

WYBOCZENIE PRZY PEŁZANIU  
GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ POWŁOKI KULISTEJ

ZBIGNIEW BYCHAWSKI, HENRYK KOPECKI (KRAKÓW)

Zagadnienie wyboczenia powłok wykonanych z materiałów lepkosprężystych stanowi ważny problem z punktu widzenia zastosowań technicznych. Określenie krytycznych wartości obciążenia, zależnego od czasu stanu naprężenia w powłoce oraz charakteru jej deformacji w czasie, wymaga w wielu praktycznie ważnych zagadnieniach teorii geometrycznie nieliniowej.

Problem wyboczenia przy pełzaniu płyt i powłok w ujęciu geometrycznie nieliniowym był przedmiotem rozważań jednego z autorów w pracach [1 i 2]. W pracy [1] przedstawiono zagadnienie wyboczenia wycinka powłoki walcowej z materiału liniowo-lepkosprężystego, obciążonej wzdłuż tworzących. Praca [2] dotyczy problemu zginania i wyboczenia wycinka małowyniosłej powłoki wykonanej z materiału lepkosprężystego.

W niniejszej pracy przedstawimy zagadnienie lokalnego wyboczenia przy pełzaniu geometrycznie nieliniowej powłoki kulistej o małej wyniosłości wykonanej z liniowego materiału lepkosprężystego. Obciążenie powłoki stanowi stałe w czasie, równomiernie rozłożone normalne ciśnienie zewnętrzne.

1. Równanie konstytutywne oraz związki geometryczne

Zakładamy, że powłoka wykonana jest z nieściśliwego materiału, który spełnia równanie konstytutywne

$$(1.1) \quad e_{ij} = L [s_{ij}],$$

gdzie  $L$  jest liniowym operatorem całkowym,  $e_{ij}$  tensorem odkształcenia,  $s_{ij}$  dwiatorem naprężenia.

Operator  $L$  przyjmujemy w formie

$$(1.2) \quad L [f] = \int_{t_0}^t \partial f(\tau) C(t - \tau) d\tau,$$

gdzie  $\partial = \partial/\partial\tau$ ,  $C(t - \tau)$  jest funkcją pełzania,  $t$  chwilą obserwacji,  $\tau$  czasem bieżącym,  $t_0$  chwilą początkową.

Całkując przez części równanie (1.2) otrzymujemy

$$(1.3) \quad L[f] = f(t) C(0) - f(t_0) C(t-t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) \partial C(t-\tau) d\tau.$$

Składowe dewiatora naprężenia możemy wyrazić przez składowe tensora odkształcenia za pomocą operatora odwrotnego  $L^*$ . Związek (1.1) przyjmuje wówczas postać

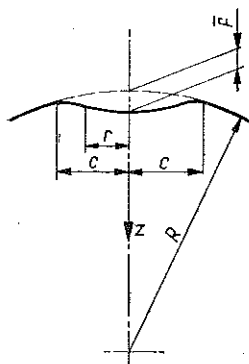
$$(1.4) \quad s_{ij} = L^* [e_{ij}], \quad \text{gdzie} \quad L^* = L^{-1}.$$

Dla osiowo-symetrycznego zagadnienia powłoki kulistej składowe tensora odkształcenia przedstawimy w formie<sup>(1)</sup>

$$(1.5) \quad e_1 = L [s_1] = \frac{1}{3} L (2\sigma_1 - \sigma_2), \quad e_2 = L [s_2] = \frac{1}{3} L (2\sigma_2 - \sigma_1),$$

gdzie  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  oznaczają odpowiednio naprężenia południkowe i równoleżnikowe. Naprężenia te możemy przedstawić przez odkształcenia za pomocą wzorów

$$(1.6) \quad \sigma_1 = L^* (2e_1 + e_2), \quad \sigma_2 = L^* (2e_2 + e_1).$$



Rys. 1

Obciążenie powłoki stanowi stałe w czasie zewnętrzne ciśnienie o intensywności  $p$ .

W pewnym (dowolnym) miejscu powłoki znajduje się niezależne od obciążenia niewielkie wgniecenie, które uważamy za małe odchylenie od kształtu idealnego. Wgniecenie to zwiększa się w czasie na skutek pełzania materiału powłoki. Wielkość wgniecenia w dowolnej chwili czasu  $t$  charakteryzują ugięcie  $w$  oraz promień wgniecenia  $c$ , które ogólnie biorąc zmieniają się w czasie. Zakładamy dalej, że promień wgniecenia  $c$  jest mały w porównaniu z promieniem kuli  $R$ .

Zgodnie z założeniami teorii nieliniowej (mały tensor odkształcenia, skończone ugięcia rzędu grubości powłoki, stała grubość powłoki w procesie deformacji) związki geometryczne między składowymi tensora odkształcenia a przemieszczeniami dają zależności

$$(1.7) \quad e_1 = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dw_0}{dr} \frac{dw}{dr} - \frac{w}{R}, \quad e_2 = \frac{u}{r} - \frac{w}{R},$$

gdzie  $u$  jest przemieszczeniem w kierunku promieniowym  $r$  ( $0 \leq r \leq c$ ),  $w$  ugięciem,  $w_0$  ugięciem początkowym.

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmowali dla uproszczenia, że wielkości  $r$  i  $c$  są niezależne od czasu.

(1) Dla uproszczenia zapisu opuszczamy jeden wskaźnik.

Odształcenia określone związkami (1.7) są zależne od siebie. Drogą eliminacji z tych związków przemieszczenia  $u$  otrzymujemy warunek nierozdzielności odształceń

$$(1.8) \quad \frac{de_2}{dr} + \frac{1}{r}(e_2 - e_1) = -\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{dw_0}{dr} \frac{dw}{dr} - \frac{r}{R} \frac{dw}{dr}.$$

## 2. Warunki równowagi

Równanie równowagi momentów sił wewnętrznych działających na element powłoki ma postać

$$(2.1) \quad \frac{dM_1}{dr} + \frac{M_1}{r} - \frac{M_2}{r} + Q = 0,$$

gdzie  $M_1$  i  $M_2$  oznaczają odpowiednio momenty sił wewnętrznych w kierunkach południkowym i równoleżnikowym. Ze względu na założenie małej wyniosłości powłoki momenty te możemy utożsamić odpowiednio z momentami promieniowym i obwodowym jak dla płaskiego problemu kołowego.  $Q$  oznacza jednostkową siłę poprzeczną określoną z warunku równowagi sił (rzutów na kierunek normalnej do elementu powierzchni odształconej)

$$(2.2) \quad Q = \psi + \frac{h}{r} \frac{dF}{dr} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{dw_0}{dr} + \frac{r}{R} \right), \quad \psi = \frac{1}{2} pr,$$

gdzie  $p$  oznacza ciśnienie zewnętrzne,  $h$  grubość powłoki, a  $F$  funkcję naprężeń spełniającą związki

$$(2.3) \quad \sigma_1 = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad \sigma_2 = \frac{d^2 F}{dr^2}.$$

Składowe tensora odształcenia wyrazimy przez wprowadzoną funkcję naprężeń. Otrzymujemy w ten sposób

$$(2.4) \quad e_1 = \frac{1}{3} L \left( \frac{2}{r} \frac{dF}{dr} - \frac{d^2 F}{dr^2} \right), \quad e_2 = \frac{1}{3} L \left( 2 \frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right).$$

Jeżeli określoną związkami (2.3) funkcję naprężeń wprowadzimy do warunku nierozdzielności odształceń (1.8), to

$$(2.5) \quad \frac{d}{dr} L(\nabla^2 F) = -\frac{3}{2} \left[ \frac{1}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dw_0}{dr} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{R} \frac{dw}{dr} \right],$$

gdzie operator

$$(2.6) \quad \nabla^2 F = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right).$$

Z kolei określimy momenty  $M_1$  i  $M_2$  wyrażając je przez ugięcie  $w$ . Na podstawie (1.6) mamy

$$(2.7) \quad M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} L^* (2e_{1b} + e_{2b}) z \, dz, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} L^* (2e_{2b} + e_{1b}) z \, dz,$$

gdzie  $h$  oznacza grubość powłoki, zaś  $e_{1b}$  i  $e_{2b}$  są składowymi odkształceń zginania:

$$(2.8) \quad e_{1b} = -z \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad e_{2b} = -\frac{1}{r} z \frac{dw}{dr}.$$

Całkując równania (2.7) po uprzednim podstawieniu do nich zależności (2.8) otrzymujemy

$$(2.9) \quad M_1 = -\frac{h^3}{12} L^* \left( 2 \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right),$$

$$M_2 = -\frac{h^3}{12} L^* \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dw}{dr} \right).$$

Jeżeli powyższe wyrażenia wprowadzimy do równania równowagi (2.1), otrzymamy ostatecznie

$$(2.10) \quad \frac{d}{dr} [L^* (\nabla^2 w)] - \frac{6}{h^2} \frac{dF}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dw_0}{dr} + \frac{1}{R} \right) - \frac{6}{h^3} \psi = 0.$$

Układ równań (2.5) i (2.10) formułuje problem lokalnego wyboczenia przy pełzaniu geometrycznie nieliniowej małego wyniosłej powłoki kulistej pod stałym ciśnieniem zewnętrznym.

### 3. Naprężenia w powłoce

Rozwiązanie układu równań podstawowych (2.5) i (2.10) polega na znalezieniu funkcji naprężeń  $F$  oraz funkcji ugięcia  $w$  spełniających powyższe równania. Mając wyznaczoną funkcję naprężeń  $F$  obliczamy naprężenia  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  z zależności (2.3).

Podamy tutaj przybliżone rozwiązanie układu równań (2.5) i (2.10). W tym celu uczynimy założenie, że funkcja ugięcia  $w$  dana jest zależnością [4]

$$(3.1) \quad w(t) = \bar{f}(t) (1 - \varrho^2)^2,$$

przy czym dla  $t = 0$

$$(3.2) \quad w(0) = w_0 = \bar{f}_0^0 (1 - \varrho^2)^2.$$

Parametry  $\bar{f}$  i  $\bar{f}_0^0$  oznaczają ugięcia środka wgniecenia odpowiednio w dowolnej chwili i w chwili początkowej, a  $\varrho = r/c$ .

Wprowadzimy przyjętą funkcję ugięcia (3.1) wykorzystując warunek (3.2) do równania nierozdzielności odkształceń (2.5). W ten sposób otrzymamy

$$(3.3) \quad L \left[ \frac{d}{dr} (\nabla^2 F) \right] = -12 \left( \frac{h}{c} \right)^2 \frac{1}{\varrho} (f^2 + 2ff_0^0) (\varrho - \varrho^3)^2 + \frac{6}{R} \frac{h}{c} f (\varrho - \varrho^3),$$

gdzie

$$(3.4) \quad f = \frac{\bar{f}}{h}, \quad f_0^0 = \frac{\bar{f}_0^0}{h}.$$

Całkując dwukrotnie równanie (3.3), a następnie wyznaczając stałe całkowania z warunków brzegowych

$$(3.5) \quad \left[ L \left( \frac{dF}{dr} \right) \right]_{r=0} = 0, \quad \left[ L \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \right]_{r=c} = -L(\sigma_0),$$

gdzie  $\sigma_0$  charakteryzuje jednorodny stan naprężenia w powłoce kulistej obciążonej ciśnieniem zewnętrznym o intensywności  $p$ .

$$(3.6) \quad \sigma_0 = \frac{pR}{2h},$$

otrzymujemy następujące wzory na naprężenia:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = -L^* \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{h}{c} \right)^2 (f^2 + 2f_0^0 f) (6\varrho^2 - 4\varrho^4 + \varrho^6) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{h}{R} f (3\varrho^2 - \varrho^4) - \frac{1}{4} \left[ 7 \left( \frac{h}{c} \right)^2 f^2 - 6 \frac{h}{R} f \right] \right\}, \\ \sigma_2 &= \frac{d^2 F}{dr^2} = -L^* \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{h}{c} \right)^2 (f^2 + 2f_0^0 f) (18\varrho^2 - 20\varrho^4 + 7\varrho^6) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \frac{h}{R} f (9\varrho^2 - 5\varrho^4) - \frac{1}{4} \left[ 7 \left( \frac{h}{c} \right)^2 f^2 - 6 \frac{h}{R} f \right] \right\}. \end{aligned}$$

#### 4. Funkcja ugięcia

Rozwiązanie problemu dla naprężeń oraz dla ugięcia określonego zależnością (3.1) wymaga wyznaczenia parametru  $\bar{f}$  jako funkcji czasu (ugięcie powłoki w punkcie  $\varrho = 0$ ). W tym celu zastosujemy metodę Galerkiną. Oznaczając przez  $X$  lewą stronę równania (2.10) otrzymamy następujące równanie wariacyjne:

$$(4.1) \quad \int_0^c X \frac{dw}{dr} r dr = 0,$$

które po wykonaniu całkowania doprowadzimy do równania operatorowego dla parametru  $\bar{f}$ :

$$(4.2) \quad (A + 2Bf) L^* [f] + (B + Cf) L^* [f^2] - Df = Df_0^0.$$

Tutaj wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} A &= 2\beta_0 f_0^0 \delta^2 - 4\gamma_0 f_0^0 \delta + a\delta^2 + a_1, & B &= \beta_0 f_0^0 \delta^2 - \gamma\delta, \\ C &= \beta_0 \delta^2, & D &= \frac{1}{3} p \frac{R}{h} \left(\frac{R}{c}\right)^2, & \delta &= \frac{h}{R} \left(\frac{R}{c}\right)^2, & \beta_0 &= \frac{37}{42}, \\ \gamma_0 &= \frac{5}{12}, & a_0 &= \left(\frac{4}{3}\right)^2, & a_1 &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Jednym z przypadków, w którym równanie (4.2) sprowadza się do równania algebraicznego, jest przypadek, gdy operatory  $L$  i  $L^*$  mają postać

$$(4.4) \quad L = \frac{1}{2G}, \quad L^* = 2G,$$

co odpowiada nieściśliwemu, liniowo-sprężystemu materiałowi powłoki o module odkształcenia postaciowego  $G$ . Dla tego przypadku mamy na podstawie (4.2) równanie

$$(4.5) \quad f_e (A + 2Bf_e) + (B + Cf_e)f_e^2 - \frac{D}{2G} f_e = \frac{D}{2G} f_{0e}^0,$$

gdzie  $f_{0e}^0$  oznacza odchylenie od idealnego kształtu powłoki w punkcie  $e = 0$ .

Wprowadzając oznaczenia

$$(4.6) \quad \begin{aligned} y &= f_e + \frac{B}{C}, & 2S &= \frac{1}{C^3} [2B^3 - CB(A - \bar{D}) - \bar{D}C^2 f_{0e}^0], \\ 3P &= -\frac{1}{C^2} (B^2 + C\bar{D}f_{0e}^0), & \bar{D} &= \frac{D}{2G}, \end{aligned}$$

równanie (4.5) możemy przedstawić w formie

$$(4.7) \quad y^3 + 3Py + 2S = 0.$$

W przypadku gdy  $f_{0e}^0 = 0$ , co odpowiada założeniu, że powłoka nie posiada początkowego odchylenia od kształtu idealnego, równanie (4.5) sprowadza się do kwadratowego równania algebraicznego

$$(4.8) \quad \delta^2 \beta_0 f_e^2 - 3\delta\gamma_0 f_e - \bar{D} = 0$$

uzyskanego przez WOLMIRA [4].

### 5. Rozwiązanie dla ogólnego liniowego materiału lepkosprężystego

W przypadku gdy  $L$  i  $L^*$  są operatorami całkowymi, opisującymi liniowe lepkosprężyste własności materiału, rozwiązanie równania (4.2) posiada bardzo złożoną formę. Równanie to jest wtedy nieliniowym równaniem całkowym dla zależnego od czasu ugięcia  $f$ .

Podamy przybliżoną metodę rozwiązania równania (4.2). Zasadniczo istnieją dwie możliwości przedstawienia takiego rozwiązania w przypadku, gdy operator  $L^*$  jest liniowym operatorem całkowym. Jedną z nich jest metoda kolejnych przybliżeń. Pierwsze przybliżenie uzyskuje się tu pomijając wyrazy nieliniowe w równaniu (4.2). Rozwiązanie uzyskane z pierwszego przybliżenia, podstawione do nieliniowego równania (4.2), pozwala z kolei na określenie drugiego przybliżenia itd.

Druga z metod, którą tu przedstawimy, polega na zastosowaniu perturbacji. Rozwiązanie w tym przypadku przyjmujemy w postaci szeregu potęgowego

$$(5.1) \quad f = f_0 + f_1 \delta + f_2 \delta^2 + \dots,$$

gdzie  $\delta$  (por. równanie (4.3)) jest małym parametrem charakteryzującym geometrię powłoki.

Jeżeli szereg (5.1) podstawimy do równania (4.2), a następnie przyrównamy do siebie współczynniki przy tych samych potęgach parametru, to otrzymamy rekurencyjny układ liniowych równań, w ogólności całkowych dla współczynników  $f_0, f_1, f_2, \dots$ :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} a_1 L^* [f_0] - Df_0 &= Df_0^0, \\ a_1 L^* [f_1] - Df_1 &= \gamma_0 [2(f_0^0 + f_0) L^*(f_0) + L^*(f_0^2)], \\ a_1 L^* [f_2] - Df_2 &= 2\gamma_0 [(2f_0^0 + f_0) L^*(f_0) + L^*(f_0 f_1)] - \\ &- \beta_0 (f_0^0 + f_0) L^*(f_0^2) - [2\beta_0 (f_0^{02} + f_0^0 f_0) - 2\gamma_0 f_1 + a_0] L^*(f_0). \\ &\dots \end{aligned}$$

Powyższy układ równań całkowych można z kolei sprowadzić do układu równań różniczkowych dla współczynników  $f_0, f_1, f_2, \dots$  drogą różniczkowania i eliminacji całek.

W tym ostatnim przypadku warunki początkowe przyjmują postać

$$(5.3) \quad f_0(t_0) = f_e, \quad f_i(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie  $f_e$  oznacza ugięcie dla stanu natychmiastowego.

Całkowite ugięcie, ujmujące początkowe odchylenie  $f_0^0$ , wynosi zatem

$$(5.4) \quad f^* = f_0^0 + f,$$

przy czym spełnia ono warunek początkowy

$$(5.5) \quad f^*(t_0) = f_0^* = f_0^0 + f_e.$$

## 6. Model materiału relaksującego

W przypadku, gdy własności lepkosprężyste materiału powłoki opisuje model Maxwella, operatory  $L$  i  $L^*$  przyjmują odpowiednio postacie

$$(6.1) \quad k = L[g] = \frac{g(t)}{2G} + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau,$$

$$(6.1) \quad g = L^* [k] = 2Ge^{-\frac{c}{\eta}(t-t_0)} \left[ k_0 + \int_{t_0}^t \partial k e^{\frac{G}{\eta}(t-t_0)} d\tau \right],$$

gdzie  $\eta$  oznacza współczynnik lepkości oraz  $k_0 = k(t_0)$ .

Operator (6.1)<sub>2</sub> należy podstawić do równania (4.2). Otrzymane tą drogą równanie całkowe posiada jednak bardzo złożoną postać, dlatego też wprowadzimy operator (6.1)<sub>2</sub> bezpośrednio do rekurencyjnego układu (5.2). W rozważaniach naszych ograniczymy się do uwzględnienia pierwszego przybliżenia, tzn. do równania (5.2)<sub>2</sub> włącznie.

Podstawiając operator (6.1)<sub>2</sub> do równania (5.2)<sub>1</sub>, otrzymujemy następujące równanie całkowe

$$(6.2) \quad 2G\alpha_1 \left[ f_e + \int_{t_0}^t \partial f_0 e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} d\tau \right] e^{-\frac{G}{\eta}(t-t_0)} - Df_0 = Df_0^0,$$

które drogą różniczkowania względem czasu i eliminacji całki sprowadzamy do równania różniczkowego o postaci

$$(6.3) \quad \dot{f}_0 - \frac{G}{\eta} Hf_0 = \frac{G}{\eta} Hf_0^0,$$

gdzie

$$(6.4) \quad H = \frac{D^*}{1 - D^*}, \quad D^* = \frac{D}{2G\alpha_1},$$

(kropka oznacza pochodną względem czasu).

Rozwiązując równanie (6.3) otrzymujemy

$$(6.5) \quad f_0 = f_0^* e^{\frac{G}{\eta} H(t-t_0)} - f_0^0,$$

przy wykorzystaniu warunku początkowego (5.3).

Podstawiamy z kolei operator (6.1)<sub>2</sub> do równania (5.2)<sub>2</sub>, a następnie — podobnie jak w przypadku równania (5.2)<sub>1</sub> — eliminujemy całki. Otrzymujemy w ten sposób równanie różniczkowe dla pierwszego przybliżenia  $f_1$ :

$$(6.6) \quad \dot{f}_1 - \frac{G}{\eta} Hf_1 = 2 \frac{\gamma_0}{\alpha_1} f_0^* \frac{G}{\eta} \left\{ [(H+1)f_0 + H^2 f_0^*] e^{\frac{G}{\eta}(H-1)(t-t_0)} + \right. \\ \left. + H(3H+2)f_0^* e^{2\frac{G}{\eta}H(t-t_0)} \right\},$$

którego rozwiązaniem jest

$$(6.7) \quad f_1 = 2 \frac{\gamma_0}{\alpha_1} f_0^* \left\{ [(H+1)f_e + H^2 f_0^*] \left[ e^{\frac{G}{\eta}H(t-t_0)} - e^{\frac{G}{\eta}(H-1)(t-t_0)} \right] + \right. \\ \left. + (3H+2)f_0^* \left[ e^{2\frac{G}{\eta}H(t-t_0)} - e^{\frac{G}{\eta}H(t-t_0)} \right] \right\}.$$

Ograniczając się do pierwszego przybliżenia (5.2)<sub>2</sub>, możemy przedstawić rozwiązanie dla funkcji  $f$  w postaci



$$(6.8) \quad f = f_0 + \delta f_1.$$

Analizując rozwiązanie liniowe (6.8) wnioskujemy, że dla  $H = \infty$ , tzn. dla obciążenia zewnętrznego

$$(6.9) \quad p_{kr} = \frac{12}{5} G \frac{h}{R} \left( \frac{c}{R} \right)^2,$$

ugięcie  $f$  rośnie nieograniczenie w sposób natychmiastowy, natomiast dla  $p < p_{kr}$ , tzn. dla  $H > 0$  ugięcie zmierza do nieskończoności w nieskończonym przedziale czasowym.

### 7. Model ciała pełzającego

Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy materiał powłoki wykazuje pełzanie opisane modelem Kelvina. W tym przypadku operatory  $L$  i  $L^*$  mają odpowiednio postacie

$$(7.1) \quad k = L[g] = \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t g(\tau) e^{-\frac{G}{\eta}(t-\tau)} d\tau,$$

$$g = L^*[k] = 2\eta \dot{k} + 2Gk.$$

Podobnie jak dla modelu Maxwella ograniczymy się przy przedstawieniu rozwiązania do pierwszego przybliżenia, tzn. do wykorzystania związków (5.2)<sub>1</sub> i (5.2)<sub>2</sub>. W tym celu podstawiamy operator (7.1)<sub>2</sub> do równania (5.2)<sub>1</sub>, otrzymując równanie różniczkowe

$$(7.2) \quad \dot{f}_0 + \frac{G}{\eta} J f_0 = \frac{G}{\eta} D^* f_0^0, \quad J = 1 - D^*, \quad D^* = \frac{D}{2G\alpha_1}.$$

Rozwiązanie powyższego równania ma postać

$$(7.3) \quad f_0 = \frac{D^*}{J} f_0^0 \left[ 1 - e^{-\frac{G}{\eta} J (t-t_0)} \right].$$

Z kolei podstawiamy operator (7.1)<sub>2</sub> do równania (5.2)<sub>2</sub>, otrzymując w ten sposób równanie

$$(7.4) \quad \dot{f}_1 + \frac{G}{\eta} J f_1 = \frac{G}{\eta} \frac{\gamma_0}{\alpha_1} f_0^{02} \frac{D^*}{J} \left\{ 4 \left[ (J-1) e^{-\frac{G}{\eta} J (t-t_0)} + 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{D^*}{J} \left[ 1 - e^{-\frac{G}{\eta} (t-t_0)} \right] \left[ (4J-3) e^{-\frac{G}{\eta} (t-t_0)} + 3 \right] \right\}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania jest funkcja

$$(7.5) \quad f_1 = \frac{\gamma_0}{\alpha_1} f_0^{02} \frac{D^*}{J^2} \left\{ \frac{G}{\eta} J \left[ 4(J-1) + 2 \frac{D^*}{J} (2J-3) \right] (t-t_0) e^{-\frac{G}{\eta} J (t-t_0)} + \right.$$

$$(7.5) \quad + \left[ \left( 4 + 3 \frac{D^*}{J} \right) - \frac{D^*}{J} (4J - 3) e^{-\frac{c}{\eta} J(t-t_0)} \right] \left[ 1 - e^{-\frac{G}{\eta} J(t-t_0)} \right].$$

Ograniczając się zatem do dwóch wyrazów rozwinięcia (5.1), mamy

$$(7.6) \quad f = f_0 + \delta f_1.$$

Z zależności (7.3), (7.5) i (7.6) wynika, że, gdy czas zmierza do nieskończoności, ugięcie  $f$  dąży do wartości skończonej

$$(7.7) \quad f_\infty = f_0^0 \frac{D^*}{J} \left[ 1 + \frac{\gamma_0}{\alpha_1} \frac{\delta}{J} f_0^0 \left( 4 + \frac{D^*}{J} \right) \right].$$

Należy zwrócić uwagę, że tego rodzaju zachowanie się powłoki ma miejsce wówczas, gdy parametr  $J > 0$ , tzn. gdy

$$(7.8) \quad p_0 < \frac{12}{5} G \frac{h}{R} \left( \frac{c}{R} \right)^2 = \frac{4}{5} E \frac{h}{R} \left( \frac{c}{R} \right)^2 = p^*.$$

W przypadku gdy  $J < 0$ , czyli dla  $p > p^*$  ugięcie rośnie do nieskończoności dla  $t \rightarrow \infty$ . Fakt ten łatwo wykazać, jeżeli w równaniu (7.3) i (7.5) przyjąć

$$(7.9) \quad J = -J^* < 0.$$

W szczególnym przypadku, gdy  $J = 0$  ( $p = p^*$ ), otrzymujemy odpowiednio

$$(7.10) \quad f_0^* = D^* f_0^0 \frac{G}{\eta} (t - t_0),$$

$$f_1^* = 4 \frac{\gamma_0}{\alpha_1} D^* f_0^{0a} \frac{G}{\eta} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{G}{\eta} (1 + D^*) (t - t_0) + \frac{1}{3} \left( \frac{G}{\eta} \right)^2 D^* (t - t_0)^2 \right] (t - t_0),$$

skąd wynika, że  $f^*$  zmierza do nieskończoności, gdy  $t \rightarrow \infty$ .

Z równań (7.3) i (7.5) wynika ponadto, że dla  $J = -J^*$  proces charakteryzuje się prawie stałą prędkością ugięcia w czasie (małe odchylenie od liniowości), podczas gdy w przypadku  $J > 0$  prędkość ugięcia ma postać wykładniczą.

Należy zauważyć, że równanie operatorowe (4.2) przyjmuje dla modelu Kelvina formę równania różniczkowego, które da się scałkować w sposób ścisły. Tak więc, podstawiając operator (7.1)<sub>2</sub> do równania (4.2), otrzymujemy po przekształceniach następujące równanie różniczkowe:

$$(7.11) \quad \dot{f} + \frac{G}{\eta} \frac{f(Cf^2 + 3Bf + A - \bar{D})}{2Cf^2 + 4Bf + A} = \frac{D}{2\eta} \frac{f_0^0}{2Cf^2 + 4Bf + A},$$

którego rozwiązanie można przedstawić w formie

$$(7.12) \quad \int_{f_0}^f \frac{\left( f^2 + 2 \frac{B}{C} f + \frac{A}{2C} \right) df}{f^3 + 3 \frac{B}{C} f^2 + \frac{A - \bar{D}}{C} f - \frac{\bar{D}}{2C} f_0^0} = \frac{G}{\eta} (t - t_0),$$

gdzie przyjęto

$$(7.13) \quad f_0 = f(t_0) = 0.$$

Drogą analogicznego podstawienia, jakie zastosowaliśmy w równaniu (4.5), doprowadzamy równanie całkowe (7.12) do następującej postaci:

$$(7.14) \quad \int_{y_0 - \frac{B}{C}}^{y - \frac{B}{C}} \frac{y^2 + \bar{K}}{y^3 + 3Py + 2S} dy = -\frac{G}{\eta} (t - t_0),$$

gdzie

$$(7.15) \quad y_0 = f_0 + \frac{B}{C} = \frac{B}{C}, \quad \bar{K} = \frac{A}{2C} - \left(\frac{B}{C}\right)^2, \quad y = f + \frac{B}{C},$$

$$3P = -\frac{1}{C^2} (B^2 + C\bar{D}).$$

Można wykazać, że dla  $f_0' > 0$  równanie algebraiczne

$$(7.16) \quad y^3 + 3Py + 2S = 0$$

posiada jeden pierwiastek rzeczywisty  $y_1$ . Mianownik wyrażenia podcałkowego w równaniu (7.14) można zatem przedstawić w postaci

$$(7.17) \quad (y - y_1) [y^2 + y_1 y + (y_1^2 + 3P)].$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do równania (7.14) oraz wykonując operację całkowania otrzymujemy ostatecznie

$$(7.18) \quad \ln \left| \frac{f - y_1}{\bar{f}_0 - y_1} \right|^{A_0 + \bar{K}A_1} \left| \frac{f^2 + y_1 f + (y_1^2 + 3P)}{\bar{f}_0^2 + y_1 \bar{f}_0 + (y_1^2 + 3P)} \right|^{B_0 + \bar{K}B_1} + \frac{1}{2\sqrt{D_0}} [2(C_0 + C_1) - (B_0 + B_1) y_1] \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2f + y_1}{2\sqrt{D_0}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\bar{f}_0 + y_1}{2\sqrt{D_0}} \right) = -\frac{G}{\eta} (t - t_0),$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$(7.19) \quad A_0 = \frac{y_1^2}{D_0}, \quad B_0 = \frac{2y_1^2 + 3P}{D_0}, \quad C_0 = \frac{y_1(y_1^2 + 3P)}{D_0}, \quad D_0 = 3(y_1^2 + P),$$

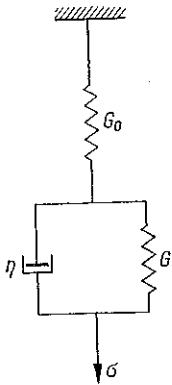
$$A_1 = \frac{\bar{K}}{D_0}, \quad B_1 = -\frac{\bar{K}}{D_0}, \quad C_1 = -2y_1 \frac{\bar{K}}{D_0}, \quad \bar{f}_0 = \frac{B}{C}.$$

Równanie (7.18) przedstawia ściśle rozwiązanie nieliniowego równania różniczkowego (7.11) w formie uwikłanej w przypadku, gdy własności fizyczne materiału powłoki dają się przedstawić modelem Kelvina.

Z rozwiązania (7.18) wynika, że dla czasu  $t \rightarrow \infty$  funkcja ugięcia  $f$  rośnie nieograniczenie, jeśli tylko spełnione są warunki:

$$(7.20) \quad y_1 \neq 0, \quad A_0 + \bar{K}A_1 > 0, \quad B_0 + \bar{K}B_1 < 0,$$

$$y_1^2 < -\frac{1}{2}(3P - \bar{K}^2), \quad P < 0.$$



Rys. 2

### 8. Uogólniony model parametrowy

Rozpatrzmy obecnie przypadek, gdy właściwości fizyczne materiału powłoki mogą być przedstawione modelem trójparametrowym, złożonym z elementu Kelvina szeregowo połączonego ze sprężyną o stałej sprężystości  $G_0$ . Dla takiego modelu operatory  $L$  i  $L^*$  mają odpowiednio kształt

$$(8.1) \quad k = L[g] = \frac{1}{2G_0} g(t) + \frac{1}{2\eta} \int_{t_0}^t g(\tau) e^{-\frac{G}{\eta}(t-\tau)} d\tau,$$

$$g = L^*[k] = e^{-\Omega(t-t_0)} \left\{ k_0 + 2G_0 \int_{t_0}^t \left[ \dot{k}(\tau) + \frac{G}{\eta} k(\tau) e^{-\Omega(t-t_0)} \right] d\tau \right\}.$$

Podobnie jak poprzednio ograniczymy się do rozwiązania w pierwszym przybliżeniu.

Podstawiając operator (8.1)<sub>2</sub> do równania (5.2)<sub>2</sub>, a następnie eliminując całki otrzymujemy

$$(8.2) \quad \dot{f}_0 + \frac{G}{\eta} \varkappa f_0 = \Omega H f_0^0.$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia

$$(8.3) \quad \Omega = \frac{G}{\eta} \left( 1 - \frac{G_0}{G} \right), \quad \varkappa = \frac{1 - \Omega_0 D_0}{1 - D_0}, \quad D_0 = \frac{D}{2G_0 \alpha_1},$$

$$\Omega_0 = 1 + \frac{G_0}{G}, \quad H = \frac{D_0}{1 - D_0}.$$

Rozwiązanie równania (8.2) ma postać

$$(8.4) \quad f_0 = \Omega_0 \varkappa_0 f_0^0 + (f_0 - \Omega_0 \varkappa_0 f_0^0) e^{-\varkappa \frac{G}{\eta} (t-t_0)},$$

gdzie

$$(8.5) \quad \varkappa_0 = \frac{D_0}{1 - \Omega_0 D_0}.$$

Równanie (5.2)<sub>2</sub> po podstawieniu operatorów (8.1)<sub>2</sub> i eliminacji całek przyjmuje postać

$$(8.6) \quad \dot{f}_1 + \frac{G}{\eta} \kappa f_1 = \frac{\gamma_0}{2G_0 \alpha_1 (1 - D_0)} \{ 2 [\dot{f}_0 + \Omega (2f_0^0 + f_0)] L^* (f_0) + \\ + 2 (2f_0^0 + f_0) \dot{L}^* (f_0) + \dot{L}^* (f^2) + \Omega L^* (f_0^2) \} = X(t),$$

gdzie  $f_0$  jest określone zależnością (8.4), a operatory  $L^* [f_0]$  i  $L^* [f_0^2]$  są odpowiednio równe

$$(8.7) \quad L^* (f_0) = 2G_0 \left[ a + f_e b e^{-\frac{G}{\eta} \kappa (t-t_0)} + c e^{-\Omega (t-t_0)} \right], \\ L^* (f_0^2) = 2G_0 \left[ f_e^2 + d + i e^{-2\frac{G}{\eta} \kappa (t-t_0)} + j e^{-\frac{G}{\eta} \kappa (t-t_0)} - l \cdot e^{-\Omega (t-t_0)} \right]$$

przy następujących oznaczeniach:

$$(8.8) \quad a = f_0^0 \kappa_0, \quad b = \bar{\Omega} \frac{1 - \kappa}{1 - \kappa \bar{\Omega}} (f_e - a \Omega_0), \quad c = f_e + b - a, \\ d = \Omega_0 a^2, \quad i = \frac{1}{\Omega_0 - 2\kappa} [(1 - 2\kappa) (f_e^2 + \Omega_0^2 a^2) - 2f_e \Omega_0 a (1 - \kappa)], \\ j = \Omega_0 \frac{2a}{\Omega_0 - \kappa} [f_e - \Omega_0 a (1 - \kappa)], \quad l = \frac{1}{\Omega_0 (\Omega_0 - 2\kappa)} \{ \Omega_0 (1 - 2\kappa) (\Omega_0 - \\ - \kappa) f_e^2 - 2\Omega_0^2 f_e a [(1 - \kappa) (\Omega_0 - \kappa_0) - (\Omega_0 - 2\kappa)] + \Omega_0^2 a^2 [(\Omega_0 + \\ - \kappa) (\Omega_0 - 2\kappa) - 2(1 - \kappa) (\Omega_0 - 2\kappa) + (1 - 2\kappa) (\Omega_0 - \kappa)] \}.$$

Całkując równanie (8.6) otrzymujemy

$$(8.9) \quad f_1 = \frac{\gamma_0}{\alpha_1 (1 - D_0)} \left\{ \bar{a} + [\bar{b} (t - t_0) - (\bar{c} + \bar{a}) + \bar{d}] e^{-\frac{G}{\eta} \kappa (t-t_0)} + \right. \\ \left. + \bar{c} e^{-2\frac{G}{\eta} \kappa (t-t_0)} - \bar{d} e^{-(\Omega + \frac{G}{\eta} \kappa) (t-t_0)} \right\},$$

gdzie

$$(8.10) \quad \bar{a} = \frac{\Omega_0}{\kappa} [2a (2f_0^0 + a \Omega_0) + (f_e^2 + d)], \quad \bar{d} = 2 \frac{\kappa}{\Omega_0} c (a \Omega_0 - f_e), \\ \bar{b} = \left( \Omega - \frac{G}{\eta} \kappa \right) [2a (f_e - a \Omega_0) + 2f_e b (2f_0^0 + a \Omega) + j], \\ \bar{c} = \frac{1}{\kappa} (\Omega_0 - 2\kappa) [2f_e b (f_e - a \Omega_0) + i].$$

Rozwiązanie przedstawimy w formie

$$(8.11) \quad f = f_0 + \delta f_1,$$

gdzie  $f_0$  i  $f_1$  są określone zależnościami (8.4) i (8.9).

W granicznym przypadku, gdy  $t \rightarrow \infty$ , przy założeniu, że  $\varkappa > 0$ , z równania (8.11) otrzymujemy

$$(8.12) \quad f_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f = a\Omega_0 + \bar{a}\delta \frac{\gamma_0}{a_1(1-D_0)}.$$

W przypadku szczególnym, gdy  $\varkappa = 0$ , tzn. dla

$$(8.13) \quad p_0 = \frac{12}{5} \frac{GG_0}{G+G_0} \frac{h}{R} \left( \frac{c}{R} \right)^2,$$

na podstawie równania (8.2) znajdujemy

$$(8.14) \quad f_0 = f_e + \Omega \frac{G}{G_0} f_0^0 (t - t_0).$$

Wówczas równanie (8.9) przyjmuje postać

$$(8.15) \quad f_1 = \frac{\gamma_0}{a_1(1-D_0)} \left[ \bar{a}(t-t_0) + \frac{1}{2} \bar{b}(t-t_0)^2 + \frac{1}{3} \bar{c}(t-t_0)^3 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Omega} \bar{d}(t-t_0) e^{-\Omega(t-t_0)} - \frac{1}{\Omega} \left( \bar{g} + \frac{1}{\Omega} \bar{d} \right) e^{-\Omega(t-t_0)} + \frac{1}{\Omega} \left( \bar{g} + \frac{\bar{d}}{\Omega} \right) \right],$$

gdzie

$$(8.16) \quad \begin{aligned} \bar{a} &= a^* d^* + h^* j^* + m^*, & \bar{b} &= b^* d^* + a^* g^* + i^* j^*, & \bar{c} &= g^* b^* + n^*, \\ \bar{d} &= b^* c^* + i^* k^*, & \bar{g} &= a^* d^* + h^* j^* + m^*, \\ a^* &= 2\Omega \left[ \left( \frac{G}{G_0} + 2 \right) f_0^0 + f_e \right], & b^* &= 2\Omega^2 \frac{G}{G_0} f_0^0, \\ c^* &= f_e - \left( \frac{G}{G_0} f_0^0 + \frac{f_e}{\Omega_0} \right) + \frac{G}{G_0} \frac{f_0^0}{\Omega_0}, & d^* &= \frac{G}{G_0} f_0^0 + \frac{f_e}{\Omega_0} - \frac{1}{\Omega_0} \frac{G}{G_0}, \\ g^* &= \frac{1}{\Omega_0} \frac{G}{G_0} f_0^0, & h^* &= 2(2f_0^0 + f_e), & i^* &= 2\Omega \frac{G}{G_0} f_0^0, & j^* &= \frac{1}{\Omega_0} \frac{G}{G_0} f_0^0, \\ k^* &= -\Omega c^*, & l^* &= f_e^2 - 2 \frac{G}{G_0} f_0^0 \left( \Omega \frac{G}{G_0} f_0^0 + f_e \right) - 2 \left( \frac{G}{G_0} \right)^2 f_0^0 \frac{1}{\Omega_0}, \\ m^* &= 2 \frac{G}{G_0} f_0^0 \left( \Omega \frac{G}{G_0} f_0^0 + f_e \right), & n^* &= \left( \frac{G}{G_0} \right)^2 f_0^0 \frac{\Omega^2}{\Omega_0}. \end{aligned}$$

Z postaci równań (8.14) oraz (8.15) wnioskujemy, że w przypadku, gdy obciążenie zewnętrzne spełnia zależność (8.13), ugięcie zmierza do nieskończoności w nieskończenie długim okresie czasu.

Rozpatrzmy z kolei przypadek, gdy wielkość  $\varkappa$  przyjmuje wartość mniejszą od zera, tzn. gdy

$$(8.17) \quad 1 - D_0 > 0, \quad 1 - \Omega_0 D_0 < 0$$

lub

$$(8.18) \quad \frac{12}{5} \frac{G G_0}{G+G_0} \frac{h}{R} \left(\frac{c}{R}\right)^2 < p < \frac{12}{5} G_0 \frac{h}{R} \left(\frac{c}{R}\right)^2.$$

Podstawiając do równań (8.4) i (8.9) zależności

$$(8.19) \quad \varkappa = -\bar{\varkappa} < 0, \quad \varkappa_0 = -\bar{\varkappa}_0 < 0,$$

znajdujemy, że ugięcie bardzo szybko zmierza do nieskończoności w skończonym przedziale czasowym. I tak równanie (8.4) przyjmuje w tym przypadku postać

$$(8.20) \quad f_0 = (f_e + \Omega_0 \bar{\varkappa}_0 f_0^0) e^{\frac{\bar{\varkappa}}{\tau} (t-t_0)} - \Omega_0 \bar{\varkappa}_0 f_0^0.$$

Gdy  $\varkappa = -\infty$  lub  $\bar{\varkappa} = \infty$ , ugięcie rośnie nieograniczenie w chwili początkowej  $t = 0$ ; wówczas  $1 - D_0 = 0$ , a obciążenie

$$(8.21) \quad p_{kr} = \frac{12}{5} G_0 \frac{h}{R} \left(\frac{c}{R}\right)^2.$$

### 9. Rozwiązanie dla natychmiastowego stanu sprężystego

Przybliżone rozwiązanie dla powłoki z materiału o liniowej charakterystyce sprężystej możemy uzyskać z układu równań operatorowych (5.2). W tym przypadku otrzymujemy kolejno

$$(9.1) \quad f_{e0} = \frac{D_0}{1 - D_0} f_0^0, \quad f_{e1} = \frac{D_0 \gamma_0}{a_1 (1 - D_0)^2} f_0^{02} \left(4 + 3 \frac{D_0}{1 - D_0} f_0^0\right).$$

Rozwiązanie dla stanu natychmiastowego przedstawimy w formie

$$(9.2) \quad f_e = f_{e0} + \delta f_{e1}.$$

Z powyższego wzoru wynika, że funkcja ugięcia  $f_e$  rośnie nieograniczenie dla  $D_0 = 1$ , tzn. gdy

$$(9.3) \quad p_{kr} = \frac{12}{5} G \frac{h}{R} \left(\frac{c}{R}\right)^2.$$

### 10. Wnioski

Rozpatrzyliśmy problem wyboczenia przy pełzaniu geometrycznie nieliniowej małowłósniej powłoki kulistej dla pewnych szczególnych własności lepkosprężystych materiału powłoki. Przyjmowaliśmy, że w stanie neutralnym powłoka posiada niewielkie wgniecenie, które można uważać za małe odchylenie od kształtu idealnego. Problem traktowaliśmy jako lokalne wyboczenie powłoki kulistej pod wpływem stałego zewnętrznego ciśnienia o intensywności  $p$ . Przyjmowaliśmy, że w procesie deformacji promień wgniecenia  $c$  nie ulega zmianie.

Przyjęcie konkretnej formy dla zależnej od czasu funkcji ugięcia  $w$  oraz zastosowanie metody Galerkinia pozwoliło na wyrażenie naprężeń i równania na ugięcie środka wgniecenia w ogólnej formie.

Podaliśmy rozwiązanie równania podstawowego przy zastosowaniu perturbacji, przy czym mały parametr określał geometrię powłoki. W wyniku przedstawiliśmy rozwiązanie w postaci rekurencyjnego układu liniowych równań operatorowych. Jako przypadki szczególne rozpatrzyliśmy niektóre postacie operatorów dla prostych modeli reologicznych (modele Maxwella i Kelvina, model uogólniony) oraz liniowo-sprężysty materiał powłoki.

Metoda rozwiązania pozwoliła na znalezienie pierwszego przybliżenia dla funkcji ugięcia zależnej od czasu. W przypadku modelu Kelvina przedstawiliśmy ponadto rozwiązanie ściśle dla funkcji ugięcia, podane w formie uwikłanej. Jako przypadek szczególny podaliśmy w formie równania algebraicznego oraz w formie perturbacyjnej rozwiązanie dla stanu natychmiastowego, które pozwoliło na określenie warunku początkowego dla ugięcia  $w$ .

Proces wyboczenia przy pełzaniu zależy w sposób istotny od właściwości fizycznych materiału powłoki. Dla stanu natychmiastowego wartość ciśnienia krytycznego określić możemy jako ciśnienie, którego wielkość powoduje natychmiastowy nieograniczony wzrost ugięcia  $f$ . Na przykład dla modelu Maxwella i modelu uogólnionego wartość ciśnień krytycznych wyraża się odpowiednio formułami:

model Maxwella

$$(10.1) \quad p_{kr} = \frac{12}{5} G \frac{h}{R} \left( \frac{c}{R} \right)^2,$$

model uogólniony

$$p_{kr} = \frac{12}{5} G_0 \frac{h}{R} \left( \frac{c}{R} \right)^2.$$

Z postaci powyższych wzorów wynika, że wartość ciśnienia krytycznego uzależniona jest od promienia wgniecenia  $c$  oraz od promienia krzywizny powłoki  $R$ . Należy zauważyć, że krytyczna wartość ciśnienia nie zależy od początkowego odchylenia  $f_0^0$ .

Wykazaliśmy, że w przypadku modelu Maxwella dla  $p < p_{kr}$  ugięcie  $f$  zmierza do nieskończoności w nieskończenie długim okresie czasu. Przybliżone rozwiązanie dla funkcji ugięcia  $f$ , uwzględniające efekt geometrycznej nieliniowości powłoki, wskazuje na wykładniczy charakter wzrostu ugięcia w czasie.

Dla modelu Kelvina określiliśmy zachowanie się powłoki w zależności od ciśnienia znajdując, że dla

$$(10.2) \quad p_0 < \frac{12}{5} G \frac{h}{R} \left( \frac{c}{R} \right)^2 = p^*$$

następuje stabilizacja ugięcia również w przypadku geometrycznej nieliniowości powłoki. Dla  $p = p^*$  następuje nieskończenie wielki przyrost ugięcia  $f$  w nieskończonym przedziale czasowym, jeżeli natomiast  $p > p^*$ , następuje bardzo szybki wzrost ugięcia (ugięcie jest wykładniczą funkcją czasu). Ściśle rozwiązanie dla mo-



delu Kelvina wskazuje na to, że ugięcie dąży do nieskończoności w skończonym przedziale czasowym. Gdy ciśnienie  $p = p^*$  następuje wzrost ugięcia w czasie, przy czym, jeżeli ograniczamy się do uwzględnienia przybliżenia liniowego, ma on charakter liniowy. Wpływ nieliniowości geometrycznej powoduje w tym przypadku małe odchylenie od procesu liniowego. Szybszy wzrost ugięcia następuje natomiast wtedy, gdy

$$(10.3) \quad p_0 < p < p_{kr},$$

ponieważ zależność ugięcia od czasu ma wtedy charakter wykładniczy.

Należy podkreślić, że przedstawiona tutaj analiza miała charakter raczej jakościowy aniżeli ilościowy. Wynikało to z przyjęcia prostych liniowych modeli reologicznych. Można się jednak spodziewać, że pewne przedstawione tutaj wyniki dla procesu wybooczenia przy pełzaniu odnoszą się w przybliżeniu również do materiałów rzeczywistych. Dotyczy to zarówno wielkości ciśnień jak i charakteru zmiany ugięcia w czasie.

Dalsza, bardziej dokładna analiza problemu wymagałaby założenia zmienności w czasie promienia wgniecenia oraz przyjęcia bardziej ogólnego, nieliniowego równania konstytutywnego dla materiału powłoki. Założenia te mogą mieć istotny wpływ na wyniki przy badaniu wybooczenia geometrycznie nieliniowych powłok pełzających.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. BYCHAWSKI, *Investigation of creep buckling of cylindrical sheet panels in the range of small and large deflections*, Proc. of the World Conference on Shell Structures IASS, San Francisco 1962,
2. Z. BYCHAWSKI, *Some problems of creep bending and creep buckling of viscoelastic sheet panels in the range of large deflections*, Non-classical shell problems, Proc. of the IASS Symposium, Warsaw 1963.
3. Z. BYCHAWSKI, *Badanie wybooczenia przy pełzaniu płyt kołowych w zakresie małych i dużych ugięć*, Rozpr. Inżyn., 4, 9 (1961).
4. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва 1956.

#### Резюме

#### ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается вопрос потери устойчивости геометрически нелинейной, пологой сферической оболочки, из линейного вязко-упругого материала, подверженной действию постоянного внешнего давления.

Предполагается, что перед приложения нагрузки, оболочка имеет небольшую, локальную вогнутость, являющуюся малым отклонением от идеальной формы. Обсуждаемый вопрос, рассматривается как локальная устойчивость сферической оболочки при ползучести.

Выводится нелинейное уравнение задачи, предлагая форму вогнутости и вид прогиба деформированного элемента оболочки. Для определения середины прогиба, решается основное нелинейное уравнение в операторном виде при использовании метода Галеркина.

В общем случае физического закона, когда операторы находящиеся в основном уравнении являются линейными интегральными операторами, это уравнение сводится к рекуррентной системе интегральных линейных уравнений, полученных путем пертурбаций. Малый параметр имеет геометрическое значение и выражается размерами оболочки.

Даются решения для особых случаев вязко-упругих тел и приводится обсуждение полученных решений. В качестве особого случая получается, также, решение для упругой оболочки.

В заключение обсуждается поведение для оболочки в процессе ползучести, в зависимости от величины нагрузки и физических свойств материала оболочки.

### Summary

#### CREEP BUCKLING OF A GEOMETRICALLY NONLINEAR SPHERICAL SHELL

The problem under consideration is that of buckling of a geometrically nonlinear spherical shell of small rise made of a linear viscoelastic material, loaded by a constant external load. It is assumed that before the load is applied, the shell has a small local concavity constituting a small deviation from its ideal shape. The problem is treated as that of local buckling of a spherical shell under conditions of creep.

The nonlinear equations of the problem are derived by assuming the form of the concavity and the form of the deflection of a deformed element of the shell. In order to determine the deflection of the centre of the concavity we solve the fundamental nonlinear equation in the operator form, by applying the Galerkin method.

In the general case of the physical law, if the operators involved in the fundamental equation are linear integral operators, this equation can be reduced to a set of linear integral recurrence equations obtained by perturbation. The small parameter has a geometric sense and is expressed in terms of the dimensions of the shell.

Solutions are given for particular cases of viscoelastic bodies with a discussion of the results obtained. As a particular case we obtain the solution for the elastic shell.

In conclusion the behaviour of the shell in the course of the creep process is discussed in function of the load and the physical properties of the material.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH  
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji 3 stycznia 1968 r.*