bar{\Delta}\, d\Omega\, d\tau.
$$

We wzorze (2.2) $d\Pi_K \equiv N_K\, d\Pi$ jest zorientowanym elementem powierzchni Π otaczającej obszar Ω; natomiast $d\Sigma_A \equiv \hat{N}_A\, d\Sigma$ jest zorientowanym elementem powierzchni otaczającej obszar Δ mikrostruktury.

Stosując do wzoru (2.2) zasadę stacjonarności działania otrzymujemy następujący układ równań ruchu:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k_{,K}}\right)_{,K} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^k}\right)^{\cdot} = 0, \\ &\frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^k} - \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^k_{,A}}\right)_{,A} - \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\chi}^k}\right)^{\cdot} = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdzie

$$\mathcal{L} \equiv L + \int_{\Delta \times \Delta} \hat{L} d\bar{\Delta}\, d\Delta. \tag{2.4}$$

Jeśli ciało z mikrostrukturą oddziałuje z polami zewnętrznymi, to równania (2.3) nie są spełnione. Przyjmujemy, że wpływ tego oddziaływania można opisać za pomocą pól wektorowych $b_k \equiv b_k(X^K; \tau)$ i $\hat{b}_k \equiv \hat{b}_k(Z^A, \bar{Z}^A, X^K, \tau)$. Wtedy równania ruchu można napisać w postaci

$$\begin{aligned} &t^K_{\cdot k, K} + b_k = \dot{m}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k}, \\ &\hat{t}^A_{\cdot k, A} + \hat{b}_k = \dot{\hat{m}}_k - \frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^k}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\begin{aligned} &t^K_{,k} \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k_{,K}}, \qquad \hat{t}^A_{,k} \equiv -\frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^k_{,A}}, \\ &m_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^k}, \qquad \hat{m}_k \equiv \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\chi}^k}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Mimo pozornego podobieństwa, ze względu na nielokalność oddziaływań, tensorów $t^K_{,k}$ i $\hat{t}^A_{,k}$ nie można interpretować jako tensorów naprężenia w ośrodku. W rozpatrywanym przypadku nie ma na ogół sensu pojęcie siły kontaktowej, a tym samym również pojęcie naprężenia.

B. Zakładamy, że funkcjonał działania W jest niezmienniczy względem grupy przekształceń euklidesowych

$$\begin{aligned} &x^k \to x^k + \varepsilon^k + \varepsilon^k_{,l}\, x^l, \\ &\tau \to \tau + \varepsilon, \qquad \varepsilon^{kl} = -\varepsilon^{lk}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie x^k są współrzędnymi punktów przestrzeni odniesienia, a τ — współrzędnymi czasu. Zakładamy poza tym, że grupa jest infinitezymalna. Jako wynik tego postulatu otrzymujemy następujący układ zasad zachowania:

zasada zachowania pędu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} + 2 \int_{\Delta \times \Delta} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^k} d\bar{\Delta}\, d\Delta = 0; \tag{2.8}$$

zasada zachowania momentu pędu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{[k}} \psi_{l]} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^{[k}_{,K}} \psi_{l],K} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^{[k}} \dot{\psi}_{l]} + 2 \int_{\Delta \times \Delta} \left(\frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^{[k}} \chi_{l]} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^{[k}_{,A}} \chi_{l],A} + \right. $$
$$\left. + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\chi}^{[k}} \dot{\chi}_{l]} \right) d\bar{\Delta}\, d\Delta = 0; \tag{2.9}$$

zasada zachowania energii

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = 0. \tag{2.10}$$

Szczegóły dotyczące wyprowadzenia powyższych wzorów można znaleźć w pracy [5].

C. Zakładamy, że względem grupy (2.7) są również niezmiennicze funkcje L i $\hat{L}$. Wynikiem tego założenia są wzory

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \hat{L}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi^k} = 0, \quad \frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi^k} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^k} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \bar{\chi}^k} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \psi^{[k}_{,K}} \psi_{l],K} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^{[k}} \dot{\psi}_{l]} = 0, \quad \frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi^{[k}} \psi_{l]} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \psi^{[k}_{,K}} \psi_{l],K} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\psi}^{[k}} \dot{\psi}_{l]} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^{[k}} \chi_{l]} + \\ + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^{[k}_{,A}} \chi_{l],A} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\chi}^{[k}} \dot{\chi}_{l]} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \bar{\chi}^{[k}} \bar{\chi}_{l]} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \bar{\chi}^{[k}_{,A}} \bar{\chi}_{l],A} + \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\bar{\chi}}^{[k}} \dot{\bar{\chi}}_{l]} = 0. \end{gathered} \tag{2.11}$$

We wspomnianej już pracy [5] wykazano, że związki (2.11) są warunkami dostatecznymi zachodzenia zasad zachowania (2.8 – 2.10).

Na skutek założenia C funkcje L i $\hat{L}$ można budować w ten sposób, aby ich argumentami były zmienne, występujące w nawiasach poniższych wyrażeń:

$$\begin{aligned} L &= L(X^K, E_{KL}, \dot{\psi}^k), \\ \hat{L} &= \hat{L}(Z^A, \bar{Z}^A, X^K, E_{KL}, \dot{\psi}^k, C_{KA}, \bar{C}_{KA}, B_K, \bar{B}_K, D_K, \bar{D}_K), \end{aligned} \tag{2.12}$$

gdzie

$$\begin{aligned} 2E_{KL} &\equiv \psi^k_{,K} \psi^l_{,L} g_{kl} - G_{KL}, \\ C_{KA} &\equiv \psi^k_{,K} \varphi^l_{,A} g_{kl}, & \bar{C}_{KA} &\equiv \psi^k_{,K} \bar{\varphi}^l_{,A} g_{kl}, \\ B_K &\equiv \psi^k_{,K} \varphi^l g_{kl}, & \bar{B}_K &\equiv \psi^k_{,K} \bar{\varphi}^l g_{kl}, \\ D_K &\equiv \psi^k_{,K} \dot{\varphi}^l g_{kl}, & \bar{D}_K &\equiv \psi^k_{,K} \dot{\bar{\varphi}}^l g_{kl}, \\ \varphi^k &\equiv \chi^k - \psi^k, & \bar{\varphi}^k &\equiv \bar{\chi}^k - \psi^k \end{aligned} \tag{2.13}$$

oraz gdzie wykorzystano założenie

$$\det \psi^k_{,K} > 0. \tag{2.14}$$

D. Jako ostatnie założenie przyjęto, że równania ruchu (2.5) są niezmiennicze względem grupy przekształceń Galileusza

$$x^k \to x^k + v^k \tau, \qquad v^k = \text{const}. \tag{2.15}$$

Zmiana funkcjonału W, wywołana przekształceniem (2.15), ma postać

$$\Delta W = \int_{T\times\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^k} v^k + \int_{\Delta\times\Delta} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\psi}^k} v^k \, d\bar{\Delta}\, d\Delta \right) d\Omega\, d\tau, \tag{2.16}$$

gdyż

$$\psi^k \to \psi^k + v^k \tau, \qquad \psi^k_{,K} \to \psi^k_{,K}, \qquad \dot{\psi}^k \to \dot{\psi}^k + v^k \tag{2.17}$$

oraz $\varphi^k \to \varphi^k$, co wynika ze związku

$$\chi^k \to \chi^k + v^k \tau \tag{2.18}$$

i zależności $(2.13)_8$.

Aby zmiana ΔW nie wpływała na równania ruchu, powinna być przedstawialna w postaci całek powierzchniowych

$$v^k \int_{T\times\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^k} + \int_{\Delta\times\Delta} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\psi}^k} d\bar{\Delta}\, d\Delta \right) d\Omega\, d\tau = v^k \int_{T\times\Omega} \Big[F^K_{k,K} + \dot{F}_k + \\ + \int_{\Delta\times\Delta} (\hat{F}^A_{k,A} + \dot{\hat{F}}_k)\, d\bar{\Delta}\, d\Delta \Big] d\Omega\, d\tau. \tag{2.19}$$

Ze względu na lokalność w czasie i przestrzeni Ω oraz wykorzystując oznaczenie (2.4) otrzymujemy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^k} = F^K_{k,K} + \dot{\mathcal{F}}_k + \int_{\Delta\times\Delta} \hat{F}^A_{k,A}\, d\bar{\Delta}\, d\Delta. \tag{2.20}$$

Rozwiązanie tego równania można napisać w postaci

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{\psi}^k \dot{\psi}^l g_{kl} + \vartheta^K \psi^k_{,K} \dot{\psi}^l g_{kl} - \epsilon (X^K; E_{KL}) - \\ - \int_{\Delta\times\Delta} \epsilon_M (Z^A, \bar{Z}^A, X^K, E_{KL}, C_{KA}, \bar{C}_{KA}, B_K, \bar{B}_K, D_K, \bar{D}_K)\, d\bar{\Delta}\, d\Delta. \tag{2.21}$$

Dalej przyjmujemy $\vartheta^K \equiv 0$ (por. [2]). Wtedy z (2.21) wynikają związki

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \mu_0 \dot{\psi}^k \dot{\psi} g_{kl} - \epsilon (X^K, E_{KL}), \\ \hat{L} &= - \epsilon_M (Z^A, \bar{Z}^A, X^K, E_{KL}, C_{KA}, \bar{C}_{KA}, B_K, \bar{B}_K, D_K, \bar{D}_K). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Wzory (2.22) stanowią punkt wyjścia dalszych rozważań.

3. Stan przemieszczenia ciała z mikrostrukturą

Oprócz omówionych założeń dynamicznych przyjmiemy dodatkowo, że ruch ośrodka można opisać wektorami przemieszczenia. Mianowicie niech zachodzą związki:

$$\begin{aligned} \psi^k &= \delta^k_K X^K + u^k(X^K, \tau), \\ \varphi^k &= \delta^k_A Z^A + w^k(Z^A, X^K, \tau). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Funkcje u^k są współrzędnymi wektora $\boldsymbol{u}$ makroprzemieszczenia, a funkcje w^k są współrzędnymi wektora $\boldsymbol{w}$ mikroprzemieszczenia. Będziemy dalej dopuszczali jedynie jednorodne odkształcenie mikrostruktury. Wtedy wektor mikroprzemieszczenia ma postać

$$w^k = \omega_{l\cdot}^{\ k}\, \delta^l_A Z^A. \tag{3.2}$$

Wprowadzenie powyższego związku bardzo zawęża klasę badanych zagadnień, ale pozwala jednocześnie w sposób najprostszy wprowadzić do makroopisu poprawki wynikające z istnienia mikrostruktury i mikroefektu skali. Tensor $\omega_{l\cdot}^{\ k}$, opisujący mikroodkształcenie, jest jedynie funkcją X^K i τ. Jest więc mikrojednorodny i makroniejednorodny. Jego część symetryczna opisuje odkształcenia objętościowe i postaciowe, a część antysymetryczna — obrót mikrostruktury, zlokalizowanej w cząstce $\boldsymbol{X}$.

Wykorzystując związki (3.1) i (3.2) we wzorach (2.13) otrzymamy

$$\begin{aligned} E_{KL} &= (u^k_{,(K}\delta^l_{L)} + \tfrac{1}{2} u^k_{,K} u^l_{,L})\, g_{kl}, \\ C_{KA} &= (\delta^k_K + u^k_{,K})\, \omega_{n\cdot}^{\ l}\, \delta^n_A g_{kl} = \bar{C}_{KA}, \\ B_K &= (\delta^k_K + u^k_{,K})(\delta^l_n + \omega_{n\cdot}^{\ l})\, \delta^n_A g_{kl} Z^A, \\ \bar{B}_K &= (\delta^k_K + u^k_{,K})(\delta^l_n + \omega_{n\cdot}^{\ l})\, \delta^n_A g_{kl} \bar{Z}^A, \\ D_K &= (\delta^k_K + u^k_{,K})\, \dot{\omega}_{n\cdot}^{\ t}\, \delta^n_A g_{kl} Z^A, \\ \bar{D}_K &= (\delta^k_K + u^k_{,K})\, \dot{\omega}_{n\cdot}^{\ l}\, \delta^n_A g_{kl} \bar{Z}^A. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wprowadźmy dodatkowo oznaczenia

$$\begin{aligned} D_{KL} &\equiv g_{kl}\, \psi^k_{,K}\, \dot{\omega}_{n\cdot}^{\ l}\, \delta^n_L = (\delta^k_K + u^k_{,K})\, \delta^n_L\, \dot{\omega}_{n\cdot}^{\ l}\, g_{kl}, \\ \hat{C}_{KL} &\equiv g_{kl}\, \psi^k_{,K}\, \delta^n_L\, \omega_{n\cdot}^{\ l} = (\delta^k_K + u^k_{,K})\, \delta^k_L\, \omega_{n\cdot}^{\ l}\, g_{kl}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} C_{KA} &= \bar{C}_{KA} = \hat{C}_{KL}\, \delta^L_A, \\ B_K &= \psi^k_{,K}\, \delta^l_A g_{kl} Z^A + \hat{C}_{KL}\, \delta^L_A Z^A, \\ \bar{B}_K &= \psi^k_{,K}\, \delta^l_A g_{kl} \bar{Z}^A + \hat{C}_{KL}\, \delta^L_K \bar{Z}^A, \\ D_K &= D_{KL}\, \delta^L_A Z^A, \\ \bar{D}_K &= D_{KL}\, \delta^L_A \bar{Z}^A. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Związki (3.5) pozwalają przyjąć funkcje dynamiczne L i $\hat{L}$ w postaci

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} L &= \tfrac{1}{2}\mu_0 \dot{u}^k \dot{u}^l g_{kl} - \epsilon(X^K, E_{KL}),\\ \hat{L} &= -\epsilon_M(Z^A, \bar{Z}^A, X^K, E_{KL}, \hat{C}_{KL}, D_{KL}). \end{aligned}$$

Zmienne B_K i $\bar{B}_k$ można bowiem wyznaczyć znając zmienne E_{KL} i $\bar{C}_{KL}$ i tym samym nie są one niezależne. Współczynnik μ_0 w funkcji L można interpretować jako «makrogęstość» ośrodka na jednostkę objętości przestrzeni Ω. Nawet w rozpatrywanym przez nas uproszczonym modelu z ogólnych kryteriów teorii dynamicznej nie wynika możliwość wprowadzenia odpowiadającej jej wielkości w przestrzeni Δ mikrostruktury.

Przyjmiemy wreszcie jeszcze jedno założenie odnośnie budowanej teorii nieliniowej. Założymy mianowicie, że funkcję ϵ_M można przedstawić w postaci

$$(3.7)\qquad \epsilon_M = \delta(Z^A, \bar{Z}^A)\,\hat{\epsilon}(X^K, E_{KL}, \hat{C}_{KL}, D_{KL}).$$

Jak to wynika z przeprowadzonych rozważań funkcja $\hat{\epsilon}$ nie zależy od mikrozmiennych materialnych Z^A. Podziału określonego wzorem (3.7) dokonujemy w ten sposób, by funkcja $\hat{\epsilon}$ miała wymiar energii. Jest to celowe ze względu na późniejszą linearyzację. Funkcja $\delta(Z^A, \bar{Z}^A)$ ma wtedy wymiar [1/cm^6]. W przypadku najprostszych oddziaływań coulombowskich funkcja $\delta(Z^A, \bar{Z}^A)$ ma postać

$$(3.8)\qquad \delta(Z^A, \bar{Z}^A) = \frac{1}{l^4\,\delta_{AB}(Z^A - \bar{Z}^A)(Z^B - \bar{Z}^B)},$$

gdzie l jest pewnym charakterystycznym wymiarem mikrostruktury. Przypadek ten omówiono szczegółowo w pracy [6].

4. Układ równań przemieszczeniowych

Równania przemieszczeniowe otrzymamy bezpośrednio z równań ruchu (2.5). W tym celu przedstawimy w formie rozwiniętej najpierw związki (2.6), wykorzystując funkcje L i $\hat{L}$ w postaci (3.6). Dla tensora $t^K_{,k}$ mamy

$$\begin{aligned} t^K_{.k} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k_{,K}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \psi^k_{,K}} + \int\limits_{\Delta\times\Delta} \frac{\partial \epsilon_M}{\partial \psi^k_{,K}}\, d\bar{\Delta}\, d\Delta = \\ &= \frac{\partial \epsilon}{\partial E_{LM}} \frac{\partial E_{LM}}{\partial \psi^k_{,K}} + \alpha\left(\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial E_{LM}} \frac{\partial E_{LM}}{\partial \psi^k_{,K}} + \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \hat{C}_{LM}} \frac{\partial \hat{C}_{LM}}{\partial \psi^k_{,K}} + \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial D_{LM}} \frac{\partial D_{LM}}{\partial \psi^k_{,K}}\right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.1)\qquad \alpha \equiv \int\limits_{\Delta\times\Delta} \delta(Z^A, \bar{Z}^A)\, d\bar{\Delta}, d\Delta$$

jest współczynnikiem poprawkowym, wynikającym z uwzględnienia efektów skali w mikrostrukturze. Wykorzystując związki $(3.3)_1$ i (3.4) mamy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_{LM}}{\partial \psi^k_{,K}} = \psi^l_{,(L}\,\delta^K_{M)}\,g_{kl} = (\delta^l_{(L}+u^l_{,(L})\,\delta^K_{M)}\,g_{kl},\\
(4.2)\qquad &\frac{\partial \hat{C}_{LM}}{\partial \psi^k_{,K}} = \delta^K_L\,\delta^l_M\,\omega_{lk},\\
&\frac{\partial D_{LM}}{\partial \psi^k_{,K}} = \delta^K_L\,\delta^l_M\,\dot{\omega}_{lk}.
\end{aligned}
$$

Tensor $t^K_{.k}$ po wykorzystaniu (4.2) będzie miał postać

$$
(4.3)\qquad t^K_{.k} = \frac{\partial \epsilon}{\partial E_{LK}}(\delta^l_L+u^l_{,L})\,g_{kl}+\alpha\left[\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial E_{LK}}(\delta^l_L+u^l_{,L})\,g_{kl}+\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \hat{C}_{KL}}\,\delta^l_L\,\omega_{lk}+\right.
\left.+\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial D_{KL}}\,\delta^l_L\,\dot{\omega}_{lk}\right].
$$

Podobne przekształcenia wykonamy dla tensora $\hat{t}^A_{.k}$:

$$
\hat{t}^A_{.k} = -\frac{\partial \hat{L}}{\partial \chi^k_{,A}} = \delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \varphi^k_{,A}} = \delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \hat{C}_{KL}}\,\frac{\partial \hat{C}_{KL}}{\partial \varphi^k_{,A}}.
$$

Ponieważ jednak

$$
(4.4)\qquad \frac{\partial \hat{C}_{KL}}{\partial \varphi^k_{,A}} = \psi^l_{,K}\,g_{lk}\,\delta^A_L = (\delta^l_K+u^l_{,K})\,g_{lk}\,\delta^A_L,
$$

więc ostatecznie mamy

$$
(4.5)\qquad \hat{t}^A_{.k} = \delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \hat{C}_{KL}}(\delta^l_K+u^l_{,K})\,g_{lk}\,\delta^A_L.
$$

Tensor m_k przyjmuje szczególnie prostą postać ze względu na zależność $(3.6)_1$:

$$
(4.6)\qquad m_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^k} = \mu_0\,\dot{\psi}^l\,g_{kl} = \mu_0\,\dot{u}^l\,g_{kl},
$$

natomiast dla wielkości $\hat{m}_k$ mamy

$$
\hat{m}_k = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{\chi}^k} = -\,\delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \dot{\varphi}^k} = -\,\delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial D_{KL}}\,\frac{\partial D_{KL}}{\partial \dot{\omega}_{m.}^{\;n}}\,\frac{\partial \dot{\omega}_{m.}^{\;n}}{\partial \dot{\varphi}^k},
$$

skąd otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
(4.7)\qquad \hat{m}_k &= -\,\delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial D_{KL}}\,\delta^A_L\,g_{kl}\,\psi^l_{,k}\,(Z^A)^{-1} =\\
&= -\,\delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial D_{KL}}\,g_{kl}\,(\delta^l_K+u^l_{,K})\,\delta^A_L\,(Z^A)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Związki (4.3), (4.5), (4.6) i (4.7) są odpowiednikami związków fizycznych klasycznych teorii. Jak wynika z budowy związków (4.3) i (4.6) wielkość $t^K_{.k}$ może być interpretowana w rozpatrywanym przez nas przypadku jako tensor makronaprężeń, a wielkość m_k — jako wektor makropędu. Natomiast nie ma takiej interpretacji dla tensorów

$\hat{t}^A_{,k}$ i $\hat{m}_k$. W każdym punkcie Z mikrostruktury ich wartość zależy dodatkowo od wyboru punktu $\bar{Z}$, którego oddziaływanie na punkt Z chcemy obliczyć. Wyrazem tego jest występowanie we wzorach (4.5) i (4.7) wielkości $\delta(Z^A, \bar{Z}^A)$.

Aby napisać równania ruchu «w przemieszczeniach» musimy jeszcze rozpatrzyć wyrażenia $\partial\mathcal{L}/\partial\psi^k$ i $\partial\hat{L}/\partial\chi^k$. Ze względu na związki $(2.11)_3$ i $(2.11)_4$ pierwsze z nich można napisać w następującej postaci:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^k} = -2\int\limits_{\Delta\times\Delta}\frac{\partial\hat{L}}{\partial\varphi^k}\,d\bar{\Delta}\,d\Delta = -2\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}g_{kl}\,\psi^l_{,K}\,\delta^A_L\int\limits_{\Delta\times\Delta}\delta(Z^A,\bar{Z}^A)(Z^A)^{-1}\,d\bar{\Delta}\,d\Delta;$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^k} = -\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}g_{kl}(\delta^l_K+u^l_{,K})\,a_L, \tag{4.8}$$

gdzie

$$a_L \equiv \delta^A_L\int\limits_{\Delta\times\Delta}\delta(Z^A,\bar{Z}^A)(Z^A)^{-1}\,d\bar{\Delta}\,d\Delta. \tag{4.9}$$

Drugie ze wspomnianych wyrażeń przyjmuje postać

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial\chi^k} = -\delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}\frac{\partial\hat{C}_{KL}}{\partial\varphi^k},$$

co prowadzi do wzoru

$$\frac{\partial\hat{L}}{\partial\chi^k} = -\delta(Z^A,\bar{Z}^A)\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}g_{kl}(\delta^l_K+u^l_{,K})\,\delta^A_L(Z^A)^{-1}. \tag{4.10}$$

Podstawiając otrzymane zależności do równań (2.5) ostatecznie mamy

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\partial\epsilon}{\partial E_{LK}}(\delta^l_L+u^l_{,L})g_{kl}+\alpha\left[\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial E_{LK}}(\delta^l_L+u^l_{,L})g_{kl}+\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}\delta^l_L\,\omega_{lk}+\right.\right.\\ \left.\left.+\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial D_{KL}}\delta^l_L\,\dot{\omega}_{lk}\right]\right\}_{,K}+b_k=\mu_0\ddot{u}_k+\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}g_{kl}(\delta^l_L+u^l_{,K})\,a_L,\\ \frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}(\delta^l_K+u^l_{,K})g_{lk}\,\delta^A_L\left[\frac{1}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial Z^A}-\frac{1}{Z^A}\right]+\frac{1}{\delta}\hat{b}_k=-\delta^A_L\times\\ \times\frac{1}{Z^A}\,\overline{\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial D_{KL}}(\delta^l_K+u^l_{,K})g_{kl}}^{\bullet}.\end{gathered} \tag{4.11}$$

Funkcja $\delta(Z^A, \bar{Z}^A)$ dla obszaru ograniczonego jest funkcją monotonicznie malejącą i ograniczoną z wyjątkiem co najwyżej punktu $Z^A = \bar{Z}^A$. Z fizycznego punktu widzenia jest jednak uzasadniona regularyzacja nawet w tym ostatnim przypadku. W związku z tym mnożąc równania $(4.11)_2$ przez $Z^1 Z^2 Z^3$ i uwzględniając niezależność zmiennych Z^A otrzymujemy z tych trzech równań sześć, pozwalających wraz z $(4.11)_1$ określić dziewięć nieznanych funkcji u^k i ω_{kl}. Należy do nich, oczywiście, dołączyć odpowiednie warunki początkowe i brzegowe.

Po przeprowadzeniu wspomnianej wyżej operacji i odpowiednim zgrupowaniu wyrażeń otrzymujemy

$$\left[\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial E_{LK}}+a\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial E_{LK}}\right)(\delta^k_L+u^k_{,L})+a\left(\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}\delta^l_L\,\dot{\omega}_l{}^k+\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial D_{KL}}\delta^l_L\,\dot{\omega}_l{}^k\right)\right]_{,K}+b^k=$$

$$(4.12)\qquad =\mu_0\,\ddot{u}^k+\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}a_L\,(\delta^k_K+u^k_{,K}),$$

$$\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{KL}}(\delta^l_K+u^l_{,K})=\overline{\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial D_{KL}}(\delta^l_K+u^l_{,K})}^{\bullet}.$$

Druga grupa równań (4.12) powinna być spełniona w całym obszarze Δ dla każdego Z^A, co najwyżej z wyjątkiem punktu $Z^A=\bar{Z}^A$, oraz punktów osobliwości sił b_k. Jeśli te ostatnie mają charakter zmienności typu $(Z^A)^{-1}$, $(Z^A\,Z^B)^{-1}$ lub $(Z^A\,Z^B\,Z^C)^{-1}$, to pozostają z lewej strony omawianego równania ich części regularne.

Z równania $(4.12)_1$ wynika, że wektor a_L jest wektorem sprzężenia odkształceń mikrostruktury z polem makroodkształceń. W rozpatrywanym tu zagadnieniu nieliniowym sprzężenie to częściowo przenosi się również przez wyrażenie, znajdujące się przy współczynniku a w nawiasie kwadratowym. Natomiast wpływ mikroefektu skali na zjawiska makroskopowe wyraża się wystąpieniem we wzorze $(4.12)_1$ wyrazu $a\partial\hat{\epsilon}/\partial E_{LK}$. W tym sensie współczynnik a opisuje badane przez nas efekty skali. Do zagadnienia tego powrócimy jeszcze po linearyzacji układu (4.12).

Nie ograniczając ogólności rozważań można przyjąć, że układ współrzędnych przestrzennych jest układem kartezjańskim i utożsamić go z układem współrzędnych materialnych. Równania przemieszczeniowe będą wtedy miały postać następującą:

$$\left[\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial E_{lm}}+a\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial E_{lm}}\right)\delta_{lk}+u_{k,l}+a\left(\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{ml}}\dot{\omega}_{lk}+\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial D_{ml}}\dot{\omega}_{lk}\right)\right]_{,m}+b_k=$$

$$(4.13)\qquad =\mu_0\,\ddot{u}_k+\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{ml}}a_l\,(\delta_{mk}+u_{k,m},$$

$$\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\hat{C}_{ml}}(\delta_{mk}+u_{k,m})=\overline{\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial D_{ml}}(\delta_{mk}+u_{k,m})}^{\bullet},$$

gdzie

$$(4.14)\qquad \begin{aligned} E_{lm}&=u_{(l,m)}+\tfrac{1}{2}\,u_{k,l}\,u_{k,m},\\ \hat{C}_{ml}&=(\delta_{km}+u_{k,m})\,\omega_{lk},\\ D_{ml}&=(\delta_{km}+u_{k,m})\,\omega_{lk}.\end{aligned}$$

5. Zagadnienie liniowe

Załóżmy obecnie, że gradienty odkształcenia mało różnią się od jedności. Wtedy

$$(5.1)\qquad |u_{k,l}|\ll 1.$$

Prócz tego przyjmijmy, że pochodne $\partial\hat{\epsilon}/\partial\hat{C}_{ml}$ i $\partial\hat{\epsilon}/\partial D_{ml}$ są tego samego rzędu, co $\partial\hat{\epsilon}/\partial E_{lm}$, oraz że tensor ω_{lk} opisuje małe odkształcenie, wolno zmieniające się w czasie, tzn.:

$$(5.2)\qquad |\omega_{kl}|\ll 1,\quad |\dot{\omega}_{kl}|\ll 1.$$

Równania ruchu (4.13) przyjmą wtedy postać

$$
(5.3)\qquad
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\varepsilon_{km}}+a\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\varepsilon_{km}}\right)_{,m}+b_k=\mu_0\ddot{u}_k+\alpha_m\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\omega_{mk}},\\
&\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\omega_{lk}}=\left(\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\dot{\omega}_{lk}}\right)^{\boldsymbol{\cdot}},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
(5.4)\qquad \varepsilon_{km}\equiv u_{(k,m)}.
$$

W równaniu $(5.3)_2$ pominięto również wyrażenie zawierające wyraz $(u_{k,m})^{\boldsymbol{\cdot}}$ zakładając, że zmiany makroodkształcenia w czasie są również powolne.

Dalsza linearyzacja dotyczy fizycznych własności materiału. Przyjmijmy mianowicie, że funkcje ϵ i $\hat{\epsilon}$ można przedstawić jako funkcje kwadratowe ich argumentów:

$$
(5.5)\qquad
\begin{aligned}
&\epsilon=\tfrac{1}{2}a_{kmln}\varepsilon_{km}\varepsilon_{ln},\\
&\hat{\epsilon}=\tfrac{1}{2}\hat{a}_{kmln}\varepsilon_{km}\varepsilon_{ln}+\tfrac{1}{2}\hat{b}_{kmln}\omega_{km}\omega_{ln}+\tfrac{1}{2}\hat{c}_{kmln}\dot{\omega}_{km}\dot{\omega}_{ln}+\hat{d}_{kmln}\varepsilon_{km}\omega_{ln}.
\end{aligned}
$$

We wzorze $(5.5)_2$ pominięto efekty krzyżowe z $\dot{\omega}_{km}$ z tych samych powodów, dla których odrzucono je we wzorze (2.21). Z powyższych związków wynikają zależności:

$$
(5.6)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial\epsilon}{\partial\varepsilon_{km}}=a_{kmln}\varepsilon_{ln},\\
&\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\varepsilon_{km}}=\hat{a}_{kmln}\varepsilon_{ln}+\hat{d}_{kmln}\omega_{ln},\\
&\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\omega_{mk}}=\hat{b}_{mkln}\omega_{ln}+\hat{d}_{lnmk}\varepsilon_{ln},\\
&\frac{\partial\hat{\epsilon}}{\partial\dot{\omega}_{lk}}=\hat{c}_{lkmn}\dot{\omega}_{mn}.
\end{aligned}
$$

Wstawiając te wzory do równań (5.3) otrzymujemy

$$
(5.7)\qquad
\begin{aligned}
&[(a_{kmln}+a\hat{a}_{kmln})\varepsilon_{ln}+a\hat{d}_{kmln}\omega_{ln}]_{,m}+b_k=\\
&\qquad=\mu_0\ddot{u}_k+\alpha_m(\hat{b}_{mkln}\omega_{ln}+\hat{d}_{lnmk}\varepsilon_{ln}),\\
&\hat{b}_{lkmn}\omega_{mn}+\hat{d}_{mnlk}\varepsilon_{mn}=\hat{c}_{lkmn}\ddot{\omega}_{mn}.
\end{aligned}
$$

Z powyższych równań jasno wynika, że sprzężenie pól mikro- i makroodkształceń jest dokonane za pośrednictwem współczynników α_m oraz efektów krzyżowych, opisanych macierzą $\hat{d}_{kmln}$. Wstawiając równanie $(5.7)_2$ do $(5.7)_1$ dostrzegamy, że sprzężenie przez współczynnik α_m istnieje jedynie w zagadnieniu dynamicznym

$$
(5.8)\qquad [(a_{kmln}+a\hat{a}_{kmln})\varepsilon_{ln}+a\hat{d}_{kmln}\omega_{ln}]_{,m}+b_k=\mu_0\ddot{u}_k+\alpha_m\hat{c}_{mkln}\ddot{\omega}_{ln}.
$$

Tym samym w przypadku statycznym bez efektów krzyżowych równania ulegają rozprzężeniu. Pole mikroodkształceń jest implikowane przez makroodkształcenie

$$\omega_{pq} = -\hat{d}_{mnlk}\,(\hat{b})^{-1}_{pqlk}\,\varepsilon_{mn}, \tag{5.9}$$

gdzie

$$(\hat{b})^{-1}_{pqlk}\,\hat{b}_{lkmn} = \delta_{pm}\,\delta_{qn}. \tag{5.10}$$

Natomiast współczynnik α określa wpływ efektów skali w mikrostrukturze na makroskopowe własności ośrodka. Jeśli nie można ustalić z góry jaki typ mikrostruktury należy przyjąć dla badanego materiału, należy go wyznaczać eksperymentalnie. Ma to miejsce we wszystkich przypadkach materiałów o naturalnej strukturze. Jeśli natomiast mikrostruktura jest wymuszona, np. przez zatopienie w materiale włókien, siatek, wydrążenie otworów itp. współczynnik ten należy wyznaczać teoretycznie, przyjmując pewien typ dalekich oddziaływań elementów mikrostruktury.

Na zakończenie dodajmy, że tensory określające funkcje ϵ i $\hat{\epsilon}$ posiadają pewne własności symetrii, które wynikają w sposób oczywisty ze wzorów (5.5). Mianowicie

$$\begin{aligned} &a_{kmln} = a_{mkln} = a_{kmnl} = a_{lnkm},\\ &\hat{a}_{kmln} = \hat{a}_{mkln} = \hat{a}_{kmnl} = \hat{a}_{lnkm},\\ &\hat{b}_{kmln} = \hat{b}_{lnkm},\\ &\hat{c}_{kmln} = \hat{c}_{lnkm},\\ &\hat{d}_{kmln} = \hat{d}_{mkln}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Pominiemy tu rozważania, dotyczące ewentualnych grup symetrii materiału z mikrostrukturą, jako wykraczające poza ramy postawionego zagadnienia.

Literatura cytowana w tekście

1. K. Wilmański, Cz. Woźniak, *On geometry of continuous medium with micro-structure*, Arch. Mech. Stos., 5, **19** (1967).
2. Cz. Woźniak, *Dynamika ośrodków ciągłych* (w druku), PWN.
3. K. Wilmański, Cz. Woźniak, *On dynamics of the body with micro-structure*, Arch. Rat. Mech. Anal., (w druku).
4. K. Wilmański, Cz. Woźniak, *Dynamics of the continuous medium with micro-structure*, Arch. Mech. Stos. (w druku).
5. K. Wilmański, *Dynamics of bodies with micro-structure*, Arch. Mech. Stos., 6, **20** (1968).
6. K. Wilmański, *Mikroefekty skali w ciałach z mikrostrukturą*, Rozpr. Inżyn. (w druku).
7. R. D. Mindlin, *Micro-structure in linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **16** (1964), 51–78.

Резюме

МАСШТАБНЫЕ МИКРОЭФФЕКТЫ В ДИНАМИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В работе дается анализ уравнений тела с микроструктурой. Применяя вариационный формализм, выводится система уравнений в перемещениях, в которых учитывается далекие воздействия микроэлементов среды. Кроме того, предполагается, что микроструктура может подвергаться только однородным деформациям. Представленные результаты являются удобным способом описания масштабных эффектов для материалов с естественной и вынужденной структурой. На ряду с анализом этих эффектов для линейной задачи в работе даются линеаризованные уравнения в перемещениях, которые обсуждаются с той же самой точки зрения.

Summary

MICROEFFECTS OF SCALE IN DYNAMICS OF A CONTINUUM

The present paper contains an analysis of the equations of a body with microstructure. By applying the variational method the set of equations in displacements is derived, in which remote action of microelements is accounted for. It is assumed in addition that the microstructure can undergo homogeneous deformation only. The results obtained furnich a convenient method for describing microeffects of scale for materials with natural and artificial (forced) microstructure. In addition to the analysis of these effects for the nonlinear problem the paper contains linearized equations in displacements which are discussed from the same point of view.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 12 czerwca 1968 r.