

BADANIA NAPRĘŻEŃ W KONSTRUKCJACH NIEJEDNORODNYCH
OBCIĄŻONYCH CIĘŻAREM WŁASNYM

ROMAN STEFAN DOROSZKIEWICZ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Problemem o dużym znaczeniu dla praktyki inżynierskiej jest zagadnienie wyznaczenia wpływu różnych własności odkształceniowych podłoża na stan naprężenia w ciężkich budowlach, w których jednym z podstawowych schematów obciążenia jest działanie ciężaru własnego. Problem ten był już niejednokrotnie rozpatrywany przy wyznaczaniu rozkładu naprężeń w zaporach, w szczególności z zastosowaniem metod elastoptycznych (1). W znanych pracach eksperymentalnych (2), dotyczących omawianego zagadnienia, niejednorodność skokową własności sprężystych zapory i podłoża modelowano prawie wyłącznie stosując zmianę grubości odpowiednich części modeli [7, 9, 46 i 48]. Można twierdzić, że ten sposób modelowania niejednorodności obiektu daje względnie prawidłowy rozkład naprężeń jedynie dla punktów dostatecznie odległych od brzegu kontaktu tych części oraz punktów przyłożenia sił zewnętrznych zastępujących ciężar własny obiektu. Natomiast w przypadku zastępowania ciężaru własnego obiektu siłami odśrodkowymi wspomniany sposób nie może być zastosowany, gdyż wprowadza dodatkową zmianę pozornego ciężaru właściwego γ_0 modelu obiektu w stosunku do ciężaru właściwego γ_D modelu podłoża, co nie odpowiada zjawisku obserwowanemu w rzeczywistości. Korzystanie z tego sposobu jest w ogóle niedopuszczalne w zadaniach, w których mamy wyznaczyć naprężenie w obszarach bezpośrednio przylegających do brzegu kontaktu. Powodem tego jest występujący tam trójwymiarowy stan naprężenia, różniący się zasadniczo od stanu naprężenia pojawiającego się w ciałach skokowo niejednorodnych.

Z podanego niżej przeglądu literatury widać, że dotychczas napotymano na duże trudności przy rozwiązywaniu zadań technicznych z zakresu rozważanego w tej pracy problemu. O ile autorowi wiadomo, nawet szczególnie interesujący projektantów zapór problem stanu naprężenia w trójkącie posadowionym na półpłaszczyźnie o innym module E nie doczekał się dotychczas ścisłego rozwiązania teoretycznego [12, 21, 47 i 49]. Natomiast wyniki wspomnianych wyżej eksperymentalnych

(1) Elastoptyka jest znana również pod terminem fotosprężystości. Zagadnienie terminologii z tej dziedziny omawia inna praca [33].

(2) Podanych w «Literaturze cytowanej w tekście» (str. 204–206) oraz omówionych w p. 2.

prób rozwiązania tego problemu należy traktować jedynie jako niedokładne przybliżenie.

W związku z tym zdecydowano się podjąć próbę opracowania metody elastooptycznej, umożliwiającej rozwiązanie omówionego zagadnienia. Niniejsza praca przedstawia obecny stan wiedzy z tej problematyki, opis zaproponowanej metody badań i przykład jej zastosowania oraz analizę zakresu stosowalności metody i perspektyw dalszych badań.

Przykład tak dobrano, aby otrzymane wyniki miały pewną wartość dla praktyki inżynierskiej.

2. Przegląd literatury

Jak już wspomniano, omawiany problem ma szczególne znaczenie techniczne dla budownictwa wodnego, dlatego też właśnie specjaliści z tej dziedziny zajmowali się najczęściej tą tematyką i pośród ich prac należało szukać odpowiedniej literatury [49].

Już w połowie ubiegłego stulecia francuscy inżynierowie SAZILLY, DELOCRE i GRAEFF opublikowali pracę, w której po raz pierwszy wskazano na konieczność opracowania metody naukowej projektowania zapór ciężkich. Jednakże dopiero po katastrofie zapory Bouzey we Francji w 1895 r. wzrosło zainteresowanie tym problemem i została zapoczątkowana właściwa działalność badawcza [46].

Pierwszą bardziej interesującą pracę, opisującą badania modelu zapory wraz z częścią podłoża wykonanego z twardej gumy, opublikowali w 1908 r. J. S. WILSON i W. GORE [52]. Zastosowali oni: a) zastępcze obciążenie ciężarem własnym, polegające na przyłożeniu sił skupionych w środkach ciężkości poszczególnych, wydzielonych myślowo obszarów modelu; b) obciążenie hydrostatyczne, zastąpione przez równoważny układ sił skupionych. Rozkład naprężeń wyznaczyli oni na drodze mierzenia przemieszczeń.

Okolo 1930 r. stwierdzono [2], że istnieje możliwość bezpośredniego uzyskania optycznych obrazów naprężeń w modelach z żelu żelatynowego, obciążonych jedynie ciężarem własnym. Jednakże zarówno wykonanie takich modeli, jak ich badanie nasuwa szereg trudności o charakterze technologicznym.

Od tego roku ukazało się bardzo dużo prac dotyczących konstruowania zapór, dlatego też będziemy mówili jedynie o takich, które związane są z interesującym nas przede wszystkim problemem wpływu różnych własności odkształceniowych podłoża na stan naprężenia posadowionego na nim obiektu, a w szczególności zapory. Prace te można by podzielić na cztery następujące grupy:

- 1) obliczeniowe wyznaczanie stanu naprężenia w zaporach trójkątnych posadowionych na podłożu sztywnym [39, 50 i 53];
- 2) próby ścisłych rozwiązań stanu naprężenia w zaporach trójkątnych posadowionych na podłożu sprężystym [12, 21 i 47];
- 3) inżynierskie metody wyznaczania naprężeń w zaporach posadowionych na podłożu sprężystym [51 i 54];
- 4) badania modelowe [7, 9, 23, 27, 28, 29, 30, 31, 42, 43, 48 i 52].

Składowe naprężenia σ_A i $\tau_{\alpha A}$, wyznaczone metodami grupy pierwszej, są niedokładnym przybliżeniem. Jedynie metoda SILVERMANA [54] umożliwiłaby uwzględnienie wpływu podatności podłoża, jednakże w tym przypadku obliczenia skomplikowałyby się ogromnie. Przy wyznaczaniu stanu naprężenia w górnej części zapory trójkątnej można korzystać ze wzorów wyprowadzonych dla klina nieskończonego o pionowym brzegu odwodnym z pracy M. LEVY'EGO [40] oraz dla klina o dowolnym nachyleniu brzegu odwodnego z pracy M. PIGEUDA [10].

Wyznaczenie stanu naprężenia nawet dla ograniczonej liczby punktów zapory metodami grupy drugiej jest ogromnie pracochłonne. Poza tym rozwiązanie J. H. BRAHTZA [21] nie jest prawidłowe a F. TÖLKE [12] nie analizuje dokładności uzyskanego rozwiązania [49].

Metody grupy trzeciej umożliwiają obliczenie wartości trzech składowych naprężenia we wszystkich punktach zapory. Metoda amerykańska [51] opiera się na analogii płytowej. Jest to analityczna metoda wyznaczania naprężeń przy wykorzystaniu próbnych obciążeń modeli, znana w Stanach Zjednoczonych pod nazwą «trial load». Ta metoda przybliżona nie przyjęła się w Europie ze względu na trudność analizy dokładności wyników. Metoda zaproponowana przez O. C. ZIENKIEWICZA w pracy [54] umożliwia wyznaczenie stanu naprężenia w punktach skończonego obszaru podłoża dla przypadku $E_z/E_p = 1$. Jest to relaksacyjna metoda rozwiązywania układów płaskich o znanych warunkach brzegowych i stanie naprężenia, które można określić funkcją harmoniczną Laplace'a lub biharmoniczną Airy'ego. Metodę można stosować przy obliczaniu zapór o krzywoliniowych konturach przekroju poprzecznego.

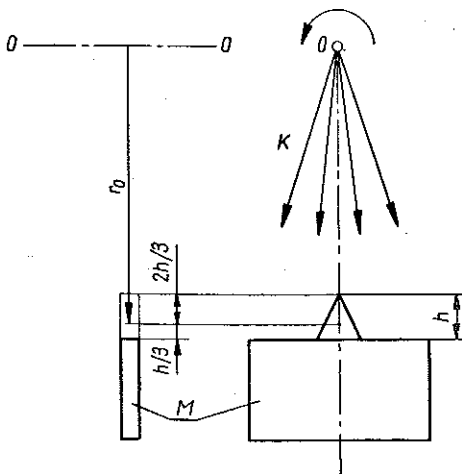
We wszystkich pracach wymienionych w grupie czwartej (poza pracą [52]) korzystano z metod elastoptycznych. M. MILBAUER i M. PERLA [43] wyznaczyli izokliny, izochromy i trajektorie naprężeń głównych w zaporze ciężkiej obciążonej samym tylko ciężarem własnym lub parciem hydrostatycznym przy $E_z/E_p = 1$. Zastępczy ciężar własny w modelach z żelu żelatynowego wywołano metodą Biota⁽³⁾ korzystając z rtęci. Parcie hydrostatyczne uzyskano obciążając model również rtęcią. I. R. RYDZEWSKI [48] wyznaczył naprężenia w zaporze w założeniu nieodkształcalności podłoża wprowadzając parcie hydrostatyczne cieczy podczas wirowania z jednoczesnym zamrażaniem. W pracach [27, 28 i 29] R. S. DOROSZKIEWICZ omawia nową metodę uzyskiwania obrazów naprężeń od j dnoczesnego obciążenia ciężarem własnym i parciem hydrostatycznym. W metodzie tej korzystano z modeli z żelu żelatynowego. Metodę omówiono na przykładzie badania stanu naprężenia w najwyższej w Polsce zaporze grawitacyjnej (o wysokości 76 m). W pracy [25] R. S. DOROSZKIEWICZA zastosowano metodę superpozycji eksperymentalnej [23] stanów naprężenia od ciężaru własnego i parcia hydrostatycznego dla przypadku zapory filarowej (z wykorzystaniem zjawiska zamrażania). W pracy S. MACKIEWICZA wyznaczono stan naprężenia zapory ciężkiej obciążonej jedynie samym parciem hydrostatycznym przy $E_z/E_p = 0, 1, 3$. Stanem naprężenia od ciężaru własnego nie zajmowano się. Badania te przeprowadzono w 1962 r. w Belgradzie w Instytucie im. «Jaroslav Cerni».

(³) W ZSRR metoda ta jest znana pod nazwą metody Gutmana.

3. Metoda

Opracowanie metody. Autor przedstawił metodę na przykładzie. Badaniom został poddany model o kształcie trójkąta, oparty na półpłaszczyźnie. Własności sprężyste w trójkącie zmieniają się skokowo. Pole sił ciężkości otrzymano metodami wirowania.

Pierwsza seria prób z zastosowaniem metody tzw. zamrażania naprężeń nie dała pozytywnych wyników z powodu powstających w modelu niejednorodnym naprężeń termicznych. Naprężenia te znacznie utrudniają badania oraz zwiększają niepomiernie czas potrzebny na opracowanie wyników. W celu uwzględnienia wpływu tych zakłócających naprężeń należałoby wykonać po dwa identyczne modele niejednorodne. Następnie jeden z nich trzeba by wirować z jednoczesnym poddaniem go zamrażaniu. Model drugi podlegałby temu samemu procesowi termicznemu w stanie nieobciążonym. Odejmując od siebie naprężenia (obliczone w punktach dostatecznie gęstej siatki) dla modelu poddanego jedynie procesowi termicznemu od naprężeń wyznaczonych dla modelu wirowego, moglibyśmy obliczyć naprężenia wywołane działaniem samego tylko ciężaru własnego. Jednakże taki tok postępowania byłby bardzo kłopotliwy i wymagałby żmudnego dodawania tensorowego stanów naprężeń o różnych kierunkach głównych.



Rys. 1. Schemat wirowania przy ustawieniu modelu M w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu O
 r_0 —odległość środka ciężkości trójkąta od osi obrotu;
 k —kierunki sił odśrodkowych

Z tego powodu w drugiej serii badań [31] korzystano już z metody wirowania w temperaturze pokojowej, ale z zastosowaniem specjalnych elastooptycznych materiałów o niskim E (4). Zbudowana specjalna wirówka umożliwiała nadanie modelowi obrotów dookoła osi prostopadłej do powierzchni czołowej modelu (rys. 1). Wyniki badań otrzymane tą metodą można było interpretować bezpośrednio. Metodę tę w dalszym ciągu pracy nazywać będzie my «błyskową metodą I wirowania» (5) lub krócej «metodą I», a zastosowaną w niej wirówkę — «wirówką I». Jednak i w tej serii badań wystąpiły (choć innego rodzaju) trudności w opracowaniu wyników. Mianowicie obok dostatecznie kontrastowych obrazów izochrom otrzymywano niewyraźne zdjęcia izoklin, potrzebnych do wyznaczania rozdzielonych wartości naprężeń głównych oraz uzyskania wykresów trajektorii naprężeń głównych i ew. trajektorii maksymalnych naprężeń stycznych. Również na tym etapie nie udało się dobrze zmodelować warunków brzegowych, jakie zgodnie z teorią

(4) W literaturze znaleźć można wiele metod [2, 5, 8, 13 i 32] wyznaczenia stałych K i E .

(5) W odróżnieniu do omówionej w p. 3.2. «błyskowej metody II wirowania».

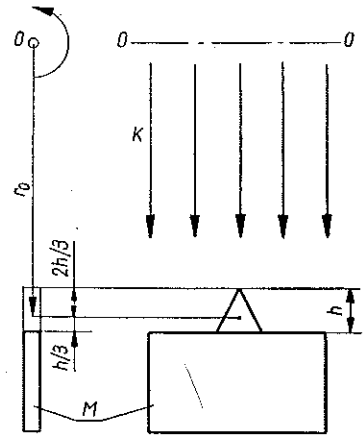
sprężystości powinny być spełnione dla prostokątnego wycinka półpłaszczyzny obciążonej samym tylko ciężarem własnym. Poza tym kierunki k sił odśrodkowych działających na model były rozbieżne i ich składowe o kierunkach prostopadłych do osi symetrii modelu powodowały nieznaczne rozciąganie modelu podłoża w tym kierunku. Tymczasem w półpłaszczyźnie obciążonej ciężarem własnym odpowiednie naprężenia w kierunku poziomym są ściskające. Wskutek tego faktyczny rozkład naprężeń w części modelu reprezentującej podłoża znacznie odbiegał od stanu naprężenia w obiekcie. Ponieważ jednak występująca rozbieżność w rozkładzie naprężeń miała we wszystkich modelach taki sam charakter, to nie powinna ona wpływać na wnioski dotyczące oddziaływania różnych modułów E podłoża na rozkład naprężeń w trójkącie.

Opis metody. W oparciu o doświadczenia uzyskane w trakcie prowadzenia badań dwu pierwszych serii w badaniach omówionych w pracy autor starał się wyeliminować lub przynajmniej zmniejszyć w maksymalnym stopniu wpływ niekorzystnych czynników występujących w badaniach wcześniejszych.

W związku z tym w badaniach serii trzeciej (ostatniej) autor wykonał modele niejednorodnie skokowo o stałej grubości z epoksydowych żywic czułych optycznie, o modułach Younga E rzędu od 4 do 200 KG/cm², ostatnio uzyskanych dla tego celu w Pracowni Analizy Naprężeń IPPT. Jednakże zamiast wirowania dookoła osi prostopadłej do powierzchni czołowych modelu (6) nadawano modelom rotację wokół osi obrotu leżącej w płaszczyźnie środkowej modelu (rys. 2). Dzięki temu zamiast rozbieżnych kierunków k sił odśrodkowych otrzymuje się pole sił równoległych. Występująca w tym przypadku rozbieżność kierunków sił w płaszczyźnie normalnej do osi wirowania nie ma tu istotnego wpływu na stan naprężenia w płaszczyźnie środkowej modelu. Zawdzięczamy to bardzo małemu kątowi, jaki tworzą graniczne kierunki sił odśrodkowych, obejmujące model (jego grubość) w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu.

W pierwszej fazie badano wizualnie optyczne obrazy naprężeń za pomocą stroboskopu. Taka analiza umożliwiła ewentualne skorygowanie ustawienia modelu oraz liczby n obrotów wirówki. Optymalną liczbę n otrzymuje się drogą stopniowego jej podwyższania przy jednoczesnej analizie zmieniającego się obrazu optycznego.

W drugiej fazie wykonujemy zdjęcia izochrom i izoklin przy świetle lampy emitującej pojedyncze błyski.



Rys. 2. Schemat wirowania przy ustawieniu modelu w płaszczyźnie osi obrotu

(6) Wszystkie znane autorowi z literatury wirówki elastoosygnalowe pracujące w temperaturze pokojowej [22, 36, 41 i 48] miały osie obrotu modelu prostopadłe do jego powierzchni czołowych.

Metodę stosowaną w badaniach serii trzeciej określać będziemy terminem «błyskowa metoda II wirowania» lub też «metoda II», a stosowaną przy tej metodzie wirówkę — «wirówką II».

Metoda II podobnie jak metoda wirowania z zamrażaniem oraz metoda I wykorzystuje analogię, jaka zachodzi między wartościami naprężeń powstających pod wpływem działania ciężaru własnego a siłami odśrodkowymi [27]. W modelu o dostatecznie małych wymiarach w stosunku do promienia wirowania błąd spowodowany niejednorodnością pola sił odśrodkowych można porównać z wartością błędów występujących w przeciętnych zadaniach z zakresu budownictwa. Podstawowe różnice pomiędzy przedstawionymi metodami elastooptycznymi zachodzą w kierunkach działania sił odśrodkowych oraz w sposobie utrwalenia lub rejestrowania optycznego obrazu naprężeń.

W przypadku zastosowania omawianej metody badania są prowadzone przy założeniach następujących:

- 1) model «pracuje» w płaskim stanie naprężenia;
- 2) w punktach połączenia trójkąta z półplaszczyną jest spełniony warunek nierozdzielności odkształceń (nie występują wzajemne przemieszczenia odpowiednich punktów obu obszarów);
- 3) materiały trójkąta i półplaszczyny są jednorodne, izotropowe oraz liniowo sprężyste;
- 4) trójkąt i półplaszczyna mają niejednakowe współczynniki sprężystości E (zachodzi przypadek niejednorodności skokowej).

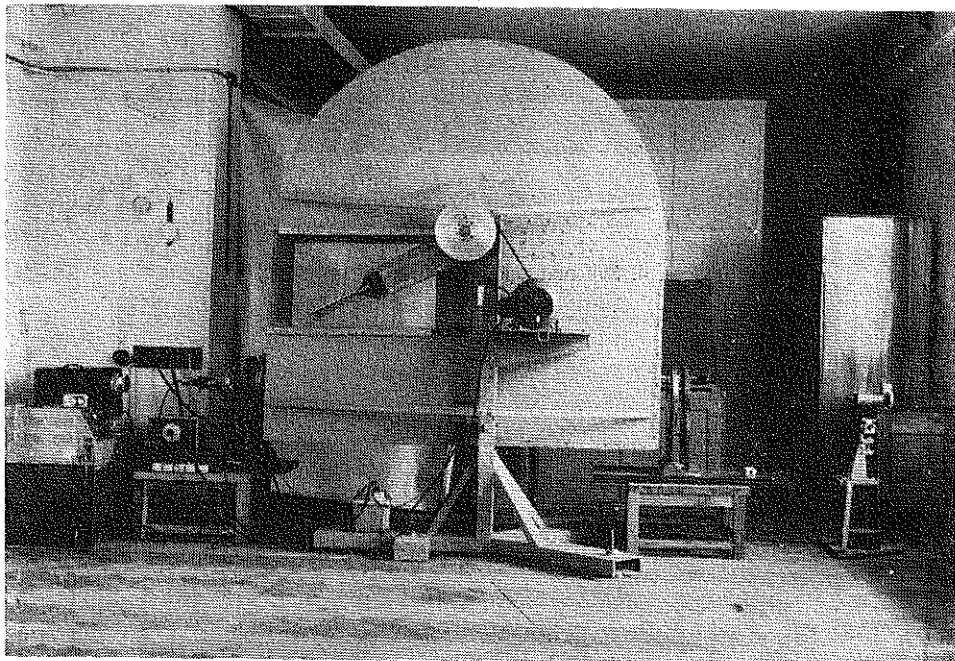
Aparatura. Podstawową aparaturą umożliwiającą prowadzenie badań błyskową metodą II wirowania jest specjalnie w tym celu zaprojektowana i wykonana wirówka II wraz z urządzeniem do synchronizacji chwili błysku, położenia modelu oraz chwili ekspozycji negatywu w kamerze fotograficznej (rys. 3).

Wskutek ustawienia optyki polaryskopu w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu wirówki (rys. 4 i 5) powiększyła się wielokrotnie odległość l analizatora od polaryzatora (w przybliżeniu do 2 m). W tym przypadku, pozostawiając bezsoczewkowy układ polaryskopu, stracilibyśmy znacznie na średnicy pola widzenia oraz na natężeniu światła. W celu uniknięcia wpływu tych niekorzystnych czynników został wprowadzony układ optyczny polaryskopu o równoległej w przybliżeniu wiązce światła (dzięki zastosowaniu dwu soczewek kolimacyjnych o średnicach równych 270 mm).

Jak widać ze schematu (rys. 4) w metodzie II źródłem światła jest lampa błyskowa (stroboskopowa L_s lub wysyłająca pojedyncze błyski L_b) ustawiona w ognisku soczewki kolimacyjnej S_1 . Dzięki temu wychodząca ze źródła światła rozbieżna wiązka, po przejściu przez soczewkę S_1 już jako wiązka promieni równoległych, przechodzi kolejno przez polaryzator P , plexiglasowe okno I w obudowie wirówki, model M w pojemniku P_j , ramienia wirówki, okno II i analizator A . W końcu ta równoległa wiązka światła dochodzi do soczewki kolimacyjnej S_2 , po przejściu której, już jako wiązka zbieżna, przechodzi przez filtr interferencyjny F .

Promienie zbieżnej wiązki, jaka powstała po przejściu światła przez soczewkę S_2 , zbiegają się w ognisku, w którym jest ustawiona płaszczyzna główna obiektu kamery

fotograficznej *K* marki Exacta Varex IIa z obiektywem Triotar 4/135. Błyski lampy stroboskopowej *Ls* typu 911 RFT (rys. 5) zsynchronizowano z obrotami ramienia wirnika w ten sposób, że każdy błysk następuje przy ściśle ustalonym położeniu modelu *M*. Otrzymujemy to przez umieszczenie w odpowiednim punkcie drogi ramienia *R* wirówki wiązki światła, jaka pada z lampy *L* na fotokomórkę *Fk*. Przesłonka *P* umocowana do ramienia *R* za każdym jego obrotem przecina tę wiązkę. Powstający w ten sposób impuls elektryczny, wzmacniony przez wzmacniacz *W*, steruje aparaturą stroboskopową *St*, umożliwiającą wizualną obserwację nieruchomego dla oka obrazu izochrom lub izoklin.



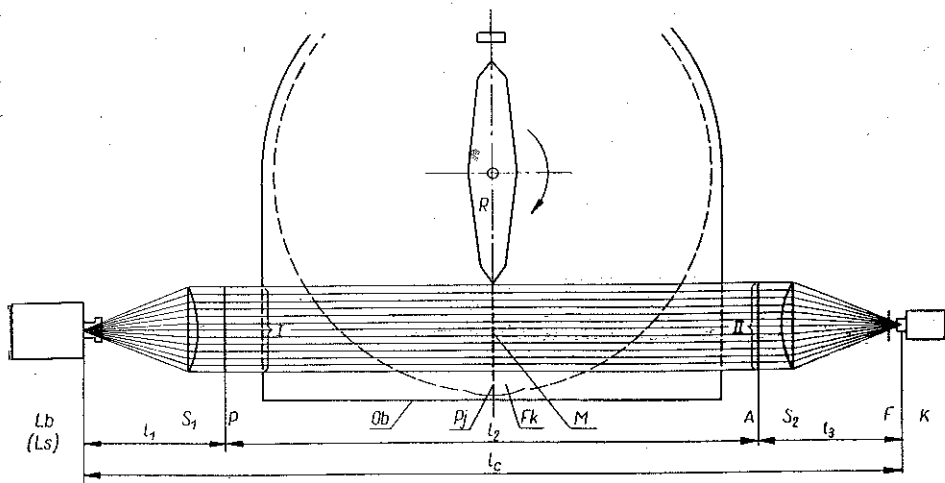
Rys. 3. Ogólny widok stanowiska badawczego przy błyskowej metodzie II

Zdjęć fotograficznych dokonujemy przy użyciu typowej lampy błyskowej *Lb* (typu FG-902RFT), w której wyładowanie iskrowe kondensatora $2\mu\text{F}$ (przy napięciu 6 kV) daje silny pojedynczy błysk o czasie trwania około 2 μsek . Uzyskane w ten sposób naświetlenie umożliwia uzyskanie ostrego negatywu przy czułości emulsji 22°, 25° lub 27° DIN.

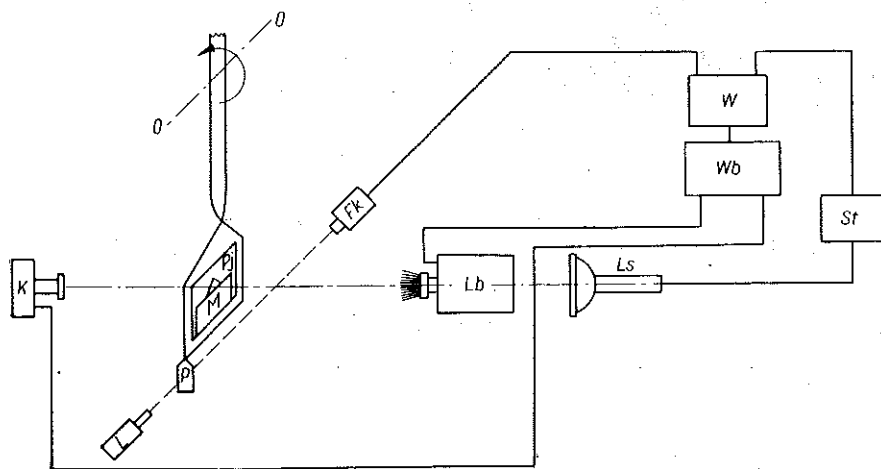
Zdjęcia wykonujemy za pomocą kamery *K*.

Jednorazowe wyzwolenie błysku następuje w chwili przecinania wiązki światła w układzie fotokomórki (*L* — *Fk*) po uprzednim naciśnięciu spustu migawki sprzężonej elektrycznie z aparaturą sterującą (rys. 5).

Ten sam układ fotokomórki za każdym obrotem ramienia *R* przekazuje impulsy do układu skonstruowanego w tym celu licznika impulsów. Dzięki temu został otrzymany w omawianych badaniach pomiar średniej w czasie badania liczby obro-



Rys. 4. Schemat ogólny aparatury optycznej



Rys. 5. Schemat aparatury elektrycznej

tów wirówki z dużą dokładnością rzędu 0,2–0,3%. Dokładność ta ma decydujący wpływ przy ustaleniu wartości obciążenia modelu zastępczym ciężarem własnym, a więc i na dokładność wyznaczonych wartości naprężeń.

Odnosnie konstrukcji omawianej wirówki to ma ona dwa wymienne ramiona wirujące (rys. 6). Ramię *b* daje znaczne przeciążenie, dochodzące do 2000 g, ale na mniejszym promieniu wirowania nie przekraczającym 55 cm. Ramię to jest przeznaczone do badań modeli mniejszych, wykonanych z żywic średnio twardych o rzędzie modułu *E* wahającego się w granicach 200 do 5000 kG/cm² i *K* od 0,5 do 2 kG/cm rząd. Ramię *a* umożliwia wirowanie na dłuższym promieniu o długości 90 cm modeli o większych wymiarach wykonanych z wysokoczułych żywic o parametrach: *E* = 2 do 200 kG/cm² oraz *K* = 0,1 do 0,5 kG/cm rząd przy przeciążeniach rzędu 100–300 g.

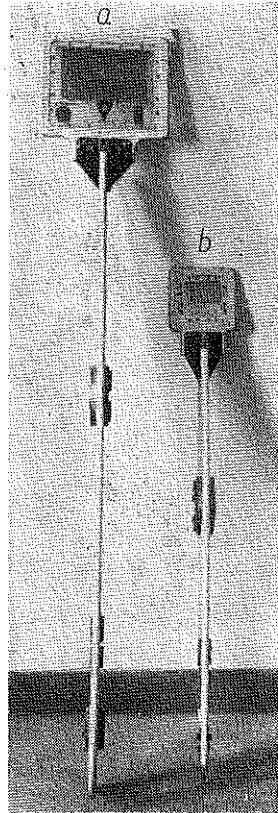
Napęd z silnika na wrzeciono przeniesiony jest przy pomocy wymiennych kół i pasków klinowych. Na drugim końcu wrzeciona wirówki nasadzona jest piasta mocująca jedno z ramion (*a* lub *b*). Ramiona wykonano z płyty duralowej grubości 14 mm. W ramionach znajdują się wycięcia w kształcie prostokątnych okien, w których umieszczany jest model elastoptyczny (pomiędzy dwiema płytkami ze szkła lub szkła organicznego). Przed wirowaniem szczególną uwagę należy zwracać na wyważenie ramienia. Z tego względu przewidziano możliwość zmiany przeciwwagi lub jej położenia w celu zrównoważenia badanego aktualnie modelu (rys. 6).

Ramię wiruje w osłonie, co ma na celu zabezpieczenie obsługi i aparatury oraz zmniejszenie objętości wprowadzanego w ruch powietrza. Osłona składa się z walcowego płaszcza z blachy stalowej grubości 5 mm oraz z przedniej i tylnej ściany, które stanowią: częściowo płyta wiórowa grubości 20 mm, a częściowo (w obszarze, który może podlegać obserwacji) płyta ze szkła organicznego grubości 8 mm.

Zbudowanie wirówki użytej przy zastosowaniu tej metody napotyka na duże trudności techniczne. To sprawia, że na świecie zbudowano tylko niewiele urządzeń tego typu (na zasadzie «wirówki I»), a w Polsce, o ile autorowi wiadomo, żadne z laboratoriów elastoptycznych nie miało dotychczas analogicznego urządzenia.

4. Przykład

Zakres badań. W celu uwypuklenia i lepszego poznania wpływu różnic modułów Younga *E* półpłaszczyzny i trójkąta na stan naprężenia w tym ostatnim autor



Rys. 6. Ramiona wirówki II. W pojemniku dłuższego ramienia *a* znajduje się model badany oraz dwa modele kompensacyjno-skalujące

rozpatrzył możliwie szeroką skalę zmienności ich własności sprężystych. Te badania (przeprowadzone metodą II) objęły 5 modeli (pozycje 2–6 tablicy I). Dla poszczególnych modeli stosunki E_t/E_p wartości współczynników sprężystości podłużnej E części trójkątnej i prostokątnej wynosiły kolejno: 0,001; 0,05; 1,00; 3,1; 26.

Omawiana seria badań miała na celu: a) wykazanie wpływu podatności podłoża na stan naprężenia w budowlu ciężkiej, b) sprawdzenie dokładności wyników w przypadku zastosowania opracowanych do tego aparatury oraz materiałów modelowych.

Przed przystąpieniem do badań zasadniczych przeprowadzono szereg prac wstępnych i pomocniczych, mianowicie między innymi:

1) polimeryzację potrzebnych materiałów fotosprężystych oraz badanie ich własności,

2) dostosowanie «eksperymentalnych warunków brzegowych» do założeń.

W ramach tych prac uzyskano z surowców krajowych szereg materiałów fotosprężystych o bardzo wysokiej czułości optycznej, nieznacznym efekcie brzegowym czasu oraz żądanym E (7).

Natomiast dla znalezienia najlepszego sposobu modelowania obciążonej ciężarem własnym półpłaszczyzny za pomocą prostokątnego modelu poddanego wirowaniu przeprowadzono szereg badań prostokątnego modelu w rozmaitych warunkach brzegowych.

Najbardziej zgodne z wynikami teorii sprężystości okazały się obrazy naprężeń w prostokącie wirowanym z zapewnieniem mu możliwie beztarciowego poślizgu jego bocznych brzegów $a-a$ oraz $b-b$ wzdłuż ich kierunków (rys. 8, przez p oznaczono prowadnice boczne).

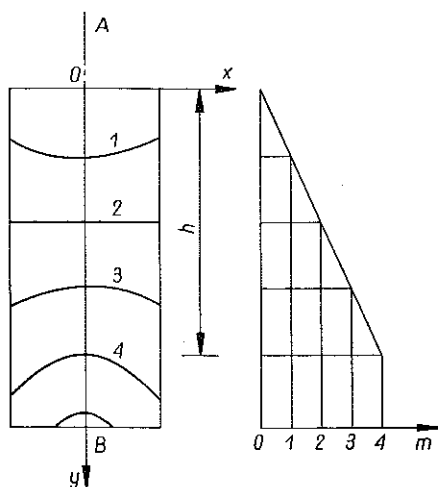
W celu umożliwienia bardziej wnikliwego opracowania wyników i ich analizy

zostały przeprowadzone różne badania uzupełniające, między innymi poddano wirowaniu:

a) model trójkąta opartego na gładkim sztywnym podłożu (M.0''),

b) model M.4 o «skorygowanym» górnym brzegu jego części prostokątnej (pod terminem «skorygowany» rozumiano tak dobrany kształt modelu nieobciążonego, aby w modelu odkształconym pod działaniem obciążenia był on możliwie zbliżony do kształtu rozpatrywanego).

(7) Prace mające na celu uzyskanie zmodyfikowanych żywic elastooptycznych o żądanych własnościach są bardzo żmudne. Wymagały one wykonania i zbadania paru set próbek o różnych składach. Prace te są prowadzone w Pracowni Analizy Naprężeń ZMOC IPPT PAN od 1961 r.



Rys. 7. Naprężenia σ_y w osi symetrii jednego z prostokątnych modeli kompensacyjno-skalujących, wyrażone w rzędach m izochrom

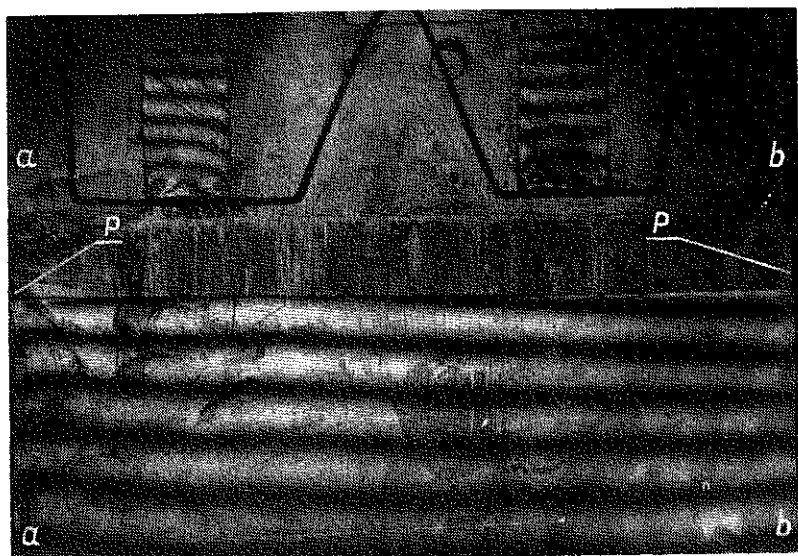
Tablica 1
Modele

L.p.	Oznaczenie modelu (?)	Kształt	Wymiary modeli (mm)								Materiał modelu (1)		E materiału (kG/cm ²)		E _t /E _p
			Trójkąta			Prostokąta			Trójkąta	Prostokąta	E _t	E _p			
			h _t	l _t	d _t	h _p	l _p	d _p							
1	M.0''	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
1	M.0''	trójkąt równoramienny na gładkim podłożu	180	151,2	8,6	—	—	—	17''E	szkło organiczne	34,7	30000	0,0012		
2	M.0.001	trójkąt równoramienny przyklejony do prostokąta	112	101	8,8	87	248	9,0	95E1A	tekstolit	70,5	50000	0,0014		
3	M.0.05	j.w.	93	85	9,9	90	219	9,8	P''116	P''107	4,2	8,5	0,05		
4	M.1 (?)	j.w.	112	100	8,8	90	220	8,5	95E2A	95 E2A	58,3	38,3	1,00		
5	M.3	j.w.	108	101	8,8	83	218	9,4	95EA	17''E	107	34,6	3,1		
6	M.26	j.w.	108	99	9,3	90	217	9,5	95EA	79EA	107	4,1	26		

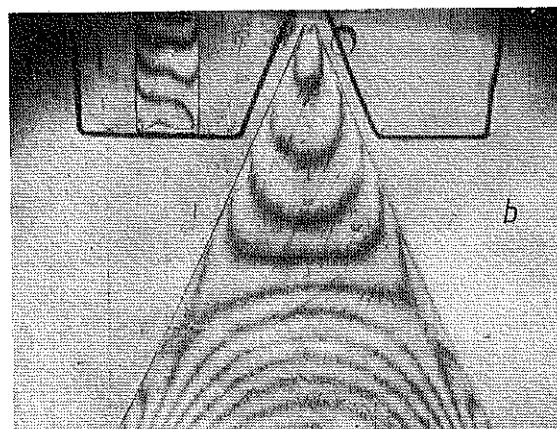
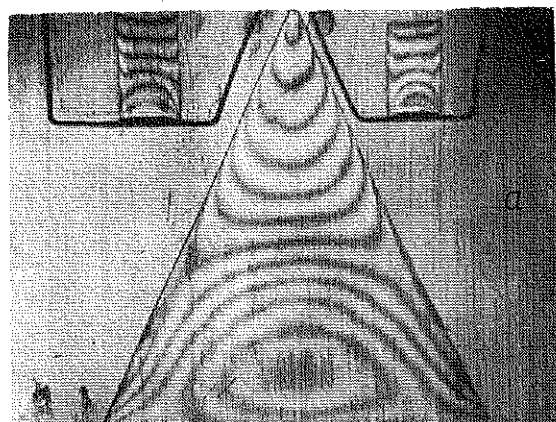
(1) Wymienione w tej kolumnie materiały 17''E, 79EA, 95EA, 95E1A, 95E2A, P''107, P''116 są zmodyfikowanymi żywicami epoksydowymi spolimerizowanymi w Pracowni Analizy Naprężeń IPPT we własnym zakresie. Wartość izochromy tych materiałów $K=0,144 \text{ K.G/cm. rz.}$, którą wyznaczono z obrazów izochrom (rys. 7) w górnej części modeli kompensacyjno-skalujących (rys. 6a, 8, 9, 10 i 12).

(2) W przyjętych oznaczeniach M jest pierwszą literą wyrazu model, a liczba obok podaje zaokrągloną wartość stosunku E_t/E_p .

(3) Model jednorodny.



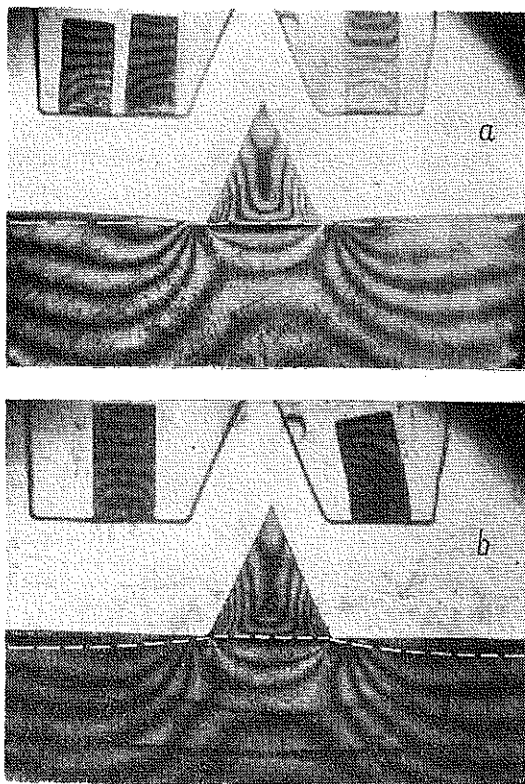
Rys. 8. Izochromy w jednorodnym modelu prostokątnym badanym metodą II



Rys. 9. Izochromy w trójkącie obciążonym ciężarem własnym
 a) model przyklejony do podłoża, b) oparty na podłożu gładkim

Badanie a) miało na celu obserwację zmniejszonego do minimum wpływu tarcia w podstawie trójkąta na stan jego naprężenia (rys. 9).

Natomiast badanie b) umożliwiło znaczne zmniejszenie wpływu odkształceń podłoża na obraz naprężeń w trójkącie (rys. 10). Na rysunku 10b widać, że górny krzywoliniowy brzeg modelu podłoża po jego obciążeniu zastępczym ciężarem własnym przybiera zarys bardzo bliski prostoliniowemu (przy którym chcemy wyznaczyć stan naprężenia w trójkącie). Jednakże porównanie obrazów izochrom



Rys. 10. Wpływ dużych odkształceń podłoża na obraz izochrom i sposób zmniejszenia tego wpływu

a) zdeformowany kształt modelu obciążonego, b) model skorygowany, który pod obciążeniem przybiera kształt bardzo zbliżony do rozpatrywanego; linią przerywaną zaznaczono kształt brzegu podłoża w modelu przed obciążeniem

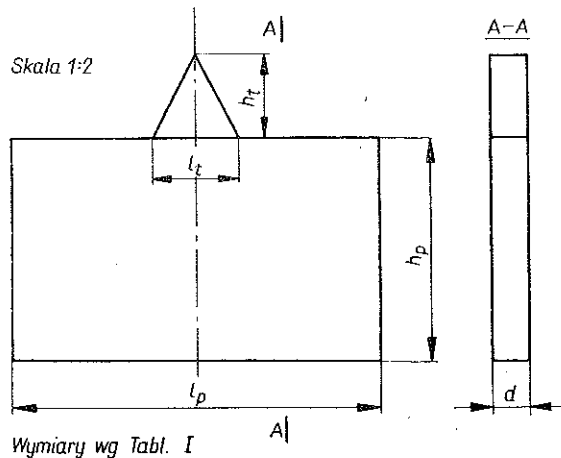
w modelu trójkąta spoczywającego na podłożu, którego odkształcony brzeg górny jest krzywoliniowy (rys. 10a) oraz bardzo bliski prostoliniowemu (rys. 10b) wykazuje, że między tymi dwoma obrazami nie ma właściwie różnicy. W związku z tym w przypadkach, w których wprowadzenie korekcji kształtu górnego brzegu modelu podłoża powodowałoby znaczne zwiększenie pracochłonności badań (lub czasu ich trwania) nadal korzystano z modeli niekorygowanych.

Natomiast późniejsze badania wykazały, że powyższy wniosek nie byłby słuszny odnośnie korekcji brzegów samego trójkąta. Wyznaczając rozkład naprężeń w trój-

kącie na podstawie obrazów izochrom i izoklin odkształconego modelu trójkąta o krzywoliniowych brzegach (i znacznie zmniejszonych wskutek kątach między nimi a poziomem) można by otrzymać całkiem błędne wyniki.

W celu zmniejszenia odkształceń modelu w miarę możliwości starano się stosować materiały o mniejszej odkształcalności (tj. o wyższych współczynnikach E).

Opis modeli. Badając na modelach wpływ odkształcalności podłoża na stan naprężenia w obiekcie należałoby w przypadku badań trójwymiarowych traktować podłoże jako półprzestrzeń, w zadaniu płaskim jako półpłaszczyznę. Jednakże w badaniach modelowych musimy z reguły ograniczać wymiary modeli podłoża do wartości skończonych. W związku z tym bardzo ważna jest znajomość minimalnych rozmiarów modelu podłoża, przy których wpływ ich ograniczenia będzie się mieścił w granicach błędu pomiarowego, odpowiadającego dokładności przeciętnie stosowanych metod elastooptycznych i aparatury. S. G. GUTMAN [37] wspomina o przeprowadzonych badaniach specjalnych mających na celu wyjaśnienie tego zagadnienia. Badania te umożliwiły ustalenie minimalnych wymiarów modeli podłoża rozprzestrzeniającego się w rzeczywistości na głębokość nieskończoną. Stwierdzono mianowicie, że stan naprężenia w budowlu wodnej jest praktycznie ten sam, gdy głębokość podłoża zmienia się od nieskończoności aż do wartości równej połowie szerokości podstawy l , przy szerokości modelu podłoża od 1,5 do 1,6 l .



Rys. 11. Kształt modeli badanych w końcowej serii

W omawianych badaniach przyjęto stosunkowo duże wymiary modeli podłoża (tablica 1 i rys. 11): wysokość h_p podłoża niewiele mniejszą od długości podstawy l_t trójkąta, a szerokość l_p podłoża około 2 razy większą od l_t , czyli

$$h_p \approx l_t, \quad l_p \approx 2l_t.$$

Takie modele (z wyjątkiem M.0'' i M.0,001) miały krawędzie o zbliżonych długościach. Modele te wykonano z materiałów, których własności zostały podane w tablicy 1.

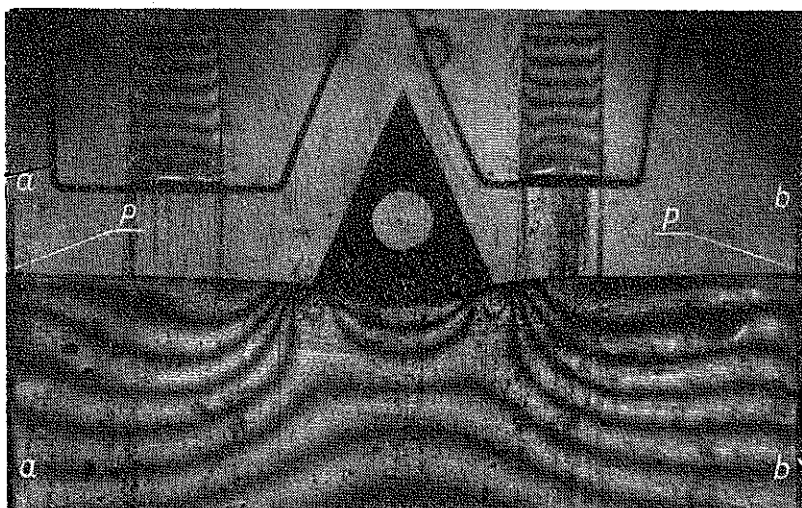
Ciągłość połączenia części modelu trójkątnej i prostokątnej zapewniono przez sklejenie; moduł Younga E kleju był równy modułowi jednej z łączonych części.

Opis badań. Warunki badania modeli opisano w tablicy 2. Podczas wirowania modele znajdowały się w pojemniku ramienia wirówki. Pomiedzy czołowymi powierzchniami modeli a wykonanymi ze szkła organicznego ściankami pojemnika zachowano luz rzędu 1–2 mm, umożliwiający swobodne zwiększenie grubości modelu.

Dla wszystkich omawianych w tym punkcie modeli zostały wykonane:

a) w świetle spolaryzowanym kołowo na ciemnym i jasnym tle zdjęcia modeli nieobciążonych oraz izochrom (całkowitych i połówkowych),

b) w świetle spolaryzowanym liniowo zdjęcia izoklin dla parametrów θ od 0° do 90° co 5° .



Rys. 12. Izochromy modelu M.2500

Z bogatego materiału fotograficznego wybrano przykładowo dwa zdjęcia: izochromy modelu M.2500 (rys. 12) oraz izokliny dla $\theta = 10^\circ$ modelu M.0,001 (rys. 13).

W celu uwzględnienia w przeprowadzonych badaniach wpływu temperatury oraz zjawisk reologicznych obok modeli zasadniczych autor stosował modele kompensacyjno-skalujące. Te ostatnie wykonano z tych samych płyt materiału elastooptycznego i przechowywano w tych samych warunkach co model zasadniczy oraz w czasie wirowania umieszczano w pojemniku obok tego ostatniego. Stosowano modele skalujące o kształcie prostokątnym. Uzyskane w modelach kompensacyjno-skalujących obrazy izochrom umożliwiały wyznaczenie wartości izochromy K dla każdego materiału. Dzięki takiemu wyznaczaniu stałej K jej wartość w znacznym stopniu uwzględniała automatycznie wpływy termiczno-reologiczne występujące w badaniu. Dzięki temu materiały modeli kompensacyjno-skalujących miały te

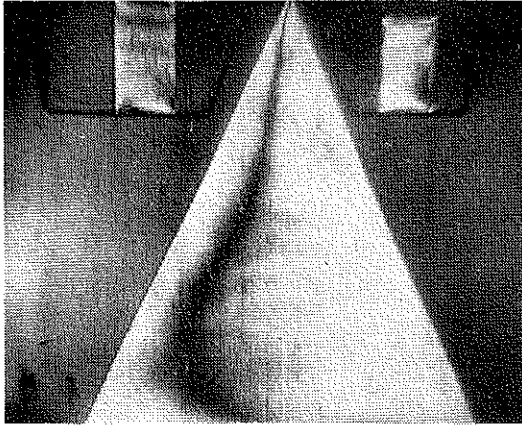
Tablica 2
Badania⁽¹⁾ i zakres ich opracowania

L. p.	Oznaczenie modelu	Nr badania	Nr błony	Pozytywne wykonane		Liczba obrotów wirówki na min.	Rysunki wykonane (nr rysunku)				Uwagi	
				izochrom	izoklin ⁽²⁾		izochromy ⁽²⁾	izokliny	naprężenia brzo-gowe	naprężenia w przekroju O-H		naprężenia w środku O-H
1	M.0''	59	407	+	+	530	15	16	15	17 18	18	wirowanie z zastosowaniem cieczy imersyjnej do wysokości ok. 4 mm powyżej podstawy trójkąta w celu wyeliminowania efektu soczewkowania wzdłuż podstawy trójkąta.
2	M.0,001	103	452	+	+	523	+	+	+	+	18	
3	M.0,05	134	484	+	+	390	15	16	15	17 18	18	model z korekcją części trójkątnej.
4	M.1	116	466	+	+	390	15	16	15	17 18	18	
5	M.2	115	465	+	+	390	15	16	15	17 18	18	
6	M.26	122	471	+	+	326	15	16	15	17 18	18	model z korekcją części prostokątnej

(1) Tablica 2 obejmuje jedynie wybrane badania serii III (przeprowadzone metodą II), w której ogółem przeprowadzono około 140 doświadczeń.

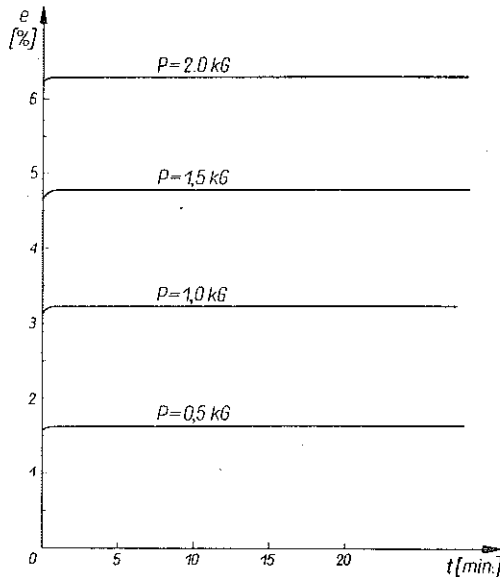
(2) Zdjęcia izochrom wykonano korzystając z filtru interferencyjnego o długości fali świetlnej $\lambda=460 \mu$.

same własności oraz były poddane tym samym zabiegom technologicznym co materiały modeli zasadniczych. Poza tym chcąc posługiwać się, o ile to możliwe, stałą wartością K dla materiałów danego modelu, zdjęcia izochrom i izoklin wyko-



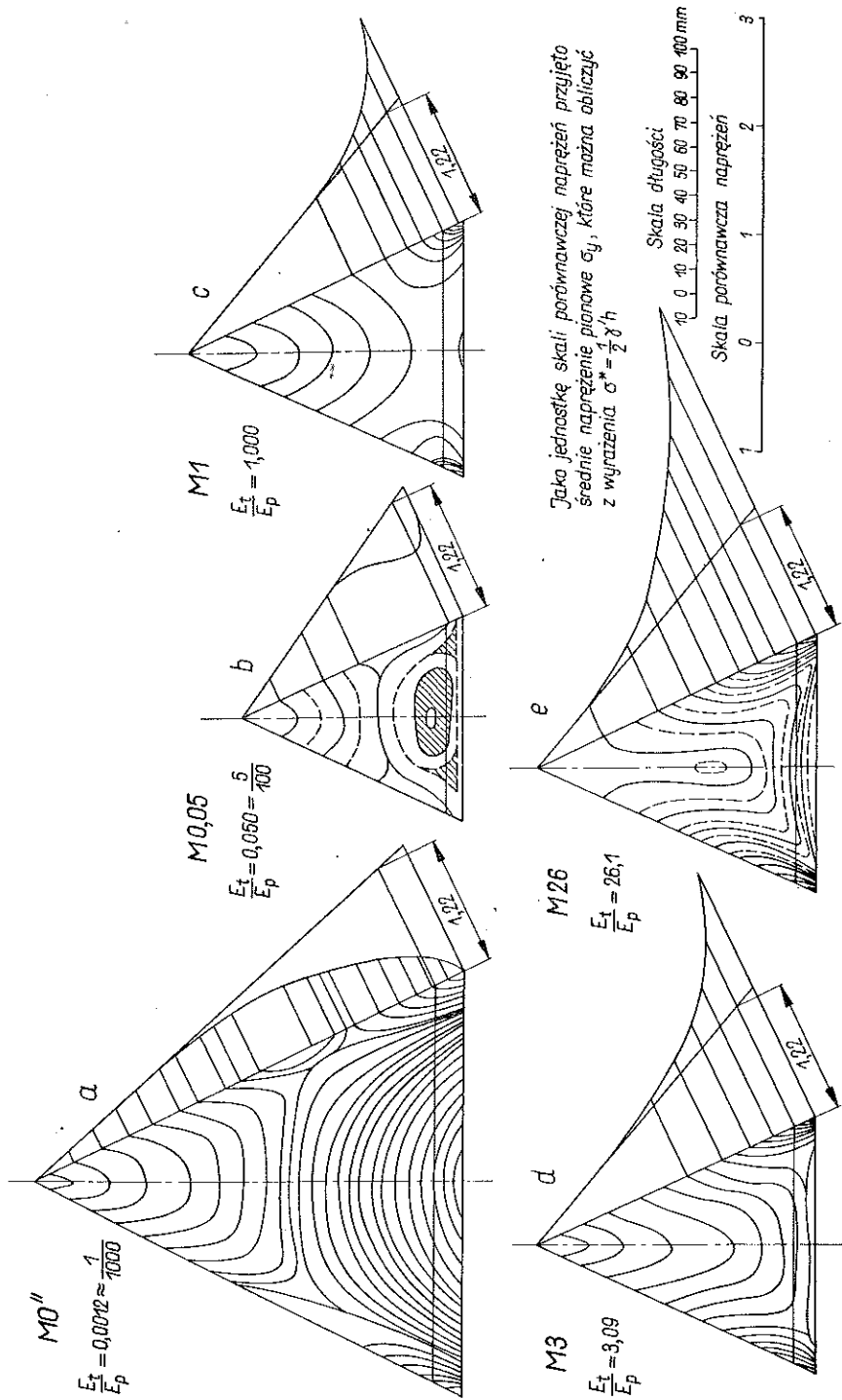
Rys. 13. Izoklina $\theta = 10^\circ$ modelu M.0,001

nywano nie wcześniej niż po upływie 5 min. lub nawet 20 min. od chwili obciążenia modeli (tj. od chwili uruchomienia wirówki). Ten okres czasu wystarczał do za-

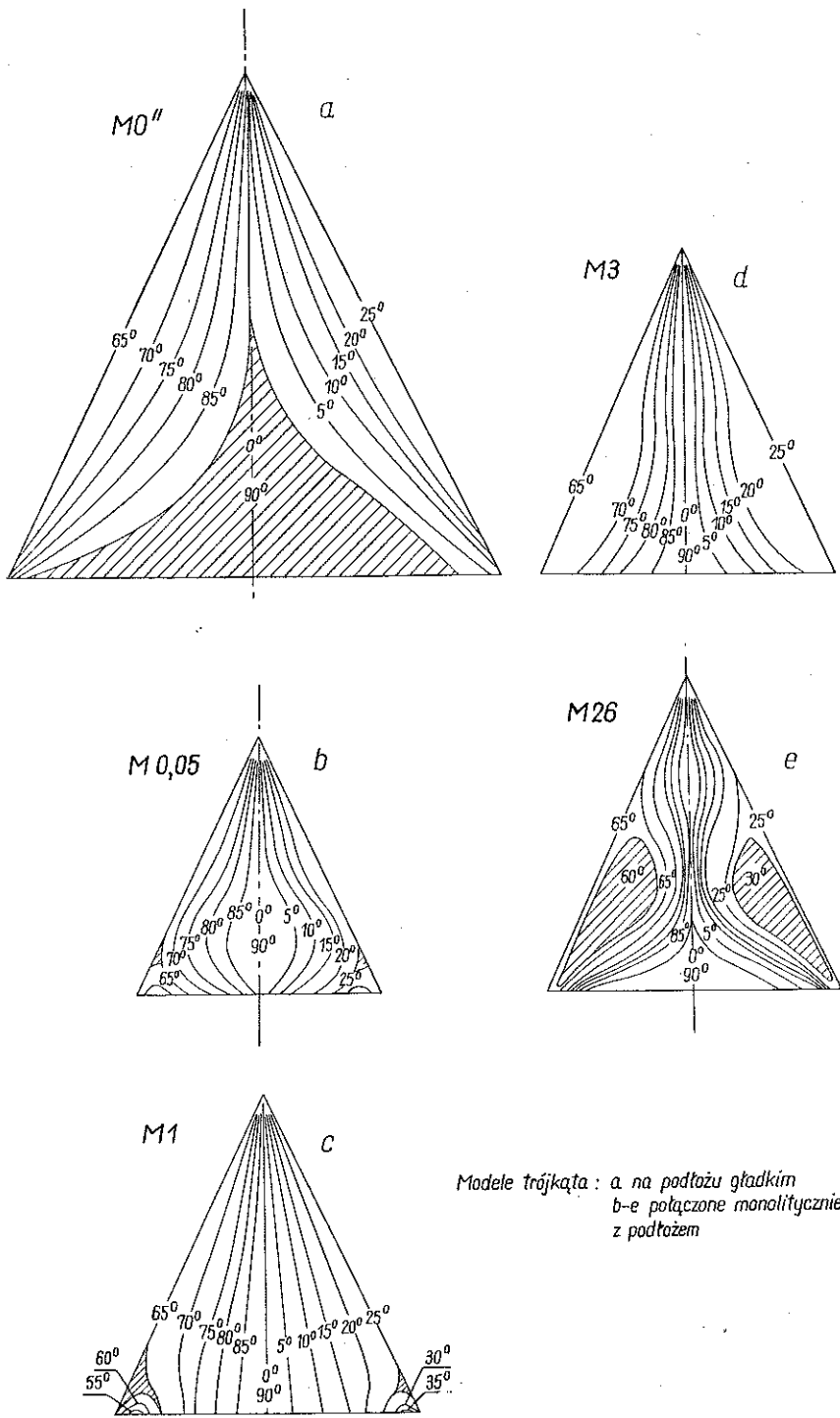


Rys. 14. Typowa zależność odkształcenia $e = (l_0 - l)/l_0$ od czasu w próbce zmodyfikowanej żywicy epoksydowej P 47, $E = 36 \text{ kG/cm}^2$. Próbki walcowe średnicy i wysokości około 10 mm., ściskane osiowo siłą P

kończenia (z praktycznie dostateczną dokładnością) zjawiska pelzania dla materiałów elastoptycznych o niskim E (rys. 14).



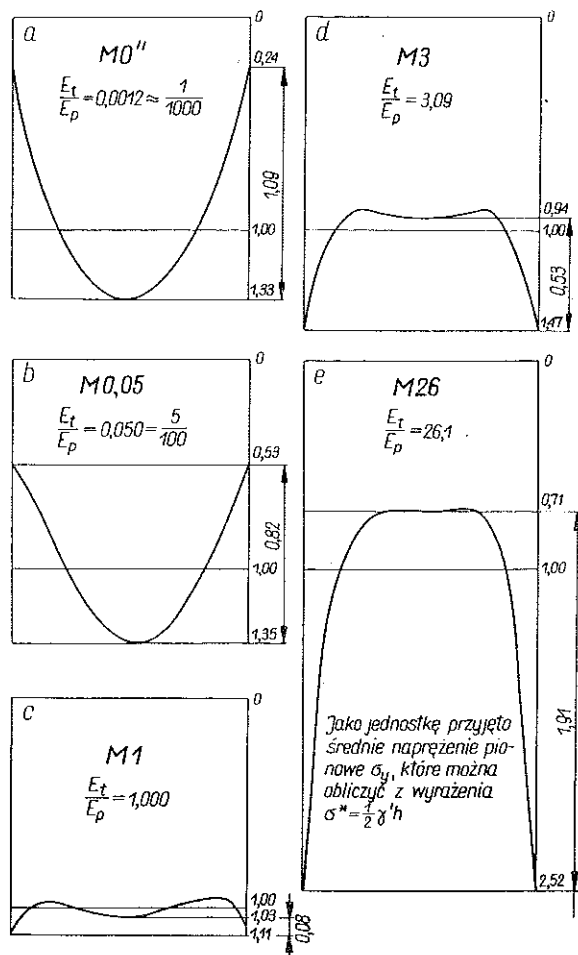
Rys. 15. Zestawienie izochrom oraz naprężeń brzegowych w modelach zasadniczych



Modele trójkąta: a na podłożu gładkim
 b-e połączone monolitycznie
 z podłożem

Rys. 16. Zbiorne wykresy izoklin

Jak wykazały badania próbek z różnych materiałów spolimeryzowanych w Pracowni, odkształcenie takiego materiału (o niskim E) pod stałym obciążeniem zmienia się z upływem czasu dążąc jednak do wartości granicznej. Dla tej wartości granicznej wyznaczono moduł E . Również zdjęcia obrazów naprężeń wykonywano dopiero po upływie tego samego okresu czasu od chwili obciążenia modelu. Przy wykonywaniu zdjęć obrazów naprężeń również naprężenia nie powinny podlegać już żadnym



Rys. 17. Naprężenie pionowe σ_y w modelach zasadniczych

dostreżalnym zmianom. Jednakże, jak się okazuje, czas ustalenia się odkształceń w stosowanych przez nas materiałach o niskim E jest dłuższy od czasu potrzebnego na ustalenie się obrazów. Dzięki temu po upływie czasu potrzebnego na ustalenie się odkształceń można było przystępować do fotografowania modeli nie obawiając się wystąpienia błędów, wywołanych pełzaniem zarówno mechanicznym jak i optycznym.

Tablica 3

Porównanie charakterystycznych wartości naprężeń (1) w modelach zasadniczych

L.p.	Oznaczenie modelu	E_t/E_p (—)	K cm ² rz. iz.	Naprężenia pionowe w przekroju O-H				Naprężenia		Naprężenia odniesione do σ^*		
				$\sigma^* = \sigma_{y \text{ śr.}}$ rz. iz. kG/cm ²		$\sigma_{y \text{ 0,H}}$ rz. iz. kG/cm ²		$\sigma_{y \text{ śr.}}$ rz. iz. kG/cm ²		σ'_{yH}	σ'_y środek	σ'_x środek
				(2)	(3)	(3)	(3)	(3)	(3)			
1	M.0''	0,0012	0,166	13,6 2,26	3,197 0,53	18,068 3,00	1,932 0,32	0,235	1,330	0,142		
2	M.0,001	0,0014	0,166	7,52 1,25	4,43 0,735	9,935 1,65	4,435 0,735	0,588	1,320	0,588		
3	M.0,05	0,050	0,146	4,4 0,64	2,340 0,34	5,935 0,87	1,940 0,283	0,532	1,347	0,441		
4	M.1	1,000	0,164	4,12 0,68	4,577 0,75	4,246 0,70	1,019 0,168	1,111	1,030	0,247		
5	M.3	3,09	0,166	3,95 0,66	5,804 0,96	3,702 0,62	0,304 0,051	1,468	0,938	0,078		
6	M.26	26,1	0,166	2,77 0,46	6,973 1,16	1,962 0,32	1,480 -0,246	2,517	0,708	-0,534		

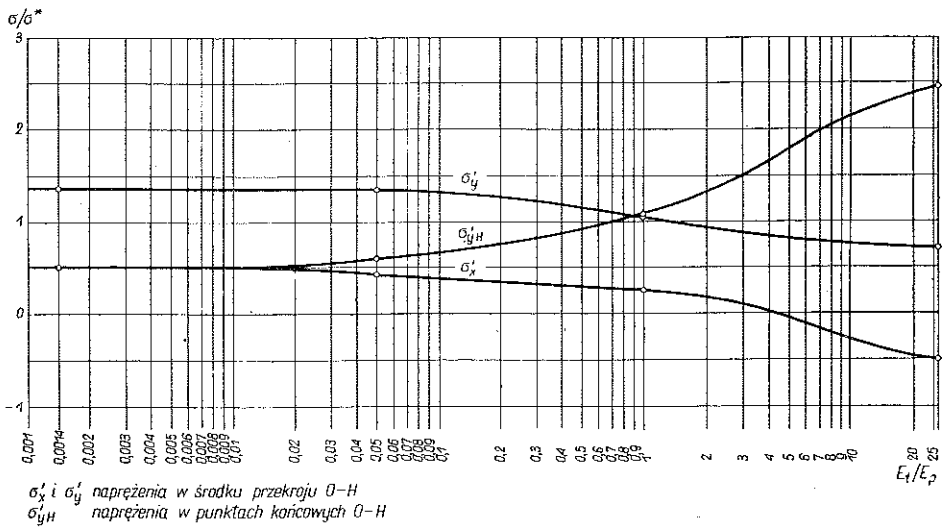
(1) W tej tablicy oraz na rys. 15 i 17 przyjęto, że naprężenia ścisające są dodatnie, jak to się czyni zwykle w budownictwie wodnym.

(2) Wartości obliczono ze wzoru $\sigma^* = \frac{P}{A} \gamma/k$ [10].

(3) Naprężenia (średnie) obliczono metodą Frochta (rys. 15).

Wyniki badań. Na podstawie zdjęć izochrom i izoklin sporządzonych w trakcie badań zostały wykonane wykresy izochrom (rys. 15) oraz izoklin (rys. 16) (tablice 1 i 2, poz. 1, 3–6). Na tej podstawie zostały wykonane wykresy naprężeń brzegowych (rys. 15) i trajektorii naprężeń głównych. Dla przekroju trójkąta położonego możliwie blisko połączenia z podłożem (odległego o $1/15 h_t$ od brzegu podłoża, co odpowiada średnio $0,8 d_x$) wyznaczono τ_{xy} , σ_x i σ_y korzystając z metody różnic naprężeń stycznych FROCHTA [3]. Na tej podstawie sporządzono wykresy naprężeń normalnych σ_y (rys. 17) dla modeli zasadniczych (8).

Dla bardziej przejrzystego przedstawienia wyników obliczono je dodatkowo (tablica 3) i zestawiono na rys. 15 i 17 w wartościach bezwymiarowych odniesionych do wartości porównawczej. W tym przypadku za jednostkę porównawczą dla naprężeń σ_y oraz σ_x przyjęto średnie naprężenie pionowe $\sigma_{y\text{śr}}$ oznaczone przez σ^* .



Rys. 18. Wykresy σ_x i σ_y w środku O-H oraz σ_y w jego punktach końcowych w zależności od E_1/E_2

Aby zachować tę samą skalę porównawczą również dla normalnych naprężeń brzegowych działających wzdłuż krawędzi trójkąta, wykorzystano wzór na te naprężenia dla klina nieskończonego, wyprowadzony przez PIGEAUD [10]. Wzór ten można przedstawić w postaci

$$\sigma_2 = -\frac{\gamma'}{2} (\operatorname{tg}^2 \psi + 1) y,$$

gdzie y oznacza współrzędną mierzoną na osi skierowanej w dół od górnego wierzchołka trójkąta i jest osią jego symetrii oraz pokrywa się z kierunkiem sił ciężkości, 2ψ oznacza kąt wierzchołkowy. W rozpatrywanym przypadku połowa kąta rozwarto-

(8) Na rysunkach 15–17 nie podano wykresów naprężeń w modelu M.0,001, ponieważ różnice między wartościami naprężeń dla M.0,001 i M.0,05 są rzędu błędów otrzymanych wyników.

ści klina ψ (górnego wierzchołka trójkąta) wynosi 25° , a $1/2\gamma' y = \sigma^*$; stąd $\sigma_2 = -1.22\sigma^*$, co odpowiada naprężeniu brzegowemu w klinie nieskończonym. Na wykresach rys. 15 i 17 podano naprężenia w liczbach bezwymiarowych⁽⁹⁾, uzyskane z podzielenia wartości σ_y i σ_x przez σ^* .

W celu ułatwienia wykorzystania opisanych w pracy wyników badań przy rozwiązywaniu zadań inżynierskich przedstawiono je dodatkowo w postaci zależności naprężeń (σ'_y i σ'_x w środku przekroju oraz σ'_y w punktach końcowych przekroju O i H) od stosunku E_t/E_p (rys. 18).

Analiza wyników badań i ich dokładności. Analiza danych doświadczalnych jest bardzo istotnym etapem badań, gdyż «nie zinterpretowane wyniki są bezużyteczne» [1]. W związku z tym autor starał się analizować dane otrzymywane na podstawie badań już w czasie ich prowadzenia⁽¹⁰⁾ lub przynajmniej bezpośrednio po ich zakończeniu. Pozwoliło to niejednokrotnie oszczędzić wiele czasu i pracy (np. dostateczne wczesne przerywanie badania nie rokującego pozytywnych wyników lub też wprowadzenie korzystnej zmiany do techniki badań).

W celu ułatwienia analizy wpływu zmiany stosunku E_t/E_p na rozkład naprężeń na poszczególnych rysunkach podawano wykresy zestawione dla wszystkich modeli zasadniczych.

Jak widać z rys. 15 i 16 przy stosunkach E_t/E_p równych od 0 do 3 (przypadki a-d) stan naprężenia w górnej części wysokości trójkąta jest bardzo zbliżony do rozkładu naprężeń, wyznaczonego na drodze teoretycznej dla klina nieskończonego [10]. Świadczy to o tym, że dla tych stosunków E_t/E_p wolno wyznaczać wartości naprężeń w górnym obszarze trójkąta ze wzorów otrzymanych z rozwiązań teoretycznych. W szczególności w tym obszarze:

a) izokliny stanowią pęk półprostych wychodzących z górnego wierzchołka trójkąta, których położenie można wyznaczyć ze wzoru

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{2x}{(1 - \operatorname{tg}^2 \psi) y},$$

b) izochromy stanowią rodzinę wycinków elips o środkach w wierzchołku górnym trójkąta (klina). Punkty ich można wyznaczyć ze wzoru

$$K^2 m^2 = 0,5\gamma' (1 - \operatorname{tg}^2 \psi) y^2 + 4(0,5\gamma')^2 x^2,$$

(gdzie $\gamma' = \gamma\omega^2 r_0/9,81$) lub w postaci równania elipsy

$$\frac{x^2}{\frac{K^2 m^2}{4(0,5\gamma')^2}} + \frac{y^2}{\frac{K^2 m^2}{(0,5\gamma')(1 - \operatorname{tg}^2 \psi)^2}} = 1,$$

⁽⁹⁾ σ'_x i σ'_y oznaczają odpowiednie naprężenia odniesione do σ^* .

⁽¹⁰⁾ Było to ułatwione dzięki zastosowaniu również stroboskopu umożliwiającego obserwację izochrom i izoklin w modelu poddanym wirowaniu.

skąd połowy małej i dużej osi elipsy są odpowiednio równe

$$a = \frac{Km}{\gamma'}, \quad b = \frac{Km}{0,5\gamma'(1 - \operatorname{tg}^2 \psi)}.$$

Natomiast jest niedopuszczalne stosowanie powyższych wzorów dla obszaru bezpośrednio sąsiadującego z linią połączenia trójkąta z podłożem, gdyż charakter rozkładu naprężeń w tej strefie jest zdecydowanie nieliniowy oraz jakościowo różny od występującego w klinie nieskończonym.

Wniosek o liniowym rozkładzie naprężeń w górnym obszarze trójkąta na półpłaszczyźnie potwierdzają wyniki badań cytowanych w literaturze, np. [5, 6, 11 i 42]. Natomiast stan naprężenia w strefie skokowej zmiany modułów E wyraźnie zależy od własności sprężystych podłoża nie tylko ilościowo, ale również jakościowo. Wniosek ten potwierdza przeprowadzona niżej analiza wykresów.

Porównując obrazy izochrom w kolejnych modelach trójkątów w zakresie stosunku E_t/E_p od 0,05 (rys. 15b) do 26 (rys. 15e) widzimy, co następuje:

- 1) izochroma ekstremalna wewnątrz modelu na rys. 15b (o kształcie zbliżonym do całej elipsy) zanika przy zwiększaniu się stosunku E_t/E_p od 0,05 do 26;
- 2) na rys. 15a–15d izochromy w pobliżu górnego wierzchołka trójkąta mają kształt zbliżony do wycinków elips; natomiast na rys. 15e dla M.26 ($E_t/E_p = 26,1$) jest on podobny do kolby laboratoryjnej.

Rozpatrując kolejno wykresy naprężeń brzegowych (rys. 15) w modelach o zmieniających się stopniowo stosunkach E_t/E_p widzimy, że kształt tych krzywych prawie na całym obszarze trójkąta (poza krótkim odcinkiem w pobliżu podłoża) ma charakter krzywej wypukłej dla $E_t/E_p < 1$, a krzywej wklęsłej dla $E_t/E_p > 1$. Wykresy naprężeń brzegowych dla M.1,00 stanowi przypadek przejściowy i można go przyjmować jako liniowy prawie na całej jego długości. Również dla wszystkich podanych na rys. 15b–15e modeli zasadniczych w dolnych wierzchołkach trójkąta jest widoczne występowanie spiętrzeń brzegowych. Wartości ekstremalne tych naprężeń rosną wraz ze zwiększeniem się E_t/E_p .

Analizując wykresy izoklin (rys. 16) konstatujemy, że krzywe te w wyraźny sposób zmieniają swe kształty wraz ze wzrostem E_t/E_p . Początkowo mają one kształt elips wydłużonych spiczasto ku górze w M.0,05 (rys. 16b), następnie promienisty w M.1,00 (rys. 16c) i w końcu stają się hiperbolami zdeformowanymi w górnej części trójkąta, gdy $E_t \gg E_p$ (M.26, rys. 16e).

Bardziej pogładowymi od izochrom i izoklin z inżynierskiego punktu widzenia są wykresy naprężeń normalnych σ_y (rys. 17) oraz wykresy porównawcze naprężeń σ'_x i σ_y w środku i na brzegach rozpatrywanego przekroju (rys. 18). Z wykresów σ_y (rys. 17b–17e) widzimy, że

- 1) naprężenia σ_y w punkcie środkowym przekroju $O-H$ maleją wraz ze zwiększaniem się stosunku E_t/E_p od wartości 0,05 do 26,
- 2) pionowe naprężenia w brzegowych punktach O i H przekroju wzrastają przy zwiększeniu się E_t/E_p ,
- 3) $E_t/E_p = 1$ jest przypadkiem pośrednim, w którym naprężenia w środku przekroju i na jego brzegach mają zbliżone wartości. Natomiast wykresy na rys. 18

pozwalają przewidzieć wpływ podatności podłoża na stan naprężenia trójkąta nie tylko dla rozpatrzonych stosunków E_t/E_p , ale również dla przypadków pośrednich.

Co się tyczy dokładności wyników badań, to w omawianej metodzie głównym źródłem błędów są własności reologiczne zastosowanych materiałów modelowych. Jak wiadomo, nie są jeszcze znane żywice czułe optycznie, które byłyby idealnie sprężyste. Wszystkie materiały używane na modele elastoosprężyste charakteryzują się wyraźnymi własnościami sprężystolepkimi [34 i 38].

Eksperymentatorzy badając statycznie najróżnorodniejsze materiały optycznie czułe obserwowali przy stałym obciążeniu zmianę odkształcenia wraz z upływem czasu (zjawisko pełzania). Jednakże wykresy tych zależności wykazują, że po pewnym czasie T_0 od chwili przyłożenia o ciężenia odkształcenia zmieniają się bardzo mało. Dzięki temu w pewnym przedziale czasu (T_0, T_1) odkształcenia te można traktować jako praktycznie stałe. Jeśli przy wywoływanych naprężeniach odkształcenia są proporcjonalne do naprężeń, to w tym przedziale czasu badany materiał można traktować jako sprężysty (11).

Wobec powyższego w badaniach statycznych, jeśli czas jaki upłynął od chwili obciążenia jest dostatecznie długi w porównaniu z czasem trwania samych pomiarów, można przyjąć z dostatecznym stopniem dokładności, że materiał modelu jest idealnie sprężysty. To znaczy, że jest spełnione podstawowe założenie, w którym opracowano klasyczne metody elastoosprężyste. W omawianych badaniach skorzystano z opisanego sposobu zmniejszenia do minimum wpływu pełzania materiałów modelowych na wyniki badań. Czas T_0 rozpoczęcia rejestracji obrazów naprężeń w modelu ustalono na podstawie znajomości krzywych pełzania dla wszystkich materiałów, z których wykonywano modele. O właściwym doborze tych czasów T_0 świadczy stopień dokładności otrzymanych wyników.

W metodzie Frochta wyznaczamy naprężenia poziome σ_x ze wzoru $\sigma_x = \sigma_x^0 - \Delta\tau_{xy} \Delta x/\Delta y$. Jednakże zarówno początkowy jak i końcowy punkt przekroju leżą na nieobciążonych brzegach modelu trójkąta, w których naprężenie główne, normalne do brzegu jest równe zeru. Dzięki temu w obu tych punktach można było obliczyć składowe σ_x i σ_y korzystając jedynie ze znajomości rzędów izochrom m i parametrów izoklin θ . Wyznaczone tą drogą naprężenia w punkcie H , w końcowym przekroju stanowiły kontrolę wyników otrzymanych za pomocą metody Frochta. Okazało się, że wartości brzegowe obliczone na podstawie tych dwóch metod różnią się o 1% do 3% dla pionowych naprężeń normalnych σ_{yH} , a dla sum $(\sigma_x + \sigma_y)_H$ o 1% do 7%.

Sprawdzenie dokładności wyznaczenia naprężeń średnich $\sigma_{y\text{sr}}$ w przekroju $O-H$ na podstawie metody Frochta wykazuje, że różnią się one od odpowiednich wartości obliczonych w oparciu o dane n, γ i r_0 o 4% do 13%.

Na zakończenie podjęto próbę porównania wyników badań ze znanymi rozwiązaniami teoretycznymi dla zadań możliwie zbliżonych.

(11) J. PINDERA wprowadza dla takich materiałów określenie «materiały chwilowo sprężyste» [45].

Porównanie zgodności stanu naprężenia w trójkącie, otrzymanego w wyniku badań z rozkładem naprężeń, jaki daje teoria dla klina nieskończonego, przeprowadzono poprzednio. Natomiast autor nie znalazł pracy, w której zostałyby wyznaczony stan naprężenia w wąskim trójkącie równoramiennym, połączonym z podłożem o innych własnościach sprężystych.

Jednakże można przeprowadzić jakościową analizę wyników tego przykładu na podstawie prac F. TÖLKEGO [4 i 12], w których rozpatrzono przypadek trójkąta prostokątnego przy stosunkach E_t/E_p równych 0, 1/2, 1, 2 oraz ∞ . Mianowicie przy przejściu E_t/E_p od zera do nieskończoności w naszej pracy w obu końcowych punktach przekroju O i H naprężenie $\sigma'_{y0,H}$ wzrasta w przybliżeniu pięciokrotnie, podczas gdy w przykładzie rozpatrzonym przez TÖLKEGO w dolnym prostokątnym wierzchołku trójkąta zwiększyło się ono odpowiednio mniej więcej trzykrotnie. Podobnie przy zmianie E_t/E_p od 1/2 do 2 w przykładzie naszym $\sigma'_{y0,H}$ wzrasta prawie 3-krotnie, a w przypadku rozwiązany przez TÖLKEGO σ_y , w rozpatrywanym poprzednio punkcie, powiększa się około 1,5 krotnie.

Pomimo porównania naprężeń w dwu różniących się od siebie przypadkach jest widoczna wyraźna zgodność jakościowa wpływu zmian własności sprężystych podłoża na stan naprężenia trójkąta w obszarze jego połączenia z podłożem.

5. Uwagi końcowe

Zaproponowana w pracy metoda daje szerokie możliwości modelowej analizy rozkładu naprężeń w skokowo niejednorodnych⁽¹²⁾ obiektach płaskich obciążonych również siłami masowymi. Zaprojektowana i wykonana w ramach opracowywania metody wirówka II umożliwi modelowanie stanu naprężenia w tarczach obciążonych siłami odśrodkowymi lub ciężarem własnym.

Dotychczas różni eksperymetatorzy stosowali jedynie niektóre fragmenty tej metody. Stroboskop do rejestracji optycznych obrazów naprężeń wywołanych działaniem sił odśrodkowych zastosowali np. M. PERLA [44] (1953) i H. G. EDMUNDS [35] (1954). Nadali oni modelowi rotację dookoła osi prostopadłej do jego powierzchni czołowej. Zdjęcia obrazów elastooptycznych, korzystając z pojedynczego błysku, wykonał pierwszy F. DIETRICH [24] w 1938 r. W szczególności metoda ta umożliwia wyznaczenie stanu naprężenia w budowlach ciężkich (np. wodnych), posadowionych na podłożu o innych własnościach odkształceniowych niż materiał obiektu, obciążonych ciężarem własnym.

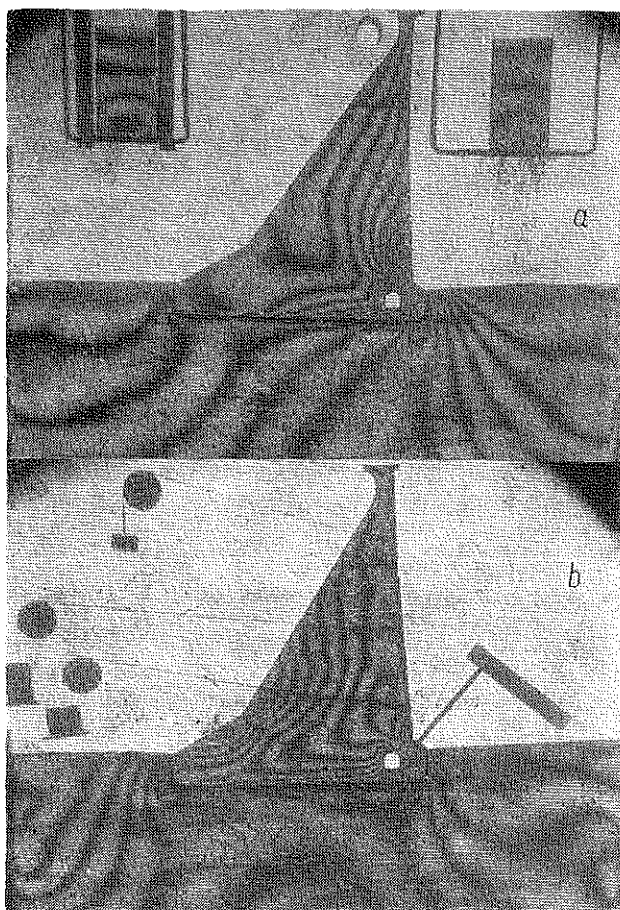
Wyniki badań objętych niniejszą pracą wykazały, że jest możliwe modelowanie również budowli posadowionych na skokowo niejednorodnych podłożach.

Jak wykazały wyniki tej pracy, już obecnie zaproponowana metoda umożliwia otrzymanie wyników z dokładnością rzędu 10%. Rezultaty z tą dokładnością są całkiem wystarczające dla większości zadań technicznych. Autor widzi możliwości

(12) Otrzymane dotychczas przez Pracownię Analizy Naprężeń IPPT PAN materiały elastooptyczne o niskim E umożliwiają wykonanie modeli niejednorodnych skokowo, w których stosunki modułów E poszczególnych części mogą się wahać w granicach od 1 do 1/50.

dalszego obniżenia wartości błędów występujących zarówno w czasie badania jak i przy opracowywaniu jego wyników.

W rozpatrywanym w pracy przykładzie wyznaczenie składowych pionowych σ_y i poziomych σ_x naprężeń normalnych w analizowanych przekrojach otrzymano metodą różnic naprężeń stycznych (Frochta), nie mając jednak możliwości technicznych rozdzielenia naprężeń dla całej powierzchni modelu (w braku odpowiedniej aparatury np. analogowej lub interferencyjnej). W pracach następnych autor będzie korzystał w miarę możliwości z istniejącej w kraju aparatury, pozwalającej na wyznaczenie sum naprężeń głównych. Znając różnice $\sigma_1 - \sigma_2$ z obrazów izochrom, będziemy mogli rozdzielać naprężenia główne σ_1 od σ_2 dla całego obszaru modelu.



Rys. 19. Izochromy w modelu zapory

a) obciążenie ciężarem własnym, b) jednoczesne działanie ciężaru własnego i parcia hydrostatycznego [26]

Wykresy porównawcze (rys. 15–17, a w szczególności rys. 18) powinny ułatwić korzystanie z wyników tej pracy.

Zaproponowana metoda, uzupełniona wynikami badań modelu trójkąta spoczywającego na podłożu o innym module E , została już wykorzystana przy pro-

jektowaniu jednej z większych zapór budowlanych w Polsce (rys. 19). Badania te wykazały, że istnieją możliwości uogólnienia przedstawionej poprzednio przez autora [27, 28 i 29] metody optycznych obrazów naprężeń wywołanych jednoczesnym działaniem ciężaru własnego i parcia hydrostatycznego również na ciała skokowo niejednorodne. Dla przypadku jednoczesnego obciążenia ciężarem własnym i parciem wody otrzymano obrazy izochrom (rys. 19b) i izoklin korzystając w czasie wirowania ze skonstruowanego w tym celu ciężarkowego układu obciążającego (widocznego na rys. 19b), umożliwiającego zrealizowanie zastępczego parcia hydrostatycznego w wirówce.

Dla budownictwa wodnego większą wartość od zanalizowanego w ramach przykładu przypadku trójkąta równoramiennego miałaby znajomość wpływu różnych wartości E_t/E_p na stan naprężenia trójkąta prostokątnego. Rozwiązanie tego zadania byłoby bardzo pomocne przy projektowaniu ciężkich zapór wodnych. Dlatego też Pracownia Analizy Naprężeń IPPT zamierza zająć się opracowaniem tego zagadnienia w najbliższych latach zarówno dla przypadku obciążenia samym tylko ciężarem własnym jak i jednoczesnym działaniem ciężaru własnego i parcia hydrostatycznego.

Opisane przykłady odnosiły się do przypadków, w których wszystkie części skokowo niejednorodnych modeli były wykonane z materiałów praktycznie liniowo sprężystych. Jednakże omówiona metoda może być uogólniona w przyszłości również na badanie modeli wykonanych z materiałów nieliniowo sprężystych, plastycznych lub sprężysto-plastycznych. Autor widzi poza tym pewne możliwości wprowadzenia do tych badań podłoża z materiałów sypkich lub nawet uwzględnienia, w ograniczonym zakresie, własności reologicznych. Wszystkie te zadania są jednak bardzo żmudne i wymagałyby posiadania odpowiednich materiałów modelowych oraz ewentualnego wykonania uzupełniającej aparatury.

Literatura cytowana w tekście

1. E. BRIGHT WILSON, jr, *An Introduction to Scientific Research*, McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1952.
2. E. G. COKER, L. N. G. FOLN, *A Treatise on Photoelasticity*, Cambridge University Press, 1931 i 1957.
3. М. М. ФРОХТ, *Фотоупругость*, т. II, ГИТЛ, Москва-Ленинград 1950.
4. М. М. ГРИШИН, *Гидротехнические сооружения*, Стройиздат, Москва 1947.
5. M. HETENYI, *Handbook of Experimental Stress Analysis*, John Wiley and Sons, New York 1959.
6. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, tom IV, cz. I, wyd. 2, PWN, Warszawa 1954.
7. A. U. HÜGGENBERGER, *Talsperren*, Messtechnik, Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin 1951, 101-103.
8. H. T. JESSOP, *Photoelasticity Principles and Methods*, Cleaver-Hume Press, London 1949.
9. M. MILBAUER, *Fotoelasticimetrie a její pouzity v praxi*, SNTL, Praha 1953.
10. M. PIGEAUD, *Résistance des matériaux et élasticité*, tome II, 3 édit. Gauthier-Villars, Paris 1950.
11. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1961.
12. F. TÖLKE, *Wasserkraft Anlagen*, Springer Verlag, Berlin 1951.
- 13/20 H. WOLF, *Spannungsoptik*, Springer-Verlag, Berlin-Goettingen-Heidelberg 1961.

21. J. H. BRAHTZ, *The stress function and photoelasticity applied to dams*, Trans. A.S.C.E., **102** (1936), 1232.
22. P. B. BUCKY, A. G. SOLAKIAN, L. S. BALDIN, *Centrifugal method of testing models*, Civil Engineering, **5**, **5** (1935).
23. Т. Л. Хесин, *Применение фотоупругости и электротензиметрования при исследовании в гидротехнических сооружениях сложной формы*, Изд. выжшей школы, Строит. и. Архит. **3**, (1958).
24. P. DIETRICH, *Untersuchung des Spannungszustandes vor einer Drehstahlschneide im polarisierten Light*, Diss. T.H. Hannover 1938.
25. R. S. DOROSZKIEWICZ, *Elastoptyczne badania przekroju poprzecznego zapory filarowej*, Mech. Teoret. Stos., **2**, **2** (1964), 3-14.
26. R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHALSKI, *Badanie zapory grawitacyjnej posadowionej na podłożu o innych własnościach sprężystych*, w opracowaniu.
27. R. S. DOROSZKIEWICZ, *New photoelastic method for determining the state of stress in dams*, Symp. Concrete Dam Models, October 14-19, 1963. Paper No 9, pages 9.1-9.25, Lisboa 1963.
28. R. S. DOROSZKIEWICZ, *Some methods for determining the state of stress in bodies subjected to simultaneous own weight and hydrostatic pressure*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **12**, **10** (1962), 23-28.
29. R. S. DOROSZKIEWICZ, *Wyznaczanie stanu naprężenia ciał znajdujących się pod jednoczesnym działaniem ciężaru własnego i parcia hydrostatycznego*, Praca doktorska IPPT PAN, Warszawa 1962. Maszynopis niepublikowany.
30. R. S. DOROSZKIEWICZ, *Zastosowanie elastoptycznych badań w budownictwie wodnym*, Gospodarka wodna, **8**, **21** (1961), 320-331.
31. R. S. DOROSZKIEWICZ, *Z badań fotosprężystych stanu naprężenia wywołanego ciężarem własnym z uwzględnieniem wpływu podłoża*, Mech. Teoret. Stos., **2**, **2** (1964).
32. R. S. DOROSZKIEWICZ, A. LIŁEWKA, *Doraźne badania własności mechanicznych i elastoptycznych materiałów używanych w elastoptyce*, Mech. Teoret. Stos., **1**, **1** (1964), 45-59.
33. R. S. DOROSZKIEWICZ, B. MICHALSKI, *Pewne propozycje odnośnie polskiej terminologii z zakresu fotosprężystości*, w przygotowaniu.
34. Е. И. Едельштейн, *О применении поляризационнооптического метода исследования напряжений к решению динамической задачи теории упругости*. Труды Конференции Поляризационно-оптический метод исследования напряжений, 13-21.II.1958, ИЛГУ 1960.
35. H. G. EDMUNDS, *Stress concentrations at holes in rotating discs*, Engineering, London, **198** (1954), 618.
36. G. GRANDORI, *Ancora sulla ricerca fotoelastica degli sforzi al peso proprio nelle strutture piane*, Atti del Collegio degli ingegneri di Milano, N 5-6, Maggio-Ciugno 1957.
37. S. G. GUTMAN, *Méthodes d'études en laboratoire de l'état des contraintes des ouvrages hydrauliques et de leurs éléments*, Commission Internationale des Grands Barrages de la Conférence Mondiale de l'Energie, Cinquième Congrès des Grands Barrages, Paris 1955.
38. R. HILTSCHER, *Gütebeurteilung spannungsoptischer Modellwerkstoffe*, Forschung, **3**, **20** (1954).
39. B. T. JACOBSEN, *Stresses in gravity dams by principles of least work*, Trans. A.S.C.E., **489**, **96** (1932).
40. M. LEVY, Comptes Rendus, 1235, **126** (1898).
41. LOCATELLI, GRANDORI, MORAVIA, *Sulla ricerca per via fotoelastica degli sforzi dovuti al peso proprio nelle strutture piane*, La Ricerca Scientifica, Roma **1**, **25** (1955).
42. S. MACKIEWICZ, *Wpływ sprężystości podłoża na stan naprężenia w zaporze ciężkiej*, praca doktorska, Gdańsk 1964.
43. M. MILBAUER, M. PERLA, *Fotoelasticimetrické Metody ve Výzkumu Konstrukci*, Zpravy 16, Ustavu Teoretické a Aplikovane Mechaniky, Československa Akademia VED, Praha 1958.
44. M. PERLA, *Napjatost rotuhicijo kotouče odlehčenoho šesti excentrickými otvoru*, Dysertacja, Praha 1953.

45. J. PINDERA, *Badania pewnych reologicznych własności elastoptycznych kilku żywie poliestrowych*, Rozpr. Inżyn., 3 i 4, 7 (1959), 361-411 i 481-540.
46. A. J. S. PIPARD, *Unwin Memorial Lecture*, J. Institute G. L., 33, (1949-50), 265.
47. L. F. RICHARDSON, *The approximate arithmetical solutions by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in masonry dams*, Phil. Trans. Roy. Soc., 210 (1909).
48. J. R. RYDZEWSKI, *Experimental method of investigating stresses in buttres dams*, British J. Appl. Phys., 11, 10 (1959).
49. J. R. RYDZEWSKI, *Stress distribution in gravity dams*, Water Power, June 1960.
50. J. K. SILVERMAN, *Approximate stress functions for triangular wedges*, J. Appl. Mech., 22 (1958), 123.
51. United States Bureau of Reclamation, Bulletin 2 of Part 5, Boulder Canyon Projekt Final Report, Denver, Colorado 1938.
52. J. S. WILSON and W. GORE, *Stresses in dams. An Experimental investigation by means of indiarubber models*, Min. Proc. Inst. C.E., 172 (1908), 107.
53. K. WOLF, *Zur Integration der Gleichung $F = 0$ durch Polynome in Falle des Straumauern-Problems*, Sitz. Kai. Akad. Wissen., Wien, 123 (1914).
54. O. C. ZIENKIEWICZ, *The stress distribution in gravity dams*, J. Inst. C.E., 27 (1947), 244.

Резюме

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
В СКАЧКО-ОБРАЗНО НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛАХ
ПОД ВЛИЯНИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

В работе обсуждается, предложенный автором поляризационно-оптический метод определения двухмерного напряженного состояния в скачко-образно неоднородных телах с участием загрузки собственным весом исследованной модели. Этот метод состоит во центрифугировании, в пучке поляризованного света. Отдельные части модели, изготовлены из специально приготовленных, для этой цели, фотоупругих материалов с разными модулями Юнга E . Благодаря этому методу избегается, использования обычно применяемого, в этом случае, способа моделирования путем скачко-образного изменения толщины соответствующих частей модели. Можно сказать, что этот последний способ моделирования неоднородности модели дает, относительно, правильное распределение напряжений только для точек достаточно удаленных от границы изменения модуля E и от точек эвентуального приложения статических сил, моделирующих собственный вес объекта.

Для получения параллельных, относительно друг другу, направлений центробежных сил (подобно тому, как это имеет место в случае гравитационного поля сил) центрифуга была спроектирована так, чтобы модель подвергалась вращению вокруг оси оборота, расположенной в его срединной поверхности. Аппаратура сконструированная для этого метода дает возможность как визуального наблюдения изображений напряжений (изохром и изоклин), возникающих при вращении так и при выполнении фотосъемок.

Этот метод описывается на примере равнобедренного треугольника, покоящегося на основаниях с коэффициентами E_p , разняющимися от E_b треугольника. На основании поляризационно-оптических результатов исследований, составляются диаграммы напряжений для моделей с отношениями $E_b/E_p \approx 0,001; 0,05; 1; 3; 26$.

Метод может применяться к определению влияния разной упругой податливости основания на напряженное состояние в гравитационных сооружениях, в которых следует учесть действие их собственного веса.

Даются также, два примера изображений изохром в модели плотины: для случая нагружения собственным весом и для одновременного действия собственного веса и гидростатического напора. В этой задаче отношение модулей E плотины и основания составляло $E_z/E_p \approx 4,85$.

Кроме того в работе обсуждалось настоящее состояние знания в области проблематики приведенной в заглавии.

S u m m a r y

A METHOD OF PHOTOELASTIC ANALYSIS OF STATES OF STRESS OF BODIES OF JUMP-LIKE NONHOMOGENEITY LOADED BY THEIR OWN WEIGHT

This is a discussion of the author's method of photoelastic analysis of a plane state of stress in a body of jump-like nonhomogeneity loaded by its own weight. The model rotates in a beam of polarized light. It is made of a number of photoelastic materials produced for this purpose and having different, low values of Young's modulus E . This method enables us to avoid the usual method of representing a jump-like variation of Young's modulus by a jump of thickness of the model. The latter method of modelling nonhomogeneity of an object gives a relatively correct stress distribution only at points at sufficient distance from the line of change of Young's modulus and the points of application of the forces representing the weight of the object.

In order that the directions of the centrifugal forces may be parallel (thus imitating the gravity forces) the centrifugal machine has been designed in such a manner that the model rotates about an axis lying in its middle plane. The apparatus used for this method enables visual observation of the photoelastic image of the stress (the isochromatic fringes and isoclines) produced by rotation and also photographing of those images.

The example used to describe the method is that of an isosceles triangle resting on a foundation the coefficient (E_p) of which is different from that of the triangle (E_t). On the basis of the results of photoelastic analysis diagrams of stresses are plotted for models for the ratio $E_t/E_p \approx 0,001$; 0,05; 1; 3; 26.

The method described can be used to determine the influence of the elastic properties of the foundation on the state of stress in heavy structures for which the action of the own weight should be taken into account. Two examples of isochromatic fringe patterns are given for a model of a dam loaded by its weight only and subject to simultaneous action of the own weight and the hydraulic pressure. The ratio of moduli of the dam and the foundation was $E_z/E_p \approx 5$.

The paper contains also a survey the present state of knowledge in the domain of the problem discussed.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 sierpnia 1967 r.