

METODA KOLEJNYCH PRZYBLIŻEŃ WYZNACZANIA KSZTAŁTU BELEK
SPRĘŻONYCH NA PODSTAWIE HIPOTEZY A. CAQUOT

JAN JAWORSKI, WOJCIECH MARKS (WARSZAWA)

1. Wstęp

W pracy [2] rozważono szczegółowo zagadnienie kształtowania belek sprężonych z warunku wyrównania wyteżeń na podstawie hipotezy A. Caquot. Podano tam zależność określającą wyteżenie tworzywa podaną przez autora hipotezy [1] oraz jej zmodyfikowaną postać, która może być bezpośrednio zastosowana w zagadnieniu kształtowania belek. Sformułowano również zadanie wyznaczania funkcji grubości środników w przekrojach poprzecznych belek sprężonych, poddanych n stanom obciążenia. W otrzymanym rozwiązaniu występują stałe, których wyznaczenie (zwłaszcza w przypadku wielu stanów obciążenia) jest kłopotliwe, gdyż wymaga rozwiązania układu równań nieliniowych.

W celu łatwiejszego rozwiązania tego zagadnienia w niniejszej pracy przedstawiono metodę kolejnych przybliżeń. Posługując się tą metodą można wyznaczyć grubość środnika w określonych punktach każdego przekroju poprzecznego belki. Otrzymane wyniki można traktować jako dostatecznie dokładne bądź też wykorzystać je jako pierwsze przybliżenie rozwiązania ścisłego.

Opracowano również program na maszynie cyfrową Elliott 803-B do wyznaczania szerokości środnika w r punktach przekroju poprzecznego belek.

W pracy przyjęto następujące oznaczenia:

- $2a$ wysokość belki,
- b szerokość półki,
- c grubość półki,
- d minimalne otulenie kabli sprężających,
- e rzędne środków ciężkości uzbrojenia sprężającego,
- g grubość środnika,
- l rozpiętość belki,
- A pole przekroju poprzecznego,
- I moment bezwładności przekroju poprzecznego,
- S moment statyczny,
- E moduł sprężystości liniowej,
- P siła sprężająca
- M moment zginający,
- T siła styczna,
- M_1, T_1 maksymalny moment zginający i odpowiadająca temu momentowi siła styczna w przekroju o odciętej u ,

T_2, M_2 maksymalna siła styczna i odpowiadający tej sile moment zginający w przekroju o odciętej u ,

σ naprężenie normalne,

τ naprężenie styczne,

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, t$ stałe charakteryzujące tworzywo belki.

Indeks p oznacza obciążenia ruchome, indeks q obciążenia stałe. Kreska nad (pod) symbolem oznacza największą (najmniejszą) jego wartość.

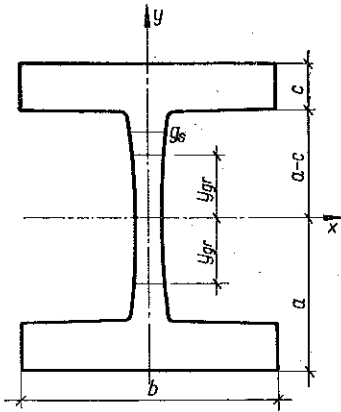
2. Opis metody

Przedstawiona metoda kolejnych przybliżeń pozwala wyznaczyć w przekroju poprzecznym belki (rys. 1) grubość środnika w r punktach oraz grubość półki c .

Jako dane występują tu momenty zginające i siły styczne (w obydwu stanach obciążenia decydujących o wyteżeniu w poszczególnych punktach przekroju) oraz siła sprężająca P .

Sposób określania stanów obciążenia, wywołujących największe wyteżenie w rozpatrywanym przekroju, podano w pracy [3].

Pole przekroju, moment statyczny oraz moment bezwładności przekroju w tym przypadku są następujące:



Rys. 1

$$(1) \quad A = 2bc + \frac{a-c}{r} \sum_{i=0}^{r-1} (g_i + g_{i+1}),$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, r,$$

$$(2) \quad S_s = bc \left(a - \frac{c}{2} \right) + \left(\frac{a-c}{2r} \right)^2 \sum_{i=0}^{r-1} (g_i + g_{i+1})(2i+1),$$

$$(3) \quad I = \frac{bc^3}{6} + 2bc \left(a - \frac{c}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{a-c}{2r} \right)^3 \sum_{i=0}^{r-1} (g_i + g_{i+1})(2i+1)^2.$$

Warunek wyrównania wyteżeń według hipotezy A. Caquot [2],

$$\tau = \left(\frac{\sigma}{\sigma_3} + t \right) \sqrt{(\sigma - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma)},$$

który ma być spełniony w r punktach każdego przekroju normalnego belki, przybiera w tym przypadku postać

$$(4) \quad \frac{T_k S_s}{I g_s} = \left(\frac{P}{A \sigma_3} + \frac{M_k (a-c) s}{I \sigma_3 r} + t \right) \times \sqrt{\left[\frac{P}{A} - \sigma_1 + \frac{M_k (a-c) s}{I r} \right] \left[\sigma_2 - \frac{P}{A} - \frac{M_k (a-c) s}{I r} \right]},$$

gdzie

$$k = 1, \quad \text{jeżeli } -y_{gr} \geq y \text{ lub } y \geq y_{gr},$$

$$k = 2, \quad \text{jeżeli } -y_{gr} < y < y_{gr}.$$

$$s = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Wielkości M_1 , M_2 , T_1 i T_2 wyznaczono na podstawie obwiedni maksymalnych momentów zginających i odpowiadających im sił stycznych oraz obwiedni maksymalnych sił stycznych i odpowiadających im momentów zginających z następujących wzorów:

$$(5) \quad \begin{aligned} M_1 &= M_q + \bar{M}_p - M_s, & M_2 &= M_q + M_p^T - M_s, \\ T_1 &= T_q + T_p^{\bar{M}} - T_s, & T_2 &= T_q + \bar{T}_p - T_s, \end{aligned}$$

gdzie

$$M_s = M_q + \frac{1}{2}(\bar{M}_p + M_p), \quad T_s = T_q + \frac{1}{2}(T_p^{\bar{M}} + T_p^M).$$

Rozwiązując równanie (4) względem g_s oraz biorąc pod uwagę, że moment zginający i pole przekroju odpowiadają wielkościom naprężeń normalnych $\bar{\sigma}$ i $\underline{\sigma}$ występujących na krawędziach przekroju (przy takim przyłożeniu obciążenia, które powoduje powstanie maksymalnego momentu zginającego) otrzymujemy w każdym przekroju normalnym belki następujący układ $r+2$ równań nieliniowych:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\bar{M}_p + M_p}{(\bar{\sigma} + \underline{\sigma})(a-d) - 2\beta\gamma l^2} &= 2bc + \frac{a-c}{r} \sum_{i=0}^{r-1} (g_i + g_{i+1}), \\ \frac{2M_1 a}{\bar{\sigma} - \underline{\sigma}} &= \frac{bc^3}{6} + 2bc \left(a - \frac{c}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{a-c}{2r}\right)^3 \sum_{i=0}^{r-1} (g_i + g_{i+1}) (2i+1)^2, \\ g_s &= \frac{bc \left(a - \frac{c}{2}\right) + \sum_{i=s+1}^{r-1} (g_i + g_{i+1}) (2i+1) + g_{s+1} (2s+1)}{\frac{I\tau}{T_k \left(\frac{a-c}{2r}\right)^2 - (2s+1)}}. \end{aligned}$$

Układ równań (6) można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń. Obierając średnią grubość środnika \bar{g}_z w przekroju belki wyznaczamy a i c z równań (6)₁ i (6)₂. Po znalezieniu tych wartości obliczamy grubość środnika w r punktach ze wzoru (6)₃, a następnie znajdujemy

$$(7) \quad \tilde{g}_{z+1} = \frac{1}{2r} \sum_{i=0}^{r-1} (g_i + g_{i+1}).$$

Obliczenie to powtarzamy dopóty, dopóki średnia założona grubość środnika \tilde{g}_z i obliczona \tilde{g}_{z+1} nie będą różniły się dostatecznie mało.

Ze względu na mały wpływ zmiany grubości środka g na moment statyczny S i moment bezwładności I proces przybliżania jest szybko zbieżny.

W przypadku gdy wysokość przekroju jest określona *a priori* układ równań $(6)_1$ $(6)_2$ redukuje się do równania $(6)_2$, z którego wyznaczamy c .

Gdy kształtujemy belki hiperstatyczne lub gdy chcemy uwzględnić wpływ rozmieszczenia materiału wzdłuż belki na siły wewnętrzne, to można rozwiązywać zagadnienie stosując również metodę kolejnych przybliżeń. Postępujemy wówczas w sposób następujący. Wyznaczymy siły wewnętrzne jak w belce o stałym momencie bezwładności i polu przekroju, a dalej kształtujemy ustrój w sposób opisany powyżej pod działaniem znalezionych momentów zginających i sił stycznych. W tak ukształtowanym ustroju obliczamy momenty bezwładności i pola przekrojów, a następnie znajdujemy odpowiadające tym wielkościom momenty zginające i siły styczne. Pod działaniem tak obliczonych sił wewnętrznych ponownie kształtujemy przekrój poprzeczny belki.

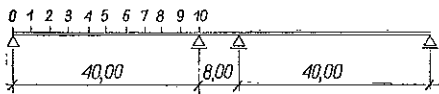
Wyniki otrzymane z drugiego przybliżenia porównujemy z wynikiem z pierwszego przybliżenia. W razie potrzeby przeprowadzamy dalsze etapy przybliżeń w ten sam sposób.

Wskazana metoda sprowadza kształtowanie konstrukcji do działań arytmetycznych i pozwala na wykorzystanie maszyn cyfrowych.

Do wykonania obliczeń za pomocą maszyny cyfrowej niezbędny jest program składający się z prostych operacji arytmetycznych. Podstawą ułożenia takiego programu jest tak zwany schemat blokowy. Dla rozpatrywanego zagadnienia ułożono odpowiedni schemat i program na maszynie cyfrową Elliott 803-B w autokodzie Mark-2. Program ten znajduje się w bibliotece programów Centralnego Ośrodka Przetwarzania Informacji w Instytucie Elektrotechniki w Międzyzlesiu.

3. Przykład

Rozpatrywana belka ciągła stanowi ustrój nośny trójprzęsłowego mostu kolejowego. Rozpiętości przęseł wynoszą 40 m, 8 m i 40 m, szerokość — 4 m. Stosunki rozpiętości podporowych przęseł wynoszą $l_1 : l : l_1 = 5 : 1 : 5$ (rys. 2).



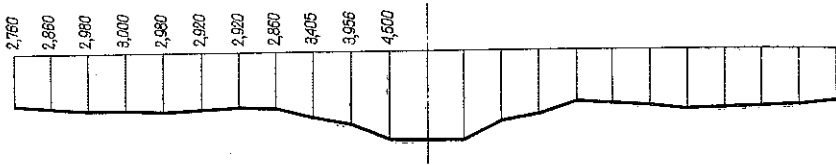
Rys. 2

Obciążenie ruchome przyjęto jak dla pierwszorzędnych linii kolejowych określone normą NC. Dynamiczny charakter obciążenia uwzględniono mnożąc pionowe naciski osi taboru przez współczynnik dynamiczny, zgodnie z obowiązującymi normami.

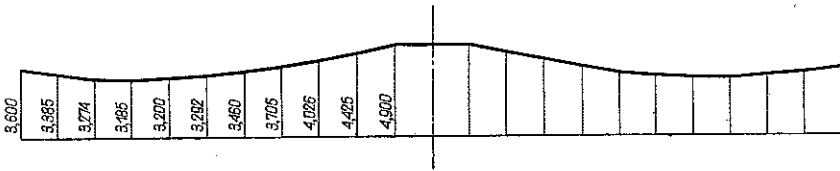
W zadaniu tym wyznaczono przekroje poprzeczne przęseł skrajnych co 0, l , l_1 obliczając grubości pólki oraz środków w 11 punktach każdego przekroju. W przęśle środkowym o rozpiętości 8 m przyjęto przekrój stały taki, jak na podporze pośredniej. Wpływ zmienności momentów bezwładności i pól przekrojów na siły wewnętrzne uwzględniono drogą kolejnych przybliżeń.

Założono, że belka ma stałą wysokość $2a = 2,20$ m oraz że $2a/l_1 = 1/18,2$.

Rozkład momentów bezwładności belki w punktach 0-10

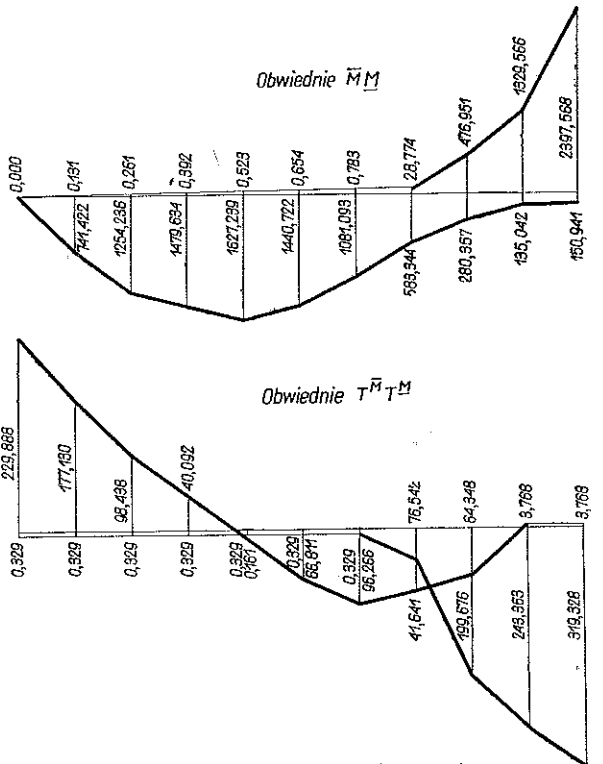
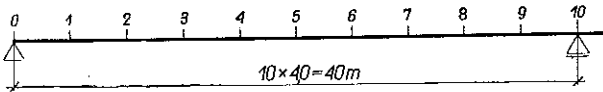


Rozkład pól przekrojów poprzecznych belki w punktach 0-10



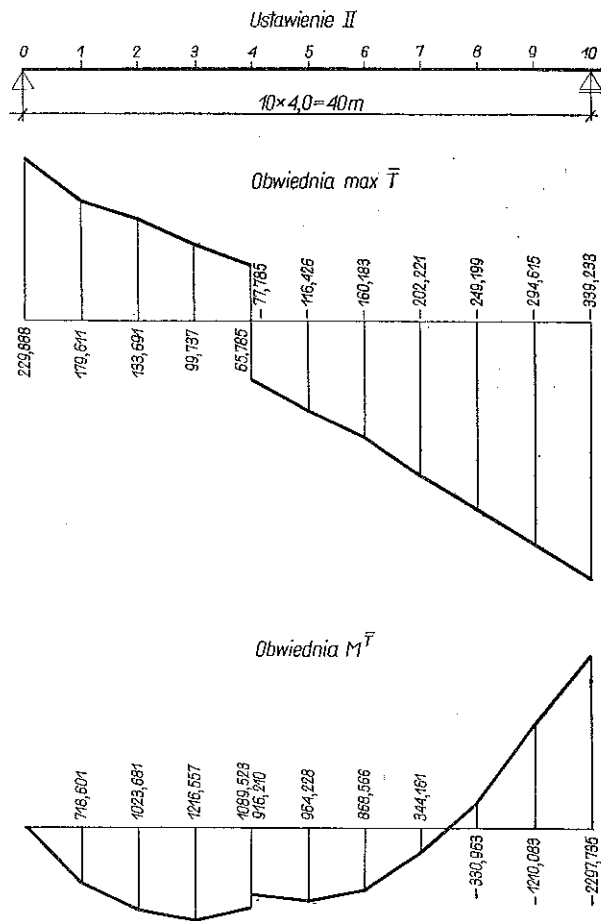
Rys. 3

Ustawienie I



Rys. 4

Za pierwsze przybliżenie przyjęto obwiednie sił wewnętrznych dla belki o stałym momencie bezwładności i stałym przekroju poprzecznym. Wprowadzając te wielkości do programu otrzymano wstępne kształty przekrojów poprzecznych. Rozkład momentów bezwładności i pól przekrojów poprzecznych wzdłuż rozpiętości mostu podano na rys. 3.



Rys. 5

W drugim przybliżeniu, znając funkcje zmienności sztywności, wyznaczono linie wpływu momentów zginających i sił stycznych we wszystkich rozpatrywanych przekrojach za pomocą maszyny cyfrowej Elliott 803-B. Wykorzystano przy tym gotowy program Y B-2 znajdujący się w bibliotece programów Instytutu Elektrotechniki w Międzyzlesiu. Na podstawie linii wpływu wykreślono obwiednie maksymalnych momentów zginających i odpowiadających im sił stycznych (rys. 4) oraz maksymalnych sił stycznych i odpowiadających im momentów zginających (rys. 5). Wielkości ekstremalnych momentów i sił stycznych oraz momentów zginających od ciężaru własnego zestawiono w tabelicy 1.

Tablica 1

Przekrój	Ciężar własny M_q	Obciążenie ruchome						
		I ustawienie obciążenia				II ustawienie obciążenia		
		\bar{M}_1	\bar{M}_2	$T_1 \bar{M}$	$T_1 \bar{M}$	$M_2 \bar{T}$	T_2	
0	0	0	0	177,130	177,130	0	0	229,888
1	548,220	741,482	-0,131	98,438	98,438	-0,329	718,601	179,611
2	934,020	1254,236	-0,261	40,092	40,092	-0,329	1023,681	133,916
3	1157,471	1479,634	-0,392	-6,161	-6,161	-0,329	1216,557	99,737
4	1226,169	1627,239	-0,523	-66,811	-66,811	-0,329	916,210	-77,613
5	1137,169	1440,722	-0,654	-96,266	-96,266	-0,329	964,288	-116,426
6	888,564	1081,093	-0,785	-76,542	-76,542	-0,329	868,566	-160,183
7	460,919	583,344	-28,774	-199,676	-199,676	-41,641	344,161	-202,221
8	-121,898	-476,951	280,357	-243,363	-243,363	-64,438	-330,963	-249,199
9	-905,861	-1329,566	133,042	-319,328	-319,328	3,768	-1210,083	-294,615
10	-1895,884	-2397,568	150,941			3,768	-2297,735	-339,233

Na podstawie wzorów (5) obliczono następnie wielkości M_1, M_2, T_1, T_2 (tablica 2).

Tablica 2

Przekrój	Ustawienie I (\bar{M})		Ustawienie II (\bar{T})	
	M_1	T_1	M_2	T_2
0	0	0	0	114,944
1	370,808	88,729	348,425	91,211
2	627,249	49,383	396,694	84,861
3	973,905	26,389	710,828	86,034
4	1164,107	-4,408	978,272	-75,560
5	986,091	-45,728	509,657	-95,343
6	540,939	-47,968	328,412	-111,886
7	311,059	-17,450	66,876	-143,129
8	-378,654	-67,619	-232,666	-117,142
9	-732,304	-123,565	-612,821	-174,818
10	-1267,690	-146,360	-885,176	-196,642

Wielkości siły sprężającej P obrano tak, aby mimośród e był mniejszy od $a - d$ oraz aby naprężenia na dolnej krawędzi w przekroju 4 w przypadku działania maksymalnego momentu zginającego były równe dozwolonym.

Przyjęto $P = 1760T$ w przekrojach 0-9. W przeszle środkowym przewidziano dodatkowe sprężenie takie, że P w przekroju 10 wynosi 2665T.

Przyjmując wielkości sił wewnętrznych z tablicy 2 jako dane do programu otrzymano wyniki zestawione w tablicy 3.

Wyznaczanie kształtu przekroju w punkcie 0. W przekroju tym moment zginający jest równy zeru. Kształtowanie według hipotezy A. Caquot'a sprowadza się zatem do wyrównania naprężeń stycznych.

Rzędne grubości środnika wyznaczono metodą kolejnych przybliżeń w sposób następujący. Przyjęto ze względów konstrukcyjnych, że grubość półki $c = 0,20$ m. Obrano grubość środnika \tilde{g}_0 i obliczono pole przekroju A , moment bezwładności I oraz funkcję Φ_1 równą w tym przypadku

$$\Phi_1 = \frac{I}{T} \left(\frac{P}{A\sigma_3} + t \right) \sqrt{\left(\frac{P}{A} - \sigma_1 \right) \left(\sigma_2 - \frac{P}{A} \right)}.$$

Następnie znaleziono

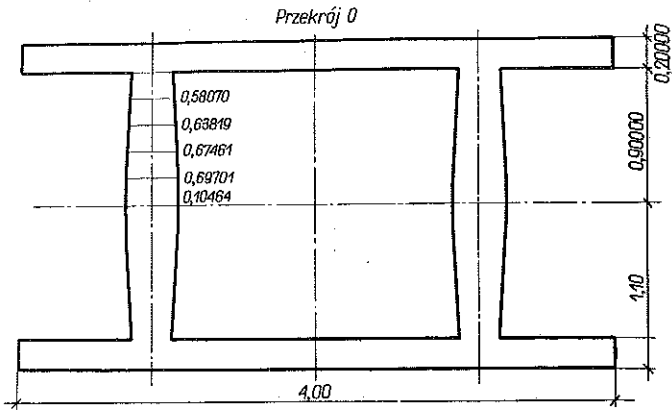
$$g_5 = \frac{bc \left(a - \frac{c}{2} \right)}{\Phi_1}$$

oraz funkcję

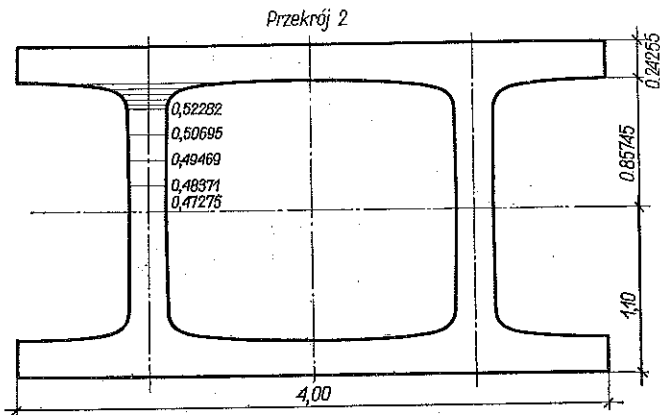
$$\Phi = \left(\frac{2r}{a - c} \right)^2 \Phi_1.$$

Tablica 3

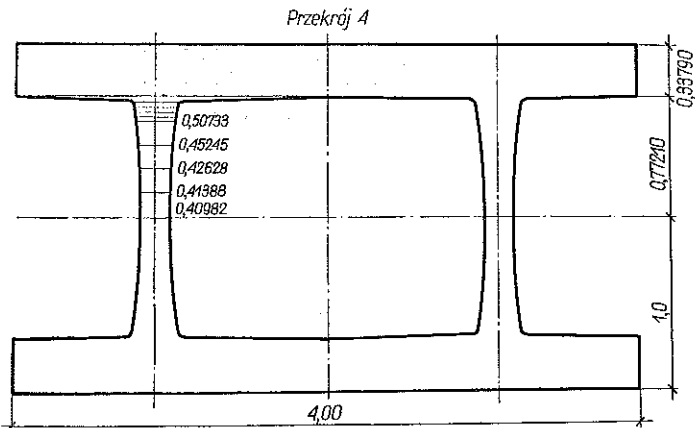
Przekrój	Grubości średników w punktach					Σ g	c
	0	1	2	3	4		
1	0,5618102	0,5914937	0,6269428	0,6834439	0,8309508	1,570724	0,1600854
2	0,4727538	0,4837104	0,4946921	0,5069551	0,5228253	1,444639	0,2425559
3	0,4665321	0,4725189	0,4829960	0,5009706	0,5329458	1,441734	0,3018357
4	0,4098211	0,4138864	0,4262844	0,4524539	0,5073394	1,408844	0,3379042
5	0,5165489	0,5189526	0,5206584	0,5222658	0,5246693	1,461661	0,3001792
6	0,6363725	0,6486863	0,6554917	0,6574783	0,6560561	1,558748	0,1988563
7	0,8903883	0,8848759	0,7475543	0,7816040	0,6931234	1,674873	0,1150878
8	0,7071684	0,7239201	0,8289407	0,7222210	0,7046218	1,606657	0,8073233
9	0,9939894	0,9976951	0,9971932	0,9993845	1,0205180	1,817910	0,1777681
10	1,1799900	1,1761502	1,1606311	1,1310016	1,2853600	1,523310	0,3857300



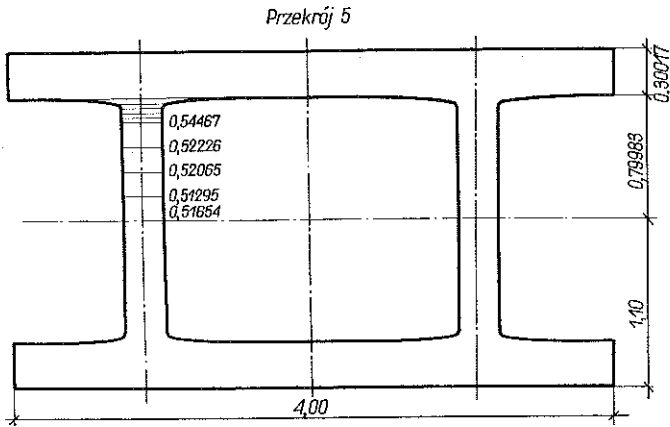
Rys. 6



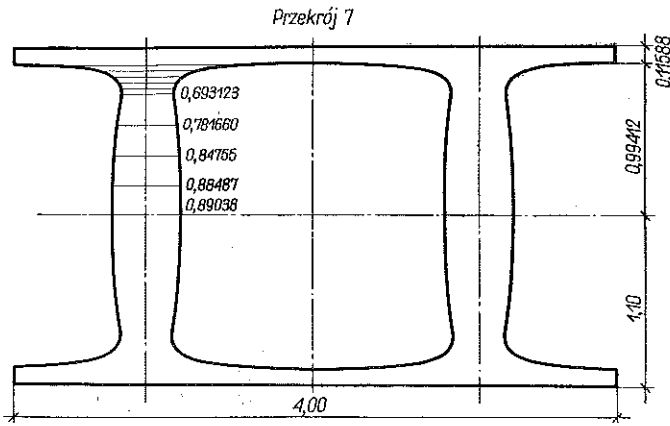
Rys. 7



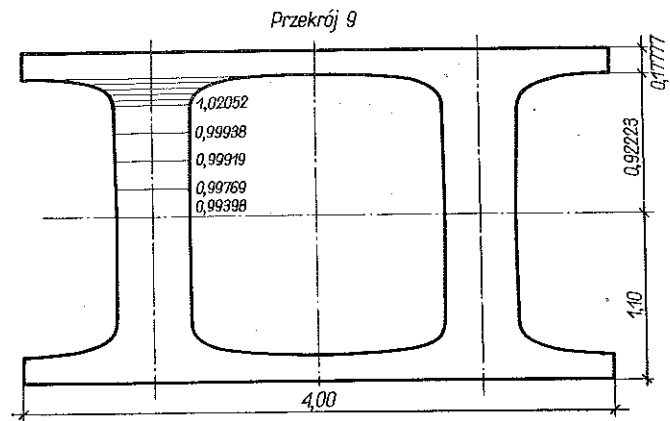
Rys. 8



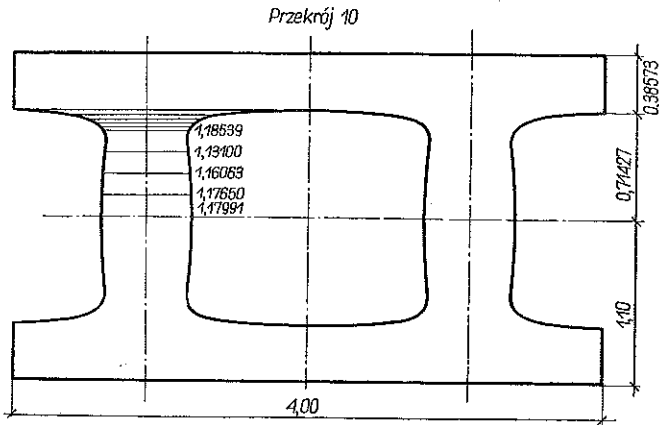
Rys. 9



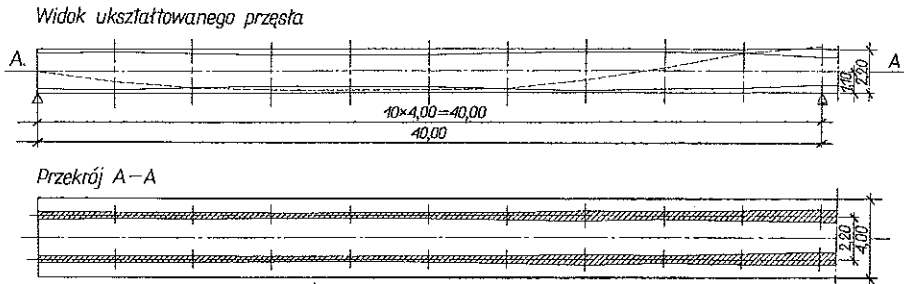
Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13

W dalszym ciągu znaleziono \tilde{g} drogą kolejnych przybliżeń (przyjmując za pierwsze przybliżenie $\tilde{g} = 0,5000$):

$$0,50000, \quad 0,55536, \quad 0,62856, \quad 0,63880.$$

Przyjmując, że \tilde{g} wyznaczone w trzecim przybliżeniu różni się dostatecznie mało od \tilde{g} z drugiego przybliżenia, wyznaczono wielkości g w poszczególnych punktach. Wynoszą one:

$$\begin{aligned} g_0 &= 0,70464 \text{ m}, & g_3 &= 0,63819 \text{ m}, \\ g_1 &= 0,69701 \text{ m}, & g_4 &= 0,58072 \text{ m}, \\ g_2 &= 0,67461 \text{ m}, & g_5 &= 0,53764 \text{ m}. \end{aligned}$$

Kilka przekrojów poprzecznych belki w punktach 0–10 pokazano na rys. 6–12, a widok boczny i przekrój wzdłużny ukształtowanego przęsła na rys. 13.

Różnica pomiędzy rozwiązaniem otrzymanym tą metodą a rozwiązaniem ścisłym polega przede wszystkim na tym, że otrzymujemy zamiast wzoru na grubość środnika jej rzędne w r punktach. Różnice pomiędzy rzędnymi wyznaczonymi

w obydwu przypadkach zależą od przyjętej liczby punktów r i już przy $r = 10$ są dostatecznie małe. Wynika to stąd, że moment bezwładności środnika stanowi zwykle tylko kilka procent momentu bezwładności półek, a zastąpienie dokładnego kształtu środnika modelem przybliżonym przy wyznaczaniu momentu bezwładności środnika powoduje błąd nie przekraczający również kilku procent.

Znajomość grubości środnika w kilku punktach wystarcza w praktyce do określenia poszukiwanego kształtu. Wyznaczanie kształtu środników metodą kolejnych przybliżeń wymaga wielokrotnie mniej czasu niż metodą ścisłą. Wyznaczenie grubości środnika w dziesięciu punktach przekroju normalnego belki za pomocą maszyny cyfrowej Elliott 803-B trwa około 100 sek.

Kształty wyznaczone tą metodą mają następujące cechy: 1) są optymalne ze względu na wyteżenie tworzywa określone hipotezą A. Caquot; 2) charakteryzują się ciągłym przejściem środnika w półkę, co powoduje znikanie karbu.

Kształtowanie wytrzymałościowe nie zastępuje projektowania, lecz jest działaniem poprzedzającym projektowanie. Dlatego też parametrów kształtów wyznaczonych w tej pracy nie należy traktować jako ostatecznych. Przy ich wyznaczaniu nie uwzględnia się bowiem czynników konstrukcyjnych i wykonawczych. Proces kształtowania pozwala na zastąpienie intuicyjnego wyboru parametrów kształtu przyjmowanych zwykle *a priori* przez parametry optymalne ze względów wytrzymałościowych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. COURBON, *Course de resistance des materiaux*, Dunod, Paris 1955.
2. W. MARKS, *Kształtowanie belek z betonu sprężonego z warunku wyrównywania wyteżeń według hipotezy A. Caquot*, Arch. Inż. Lądowej, 3, 14 (1968).
3. W. MARKS, *Wyznaczanie miarodajnych stanów obciążenia w kształtowaniu przęseł mostów belkowych*, Arch. Inż. Lądowej, 4, 14 (1968).

Резюме

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ БАЛОК НА ОСНОВАНИИ ГИПОТЕЗЫ А. КАКО

В работе предлагается операционный метод определения формы поперечных сечений предварительно напряженных балок из условия выравнивания максимальных усилий, вызванных и загруженных состояний. Метод состоит в определении, путем последовательных приближений, толщины полок и стенок в произвольном количестве точек. Дается пример определения формы сечений трехпролетного железнодорожного моста. Числовые расчеты проводились с помощью вычислительной машины Эллиотт 803-В.

Summary

AN ITERATION METHOD OF DESIGN OF PRESTRESSED BEAMS
ON THE BASIS OF THE HYPOTHESIS OF A. CAQUOT

This is a description of an efficient method for determining the form of the cross-section of a prestressed beams from the equality condition of maximum reduced stress due by n states of load. It consists in determining by iteration the thickness of flanges and webs at any number of points. The paper includes an example of determination of the form of the cross-section of a three-span railway bridge. Numerical computation has been carried out by means of the Elliott 803-B computer.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 maja 1967 r.
