ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 16 (1968)

TEORIA WISKOZYMETRÓW DLA JEDNORODNYCH MIESZANIN GRUNTOWO-WODNYCH

WŁODZIMIERZ PARZONKA (WROCŁAW)

Oznaczenia

$\dot{G}$ prędkość deformacji [s^{-1}],
τ naprężenia ścinające [dyn·cm^{-2}],
η lepkość dynamiczna [g cm^{-1} s^{-1}],
η_p lepkość plastyczna [g cm^{-1} s^{-1}],
τ_0 granica plastyczności [dyn·cm^{-2}],
k współczynnik sztywności [dyn·cm^{-2} s^n],
n liczba strukturalna [bezwymiarowa],
r promień [cm],
τ_r wartość τ w szczelinie wiskozymetru typu Couette'a [dyn·cm^{-2}],
τ_{R_1} wartość τ_r dla $r = R_1$ [dyn·cm^{-2}],
τ_{R_2}, τ_{r_0} wartości τ_r odpowiednio dla $r = R_2$ i $r = r_0$ [dyn·cm^{-2}],
R_1, R_2 promienie cylindra wewnętrznego i zewnętrznego wiskozymetru typu Couette'a [cm],
l wysokość zanurzonej części wewnętrznego cylindra [cm],
M moment [dyn·cm],
$\dot{\Phi}$ prędkość kątowa punktu na odległości r od osi [s^{-1}],
Ω prędkość kątowa obrotowego cylindra wiskozymetru typu Couette'a [s^{-1}],
Ω_{max} maksymalna wartość Ω dla danego przyrządu [s^{-1}],
dv/dr pozorna prędkość deformacji (Couette) [s^{-1}],
$(dv/dr)_B$ rzeczywista prędkość deformacji (Couette) dla ciał Binghama [s^{-1}],
$(dv/dr)_k$ rzeczywista prędkość deformacji (Couette) dla ciał pseudoplastycznych [s^{-1}],
$(dv/dr)_{sup}$ górna wartość liniowych dv/dr dla $\Omega = \Omega_{max}$ i ciała Binghama [s^{-1}),
$(dv/dr)_{inf}$ dolna wartość liniowych dv/dr (ciało Binghama) [s^{-1}],
$\Delta(dv/dr)_{lin}$ strefa liniowych wartości dv/dr (Bingham) [dyn·cm^{-2}],
$\tau_{R_1,sup}$ górna wartość liniowych τ_{R_1} (Bingham) [dyn·cm^{-2}],
$\tau_{R_1 inf}$ dolna wartość liniowych τ_{R_1} (Bingham) [dyn·cm^{-2}],
$\Delta\tau_{R_1,lin}$ strefa liniowych wartości τ_{R_1} (Bingham) [dyn·cm^{-2}],
τ_0' pozorna wartość τ_0 według wiskozymetru typu Couette'a i pseudoreogramu [dyn·cm^{2-}],
k_f współczynnik poprawkowy dla τ_0', zdefiniowany wzorem (3.15) [bezwymiarowy],
k_a pozorna wartość k według wiskozymetru typu Couette'a i pseudoreogramu [dyn·cm^{-2} s^n],

F współczynnik poprawkowy dla k, zdefiniowany wzorem (3.16) [bezwymiarowy],
u lokalna prędkość w rurze [cm s^{-1}],
v prędkość średnia [cm s^{-1}]
$8v/D$ pseudogradient prędkości w rurach [s^{-1}],
τ_{max} maksymalna wartość τ na ścianie rury [dyn·cm^{-2}],
k' wartość k poprawiona dla przypadku ruchu w rurach [dyn·cm^{-2} $s^{n'}$],
n' wartość n według pomiarów w rurach [bezwymiarowa],
p ciśnienie [dyn·cm^{-2}],
Δp strata ciśnienia [dyn·cm^{-2}],
D średnica rury [cm],
R promień rury [cm],
L długość rury [cm],
D_0 średnica rdzenia (ruch ciała Binghama w rurze) [cm],
s' wagowa koncentracja mieszaniny [bezwymiarowa],
d_{50} średnia średnica ziarn danego gruntu [μ],
α charakterystyka wiskozymetru typu Couette'a, zdefiniowana wzorem (2.7) [bezwymiarowa].

1. Dane ogólne

Jednorodne mieszaniny gruntowo-wodne złożone są z wody i ziarn gruntu o średnim wymiarze zawartym między 2 i 50, a nawet niekiedy 100μ, i zachowują się jak całość mająca własności ciała plastycznolepkiego. Ruch ich jest możliwy tak w strefie laminarnej, jak i w strefie przejściowej i turbulentnej. Ruch laminarny scharakteryzowany jest przez własności plastycznolepkie; pozorna lepkość η_a jest zmienna wskutek zmiany struktury ciała. Opis ruchu wymagą określenia krzywych płynięcia na drodze eksperymentalnej.

Zwiększenie prędkości deformacji powoduje z reguły całkowite zniszczenie struktury mieszanin jednorodnych. Po całkowitym upłynnieniu ciała rozpoczyna się reżim turbulentny, w którym mieszanina zachowuje się w większości przypadków jak ciecz newtonowska o podwyższonej gęstości.

Do reologicznej charakterystyki jednorodnych mieszanin można zastosować modele płynięcia ciał, których własności reologiczne nie zależą od czasu (time — independent bodies). Pomiędzy tymi ciałami wyróżnia się (rys. 1) a) substancje newtonowskie o stałej lepkości η, b) ciała idealnie plastyczne Binghama, których pozorna lepkość zmniejsza się z prędkością deformacji $\dot{G}$, lecz mających stałą lepkość plastyczną η_p, c) substancje pseudoplastyczne o lepkości malejącej z $\dot{G}$, d) ciała dilatantne, których lepkość pozorna rośnie z $\dot{G}$. Związek między wielkościami dynamicznymi i kinematycznymi jest dla substancji Newtona następujący:

$$\tau = \eta \dot{G}. \tag{1.1}$$

Ruch ich rozpoczyna się już przy małej wartości τ.

Przepływ ciał idealnie plastycznych opisany jest wzorem Binghama [3]

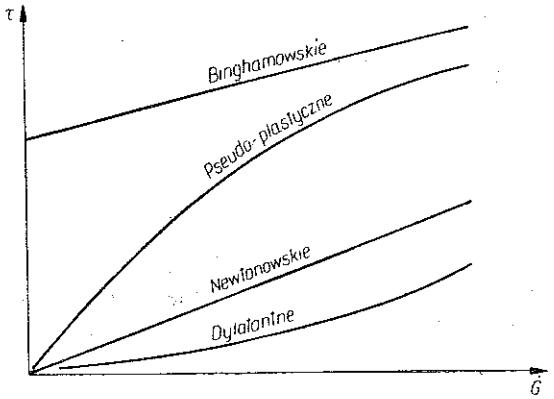
$$\tau = \tau_0 + \eta_p \dot{G}. \tag{1.2}$$

Substancje te scharakteryzowane są przez dwie stałe reologiczne τ_0 i η_p. Dla wprawienia tych ciał w ruch trzeba przekroczyć pewną wartość τ równą τ_0. Dla substancji nienewtonowskich (ciał pseudoplastycznych i wykazujących dylatację) istnieje wzór de Waele'a i Ostwalda [21]:

$$\tau = k\dot{G}^n, \tag{1.3}$$

przy czym $n < 1$ dla ciał pseudoplastycznych, $n > 1$ dla substancji dilatantnych.

Zachowanie się jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych zależy od koncentracji ziarn stałych s' oraz od ich kształtu, wielkości i ciężaru właściwego. Podstawową charakterystyką mieszaniny jest graniczna koncentracja s'_{lim}. Poniżej s'_{lim} mieszanina ma własności ciała newtonowskiego i zachowuje się jak ciecz dwufazowa, o lepkości $\eta \approx \eta_{\text{wody}}$. Własności nienewtonowskie pojawiają się w mieszaninach o wysokiej koncentracji s', większej od s'_{lim}, dzięki wytworzeniu struktury związanej ze zbliżeniem się do siebie cząstek stałych. Opis ruchu wymaga w tym przypadku zastosowania jednego z dwóch modeli: modelu Binghama (1.2) lub też modelu de Waele'a-Ostwalda (1.3) dla $n < 1$.



Rys. 1

1.1. Podstawowym celem pomiarów wiskozymetrycznych dla ciał plastyczno-lepkich jest określenie krzywych płynięcia $\tau = f(\dot{G})$ z dokładnością pozwalającą na ich aproksymację za pomocą modelu reologicznego i na ustalenie współczynników reologicznych. Dla umożliwienia wyboru optymalnego modelu i dokładnego określenia współczynników reologicznych wymagany jest pomiar krzywych płynięcia w ruchu laminarnym w szerokim przedziale τ i $\dot{G}$. Strefa pomiarowa powinna być dobrana w nawiązaniu do reologicznych własności substancji i do wymagań zastosowań praktycznych; powinna ona być co najmniej tak szeroka jak strefa $\tau = f(\dot{G})$ w praktyce. Przy badaniach podstawowych należałoby jednak określić wykres tej krzywej w całym przedziale ruchu laminarnego.

Krzywą płynięcia ustala się za pomocą pomiarów w różnych punktach $\tau = f(\dot{G})$, określając wartości τ dla różnych prędkości deformacji $\dot{G}$ (przypadek

wiskozymetrów rotacyjnych) lub też wartości $\dot{G}$ dla różnych naprężeń ścinających τ (przypadek wiskozymetrów rurowych).

Każdy punkt pomiarowy $\tau = f(\dot{G})$ należy określić w warunkach ruchu ustalonego; oznacza to w zasadzie wykluczenie możliwości pomiarów krzywej ciągłej. Wartościowy wiskozymetr w tych warunkach pozwala na pomiary w różnych punktach krzywej, położonych dostatecznie blisko siebie.

1.2. Równania laminarnego ruchu ciał plastycznolepkich rozwiązano dla następujących trzech przyrządów: a) wiskozymetrów rotacyjnych o cylindrach współśrodkowych typu Couette'a, b) przyrządów kapilarnych i rur, c) wiskozymetrów rotacyjnych typu stożek-płytka.

Spośród tych przyrządów tylko wiskozymetry typu Couette'a i typu stożek-płytka zapewniają quasi-jednorodność pola naprężeń dzięki wąskiej szczelinie wiskozymetrycznej. Pomiar naprężeń ścinających dla różnych prędkości deformacji $\dot{G}$ pozwala na określenie krzywych płynięcia nawet dla ciał tiksotropowych, dających krzywe wklęsłe w kierunku osi τ_{R_1}. Pomiary są dość szybkie przy użyciu przyrządów zaopatrzonych w silniki elektryczne o prędkościach regulowanych podczas doświadczenia.

Wiskozymetry kapilarne dają tylko wartości średnie; pole naprężeń nie jest jednorodne. Mierzy się wartości pseudogradientów prędkości $8v/D$ dla danej wartości $\tau_{\max}$; przyrząd ten nie nadaje się dla ciał mających wklęsłą krzywą płynięcia. Pomiary trwają długo, gdyż dla każdego punktu krzywej płynięcia trzeba ustalić ciśnienie dające żądaną wartość $\tau_{\max}$.

Pomiary wiskozymetryczne z użyciem przewodów rurowych są jeszcze bardziej pracochłonne aniżeli doświadczenia kapilarne i wymagają wielkiej ilości badanej substancji rzędu 0,1 do 10 m^3 w zależności od użytej średnicy rury (dla wiskozymetrów rotacyjnych typu Couette'a potrzeba tylko 20 do 500 cm^3, a dla przyrządów typu stożek-płytka od 2 do 10 cm^3).

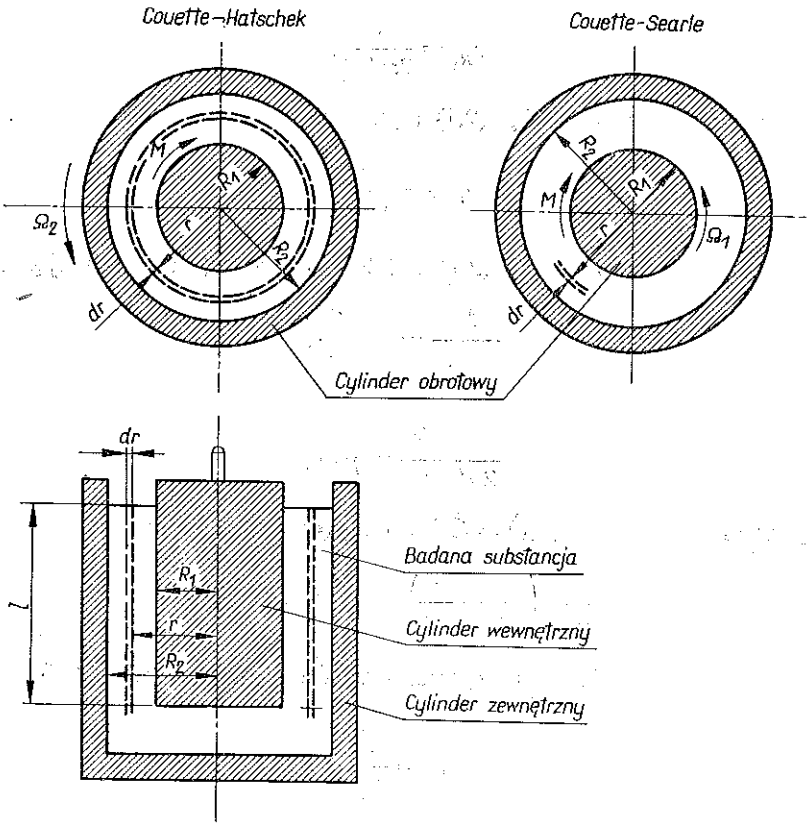
Typ wiskozymetru zależy od badanej substancji, głównie od charakteru cząstek stałych i od stopnia rozwoju własności nienewtonowskich.

Dokładne określenie krzywych płynięcia jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych wymaga przyrządów mających dostatecznie dużą szczelinę. Substancje te zawierają często ziarna piasku o średnicy 50 do 200μ lub nawet jeszcze większe; średnia wielkość ziarn jest rzędu 3 do 100μ. Szerokość szczeliny $R_2 - R_1$ musi być co najmniej 10 do 20 razy większa od cząstek substancji; np. dla gruboziarnistych mieszanin o $d_{50} > 50\mu$, $R_2 - R_1 > 1$ do 2 mm, a dla gruntów o $d_{50} < 50\mu$, $R_2 - R_1 > 0{,}3$ do 1 mm.

Spośród przyrządów rotacyjnych warunek ten spełniają tylko wiskozymetry typu Couette'a o dużych wartościach R_2 i R_1. Wiskozymetry typu stożek-płytka skonstruowano głównie do badań płynnych polimerów i innych substancji złożonych z drobnych cząstek rzędu kilku mikronów. Odległość między stożkiem a płytką jest zbyt mała, aby zapewnić jednorodne pole naprężeń w warunkach obecności dużych ziarn gruntu w badanej próbce.

2. Przypadek płynu Newtona

2.1 Wiskozymetry typu Couette'a. Rozróżnia się tu dwa podstawowe typy przyrządów: przyrządy typu Couette'a-Hatscheka oraz typu Couette'a-Searle'a. W przyrządach pierwszego rodzaju obraca się cylinder zewnętrzny z prędkością kątową Ω_2 ($\Omega_1 = 0$); w przyrządach Couette'a-Searle'a obraca się natomiast cylinder wewnętrzny z prędkością Ω_1 ($\Omega_2 = 0$ i rys. 2).



Rys. 2

Na powierzchni ciekłego cylindra o promieniu r naprężenie ścinające τ_r i prędkość deformacji $\dot{G}$ każdej substancji plastycznolepkiej badanej za pomocą wiskozymetru typu Couette'a są odpowiednio równe:

$$\tau_r = \frac{M}{2\pi l r^2} \tag{2.1}$$

oraz

$$\dot{G} = r\frac{d\dot{\Phi}}{dr}, \tag{2.2}$$

gdzie M oznacza moment, $\dot{\Phi}$ prędkość kątową punktu odległego o r od osi oraz l wysokość zanurzonej części cylindra wewnętrznego. Rozkład naprężeń ścinających

w szczelinie wiskozymetru Couette'a jest więc niezależny od rodzaju substancji; maksymalne naprężenie występuje przy najmniejszym promieniu, tj. $r = R_1$ (na powierzchni wewnętrznego cylindra):

$$\tau_{R_1} = \frac{M}{2\pi l R_1^2}, \tag{2.3}$$

a maksymalne naprężenie dla $r = R_2$ (na powierzchni zewnętrznego cylindra):

$$\tau_{R_2} = \frac{M}{2\pi l R_2^2}. \tag{2.4}$$

Można napisać więc porównując (2.1) i (2.4)

$$\tau_r = \tau_{R_1} \frac{R_1^2}{r^2}. \tag{2.5}$$

Dla ciał Newtona wprowadźmy (2.1) i (2.2) do wzoru (1.1) przyjmując $\tau = \tau_r$.

$$\frac{M}{2\pi l r^2} = \eta r \frac{d\dot{\Phi}}{dr},$$

skąd

$$\frac{M}{2\pi l} \frac{dr}{r^3} = \eta d\dot{\Phi};$$

całkując w granicach od R_1 ($\dot{\Phi} = \Omega_1$) do R_2 ($\dot{\Phi} = \Omega_2$) mamy

$$\frac{M}{4\pi l}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right) = \eta(\Omega_2 - \Omega_1). \tag{2.6}$$

Wprowadzając naprężenie τ_{R_1} na cylindrze wewnętrznym zgodnie z (2.3) i podstawiając

$$\alpha = \frac{R_2^2}{R_1^2} \tag{2.7}$$

otrzymujemy

$$\tau_{R_1} = \frac{2\eta(\Omega_2 - \Omega_1)}{1 - 1/\alpha}. \tag{2.8}$$

Z dwóch cylindrów jeden jest z reguły nieruchomy; dla tego przypadku otrzymujemy ze wzoru (2.8):

a) dla wiskozymetru typu Couette'a-Hatscheka ($\Omega_1 = 0$)

$$\tau_{R_1} = \frac{2\eta\Omega_2}{1 - 1/\alpha};$$

b) dla wiskozymetru Couette'a-Searle'a ($\Omega_2 = 0$)

$$\tau_{R_1} = -\frac{2\eta\Omega_1}{1 - 1/\alpha}. \tag{2.9}$$

Pomijając znak ujemny w (2.9) i indeksy w wyrażeniach Ω_2 i Ω_1, nie mających żadnego wpływu na wyniki pomiarów krzywych płynięcia, otrzymuje się ogólny wzór dla obu wiskozymetrów Couette'a

$$\tau_{R_1} = \frac{2\eta\Omega}{1 - 1/\alpha}, \tag{2.10}$$

gdzie Ω oznacza prędkość kątową obrotowego cylindra.

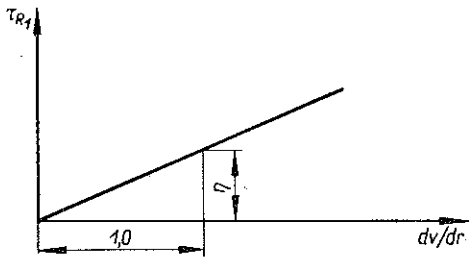
Przyjmijmy, że gradient prędkości w równaniu (2.10) jest równy dv/dr:

$$\tau_{R_1} = \eta \frac{dv}{dr}. \tag{2.11}$$

Jeżeli naniesiemy na osi odciętych

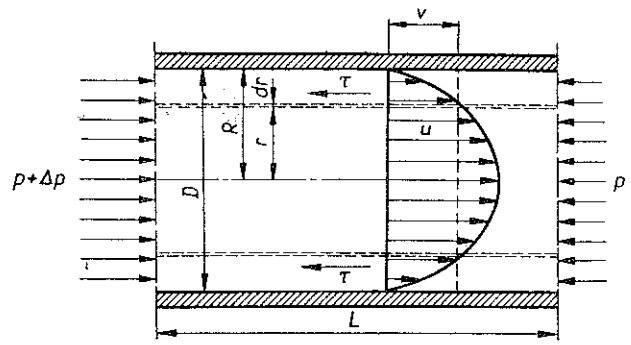
$$\frac{dv}{dr} = \frac{2\Omega}{1 - 1/\alpha} \tag{2.12}$$

i na osi rzędnych τ_{R_1}, to otrzymamy prostą przechodzącą przez początek układu i nachylenie η (rys. 3).



Rys. 3

2.2 Rury (wiskozymetry kapilarne i przewody). Niechaj u oznacza lokalną prędkość przepływu w rurze, v prędkość średnią, p i $p+\Delta p$ ciśnienia w dwóch przekrojach rury, L długość odcinka rury oraz D i R średnicę i promień rury.



Rys. 4

Na powierzchni płynnego cylindra o promieniu r (rys. 4) naprężenie ścinające τ wyniesie zgodnie ze wzorem Newtona (1.1) (gdzie wprowadzimy oznaczenie $\dot{G} = du/dr$)

$$\tau = \eta \frac{du}{dr}. \tag{2.13}$$

Równowaga sił podczas laminarnego przepływu dowolnej cieczy plastyczno-lepkiej w rurze daje

$$\pi r^2 \Delta p = 2\pi r L \tau,$$

skąd

$$\tau = \frac{r\Delta p}{2L}. \tag{2.14}$$

Naprężenie maksymalne występuje więc na ścianie rury dla $r = R = D/2$ i wynosi

$$\tau_{\max} = \frac{R\Delta p}{2L} = \frac{D\Delta p}{4L}. \tag{2.15}$$

Wprowadzając (2.14) do (2.13) dochodzi się do wyrażenia na du/dr:

$$\frac{du}{dr} = \frac{\Delta p r}{2L\eta}.$$

Po scałkowaniu mamy

$$u = \frac{\Delta p r^2}{4L\eta} + C. \tag{2.16}$$

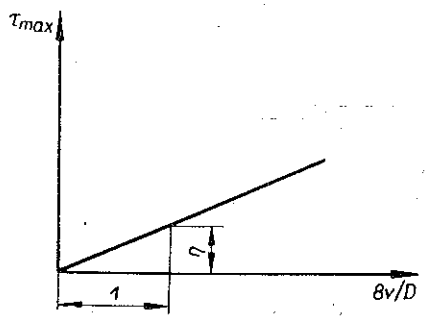
Wartość stałej całkowania C otrzymujemy przyjmując warunek graniczny braku poślizgu substancji na ścianie, tj. $u = 0$ dla $r = R$:

$$C = -\frac{\Delta p R^2}{4L\eta}.$$

Uwzględniając (2.16) otrzymujemy stąd

$$-u = \frac{\Delta p}{4L\eta}(R^2 - r^2).$$

Pamiętając o parabolicznym rozkładzie prędkości (rys. 4) dochodzimy do wzoru Poiseuille'a na wydatek Q:



Rys. 5

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8L\eta},$$

skąd otrzymujemy prędkość średnią

$$v = \frac{\Delta p R^2}{8L\eta}.$$

Wprowadzając $D = 2R$ mamy

$$\frac{8\eta v}{D} = \frac{\Delta p D}{4L}.$$

Prawa strona tego równania jest równa $\tau_{\max}$, [por. (2.15)] można więc napisać

$$\frac{8\eta v}{D} = \tau_{\max}. \tag{2.17}$$

Tak więc η może być łatwo określone na podstawie wykresu $\tau_{\max} = f(8v/D)$ (rys. 5).

Zajmiemy się określeniem przedziału liniowych pomiarów w rurze.

Większość wiskozymetrów rurowych umożliwia określenie parametrów przepływu we wszystkich strefach ruchu: laminarnej, przejściowej i turbulentnej. Przedział liniowych pomiarów zależy więc w pierwszym rzędzie od granicy między reżimem laminarnym a turbulentnym. Laminarny przepływ substancji Newtona w rurze jest scharakteryzowany przez liczbę Reynoldsa

$$\mathrm{Re} = \frac{\varrho v D}{\eta}, \tag{2.18}$$

gdzie ϱ oznacza gęstość płynu. Według wielu badań wartość graniczna Re odpowiadająca przejściu z ruchu laminarnego do turbulentnego równa jest 2300. Dla tej wartości Re otrzymujemy z (2.18) graniczną wartość $v_{\mathrm{lim}} = 2300\eta/\varrho D$; zgodnie z (2.17) górne wartości graniczne $\tau_{\max}$ i $8v/D$ będą równe

$$\tau_{\max_{\mathrm{sup}}} = \frac{18400\eta^2}{\varrho D^2}, \qquad \left(\frac{8v}{D}\right)_{\mathrm{sup}} = \frac{18400\eta}{\varrho D^2}. \tag{2.19}$$

Dolne wartości liniowych $\tau_{\max}$ i $8v/D$ są równe zeru dla $v = 0$. Równania (2.19) pozwalają więc na bezpośrednie obliczenie charakterystyk strefy liniowych pomiarów

$$\Delta\tau_{\max_{\mathrm{lin}}} = \tau_{\max_{\mathrm{sup}}} - \tau_{\max_{\mathrm{inf}}}, \qquad \Delta\left(\frac{8v}{D}\right)_{\mathrm{lin}} = \left(\frac{8v}{D}\right)_{\mathrm{sup}} - \left(\frac{8v}{D}\right)_{\mathrm{inf}}.$$

3. Przypadek ciała Binghama

3.1 Wiskozymetry typu Couette'a. Uwzględniając (1.2) i (2.1) dochodzi się do wzoru ważnego dla obu rodzajów wiskozymetrów Couette'a:

$$\frac{M}{2\pi l r^2} = \tau_0 + \eta_p \frac{r d\dot{\Phi}}{dr}. \tag{3.1}$$

Rozkład naprężeń ścinających τ_r jest jednakowy dla obu rodzajów wiskozymetrów (Couette'a-Hatscheka i Couette'a-Searle'a) oraz identyczny z rozkładem tych naprężeń dla ciała Newtona. Wartości τ_r, τ_{R_1}, τ_{R_2} określa się na podstawie wzorów (2.1), (2.3), (2.4) i (2.5). Odmienny jest natomiast rozkład prędkości obrotowych.

Przyrząd Couette'a-Searle'a. Teorię płynięcia ciała Binghama dla tego przypadku podali REINER i RIWLIN [28]. Całkowanie równania (3.1) daje

$$\eta_p \dot{\Phi} = -\frac{M}{4\pi l r^2} - \tau_0 \ln r + C. \tag{3.2}$$

Kinematyczny warunek brzegowy, jakim jest założenie braku poślizgu na ścianie wewnętrznego nieruchomego cylindra, pozwala na określenie stałej całkowania C; dla tego przypadku ($r = R_1$, $\dot{\Phi} = \Omega_1 = 0$)

$$C = \frac{M}{4\pi l R_2} + \tau_0 \ln R_1,$$

skąd

$$\eta_p \dot{\Phi} = \frac{M}{4\pi l}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2}\right) - \tau_0 \ln \frac{r}{R_1}$$

lub też

$$2\eta_0 \dot{\Phi} = \tau_{R_1}\left(1 - \frac{R_1^2}{r_2}\right) - \tau_0 \ln \frac{r^2}{R_1^2}. \tag{3.3}$$

Jeżeli $\tau_{R_2} < \tau_0 < \tau_{R_1}$, to substancja nie jest ścinana całkowicie w szczelinie wiskozymetru. Płynie ona wyłącznie w części cylindra wyznaczonej przez $r = R_1$ i $r = r_0$. W obszarze określonym przez r_0 i R_2, tj. przy zewnętrznym cylindrze, tworzy się warstwa zachowująca się jak ciało stałe, przemieszczające się jak nieodkształcony blok wraz z tym cylindrem. Na ścianie wewnętrznej tej warstwy $\tau_{r_0} = \tau_0$.

Dla przypadku niepełnego ścinania otrzymujemy więc wprowadzając do (3.3) $r = r_0$ i $\dot{\Phi} = \Omega_2$

$$2\eta_p \Omega_2 = \tau_{R_1}\left(1 - \frac{R_1^2}{r_0^2}\right) - \tau_0 \ln \frac{r_0^2}{R_1^2}. \tag{3.4}$$

Dla zapewnienia pełnego upłynnienia substancji w szczelinie trzeba wypełnić warunek $\tau_{R_2} > \tau_0$, który zgodnie z (2.5) można zapisać w sposób następujący:

$$\tau_{R_1} \geqslant \tau_0 \frac{R_2^2}{R_1^2}. \tag{3.5}$$

Dla tego przypadku ($\dot{\Phi} = \Omega_2$) równanie (3.3) przybiera kształt

$$2\eta_p \Omega_2 = \tau_{R_1}\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) - \tau_0 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \tag{3.6}$$

znany pod nazwą równania Reinera-Riwlina. Rozkład prędkości obrotowych i naprężeń ścinających dla tego przypadku pokazano na rys. 6a.

Przyrząd Couette'a-Searle'a. Tu obraca się cylinder wewnętrzny; maksymalna prędkość obrotowa występuje dla $r = R_1$ i spada do zera dla $r = r_0$ w przypadku niepełnego ścinania lub też do $r = R_2$ przy pełnym ścinaniu. Przy częściowym ścinaniu substancja płynie tylko w przestrzeni między r_0 i R_1 i pozostaje nieruchoma poza tą strefą (rys. 6b).

Warunek braku poślizgu na powierzchni granicznej, między strefą ścinaną i nieruchomą, znajdującej się przy częściowym ścinaniu w odległości od osi $r = r_0$, a przy pełnym ścinaniu $r = R_2$, daje nam następującą wartość C:

$$C = \frac{M}{4\pi l r_0^2} + \tau_0 \ln r_0. \tag{3.7}$$

Po wprowadzeniu (3.7) do (3.2) znajdziemy

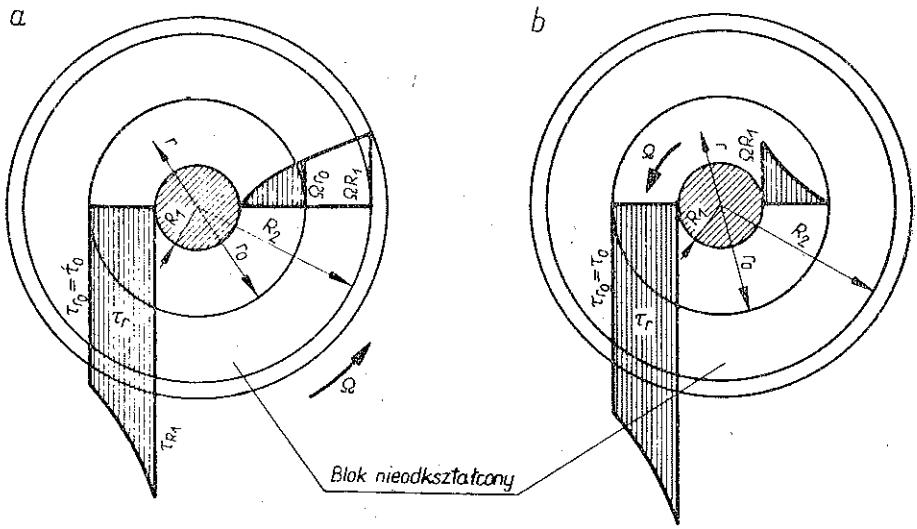
$$\eta_p \dot{\Phi} = -\left[\frac{M}{4\pi l}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) - \tau_0 \ln \frac{r_0}{r}\right]. \tag{3.8}$$

Dla $r = R_1$ mamy $\dot{\Phi} = \Omega_1$. Dla przypadku częściowego ścinania otrzymuje się z (3.8) po wprowadzeniu τ_{R_1} z (2.3):

$$2\eta_p \Omega_1 = -\left[\tau_{R_1}\left(1 - \frac{R_2^2}{r_0^2}\right) - \tau_0 \ln \frac{r_0^2}{R_1^2}\right] \tag{3.9}$$

i dla przypadku pełnego upłynnienia substancji zastępując r_0 przez R_2

$$2\eta_p \Omega_1 = -\left[\tau_{R_1}\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) - \tau_0 \ln \frac{R_1^2}{R_2^2}\right]. \tag{3.10}$$



Rys. 6

Wnioski z analizy teoretycznej obu rodzajów wiskozymetrów Couette'a. Porównując równania dotyczące ścinania częściowego (3.4) i (3.9) i ścinania pełnego (3.6) i (3.10) zauważamy, że jedyną istotną różnicą jest ujemny znak po prawej stronie równań ustalonych dla przyrządów typu Couette'a-Searle'a. Przy określaniu stałych reologicznych za pomocą reogramów znak ten można pominąć; przyjmując równocześnie prędkość kątową obrotowego cylindra równą Ω ($\Omega = \Omega_1$ lub $\Omega = \Omega_2$) otrzymamy wzory dla obu wiskozymetrów Couette'a:

a) dla częściowego ścinania ($\tau < \tau_0 R_2^2/R_1^2$)

$$2\eta_p \Omega = \tau_{R_1}\left(1 - \frac{R_1^2}{r_0^2}\right) - \tau_0 \ln \frac{r_0^2}{R_1^2};$$

b) dla pełnego ścinania ($\tau \geqslant \tau_0 R_2^2/R_1^2$)

$$2\eta_p \Omega = \tau_{R_1}\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) - \tau_0 \ln \frac{R_2^2}{R_1^2} \tag{3.11}$$

lub po wprowadzeniu $\alpha = R_2^2/R_1^2$

$$\tau_{R_1} = \frac{2\Omega\eta_p + \tau_0 \ln \alpha}{1 - 1/\alpha} \geqslant \tau_0 \alpha . \tag{3.12}$$

Wzór (3.12) stosowany jest jako podstawowe kryterium w czasie badań reologicznego zachowania ciał Binghama za pomocą wiskozymetru Couette'a, w liniowej strefie pomiarów τ_{R_1} i dv/dr.

Prędkość deformacji $(dv/dr)_B$ dla substancji idealnie plastycznych jest odmienna od prędkości deformacji dla ciał newtonowskich dv/dr. Dla $r = R_1$ i $(dv/dr)_B = rd\dot{\Phi}/dr$ wzór (3.1) można napisać następująco:

$$\tau_{R_1} = \tau_0 + \eta_p \left(\frac{dv}{dr}\right)_B . \tag{3.13}$$

Porównując prawe strony równań (3.12) i (3.13) dochodzi się do wzoru

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_B = \frac{2\Omega}{1 - 1/\alpha} + \frac{\tau_0}{\eta_p}\left(\frac{\ln \alpha}{1 - 1/\alpha} - 1\right)$$

dla $\tau_{R_1} \geqslant \tau_0 \alpha$.

Ale [por. równania (3.10) i (3.11)]

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2\Omega}{1 - 1/\alpha};$$

otrzymamy więc

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_B = \frac{dv}{dr} + \frac{\tau_0}{\eta_p}\left(\frac{\ln \alpha}{1 - 1/\alpha} - 1\right). \tag{3.14}$$

Przyjmijmy

$$\frac{1 - 1/\alpha}{\ln \alpha} = k_f . \tag{3.15}$$

Ostatecznie otrzymujemy więc, przepisując (3.12) i (3.14)

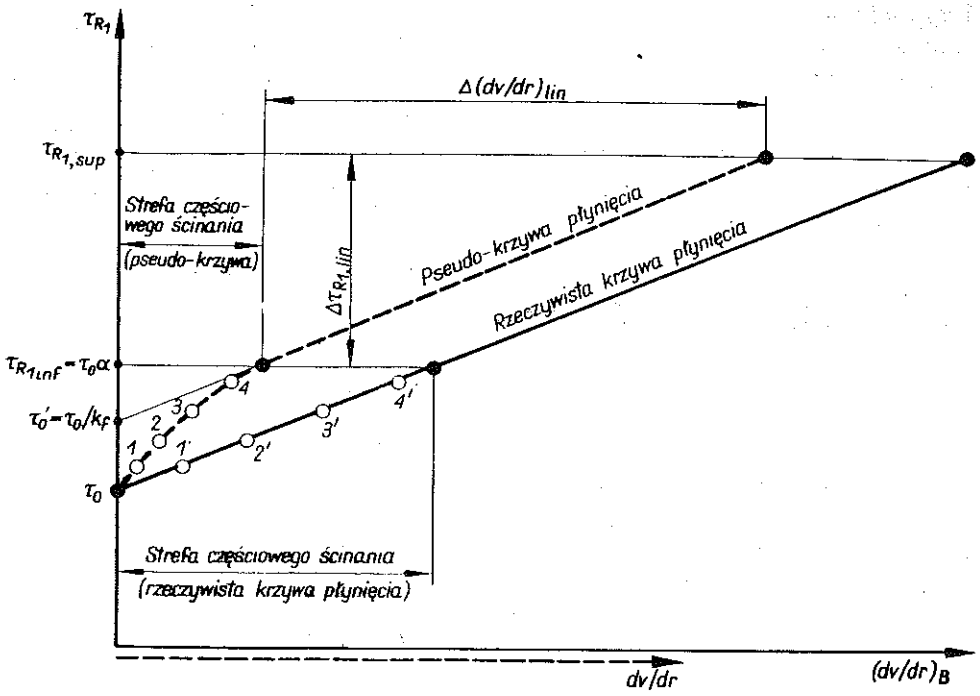
$$\tau_{R_1} = \frac{dv}{dr}\eta_p + \frac{\tau_0}{k_f}, \qquad \left(\frac{dv}{dr}\right)_B = \frac{dv}{dr} + \frac{\tau_0}{\eta_p}\left(\frac{1}{k_f} - 1\right). \tag{3.16}$$

Bezpośrednie określanie τ_0 i η_p z wykresu $\tau_{R_1} = f(dv/dr)_B$ zgodnie ze wzorami (2.3) dla τ_{R_1} i $(3.16)_2$ dla $(dv/dr)_B$ nie jest wygodne, ponieważ wartości τ_0 i η_p nie są jeszcze znane. Zastosujmy tu wykresy $\tau_{R_1} = f(dv/dr)$. Dla substancji Binghama otrzymamy prostą, która nie przechodzi przez początek układu: nachylenie jej jest równe η_p, a rzędna τ_0/k_f, ponieważ dla $dv/dr = 0$ otrzymujemy ze wzoru $(3.16)_1$

$$\tau_{R_{1_0}} = \frac{\tau_0}{k_f}. \tag{3.17}$$

Z tego powodu krzywą tą nazywamy pseudokrzywą płynięcia a wykres pseudoreogramem, ponieważ odcięte mają sens fizyczny wyłącznie wtedy, gdy płyn jest

newtonowski. Naniesiona na odciętych wielkość dv/dr jest pozorną prędkością deformacji.



Rys. 7

Krzywa ta pozwala niemniej na szybkie i dokładne określenie η_p i τ_0 (rys. 7). Zgodnie z (3.17) τ_0 otrzymamy z korekcji pozornego progu płynięcia $\tau_{R_{1_0}} = \tau_0'$:

$$\tau_0 = \tau_0' k_f,$$

przy tym k_f zależy jedynie od α [równanie (3.15)] i jest stałe dla danego systemu pomiarowego. Wielkość η_p określa się z nachylenia prostego odcinka pseudokrzywej płynięcia

$$\eta_p = \frac{\Delta\tau_{R_1}}{\Delta\dfrac{dv}{dr}}.$$

Dobór wiskozymetrów typu Couette'a dla ciał Binghama. Wymagania dokładnych pomiarów (por. p. 1) narzucają konieczność określenia pseudokrzywej płynięcia ciał idealnie plastycznych w szerokim przedziale liniowych wartości τ_{R_1} i dv/dr.

Skończona wielkość szczeliny ogranicza liniowość pseudokrzywej płynięcia; poniżej pewnych wartości granicznych τ_{R_1} i dv/dr krzywa ta nachyla się w kierunku początku układu. Dla wielkich szczelin i ciał o znacznie rozwiniętych własnościach nienewtonowskich niektóre wiskozymetry dają wyłącznie nachyloną część pseudokrzywych płynięcia, odpowiadających strefie częściowego ścinania.

Z drugiej strony przedział liniowych pomiarów pseudokrzywej jest ograniczony od góry przez sam przyrząd, który ma określone wartości maksymalne dv/dr i τ_{R_1}, odpowiadające maksymalnej prędkości kątowej $\Omega_{\max}$, czy też maksymalnej wartości pomiarowej M. Problem polega więc na takim prowadzeniu badań, aby duża część pseudokrzywej płynięcia położona była w liniowym przedziale dv/dr.

Określenie przedziału liniowych pomiarów. Liniowa część pseudokrzywej płynięcia jest ograniczona z jednej strony przez dwie wartości dolne $\tau_{R_1,\inf}$ i $(dv/dr)_{\inf}$ a z drugiej strony przez wartości górne $\tau_{R_1,\sup}$ i $(dv/dr)_{\sup}$. Wartość $\tau_{R_1,\inf}$ jest dana zgodnie z (3.5) przez

$$\tau_{R_1,\inf} = \tau_0 \alpha . \tag{3.17.1}$$

Granicę $(dv/dr)_{\inf}$ otrzymuje się z (3.11) po wprowadzeniu warunku (3.17) i $\alpha = R_2^2/R_1^2$:

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\inf} = \frac{\tau_0 (\alpha - 1 - \ln \alpha)}{1 - 1/\alpha}. \tag{3.18}$$

Górne wartości graniczne zależą od maksymalnej prędkości kątowej $\Omega_{\max}$ danego przyrządu (zakładając, że są one niższe od wartości korespondujących z przejściem z ruchu laminarnego do turbulentnego). $\tau_{R_1,\sup}$ dane jest ze wzoru (3.12), gdzie $\Omega = \Omega_{\max}$:

$$\tau_{R_1,\sup} = \frac{2\Omega_{\max}\eta_p + \tau_0 \ln \alpha}{1 - 1/\alpha}. \tag{3.19}$$

Natomiast $(dv/dr)_{\sup}$ równe jest zgodnie z (2.10) i (2.11)

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\sup} = \frac{2\Omega_{\max}}{1 - 1/\alpha}. \tag{3.20}$$

Strefę liniowych pomiarów τ_{R_1} i dv/dr określić można wychodząc odpowiednio ze wzorów (3.17) i (3.19) oraz (3.18) i (3.20). Otrzymujemy

$$\Delta\tau_{R_1,\mathrm{lin}} = \tau_{R_1,\sup} - \tau_{R_1,\inf} = \eta_p \left[\frac{2\Omega_{\max} - \frac{\tau_0}{\eta_p}(\alpha - 1 - \ln \alpha)}{1 - 1/\alpha}\right],$$

$$\Delta\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\mathrm{lin}} = \left(\frac{dv}{dr}\right)_{\sup} - \left(\frac{dv}{dr}\right)_{\inf} = \frac{2\Omega_{\max} - \frac{\tau_0}{\eta_p}(\alpha - 1 - \ln \alpha)}{1 - 1/\alpha}. \tag{3.21}$$

Porównując $(3.21)_1$ i $(3.21)_2$ można napisać

$$\Delta\tau_{R_1,\mathrm{lin}} = \eta_p \Delta\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\mathrm{lin}}. \tag{3.22}$$

Zgodnie z $(3.21)_2$ liniowy przedział dv/dr zależy z jednej strony od podstawowych charakterystyk przyrządu Couette'a, $\Omega_{\max}$ i α oraz z drugiej strony od charakterystyki substancji plastycznej τ_0/η_p. Znajomość rzędu wielkości τ_0/η_p pozwala na

określenie rzędu wielkości $\Delta\,(dv/dr)_{\text{lin}}$ dla danego wiskozymetru. Autor stwierdził, że wielkość tę można przewidzieć (jako funkcję koncentracji s') dla większości ciał binghamowskich. Dla ułatwienia doboru τ_0/η_p autor zebrał w tablicy 1 wartości τ_0/η_p obliczone na podstawie badań obcych i własnych. Zgodnie z tą tablicą wartości τ_0/η_p położone są z reguły w przedziale od 10^2 do 10^3 s^{-1}.

Analiza produkowanych seryjnie wiskozymetrów rotacyjnych. Dla oceny możliwości prowadzenia prawidłowych pomiarów własności substancji binghamowskich przeprowadziliśmy na podstawie tablicy 1 oraz wzorów (3.12) szczegółową analizę kilku wiskozymetrów typu Couette'a. Wyniki podane są w tablicy 2.

Zastosowane przez JAKOWLEWA i ŁASKOWA [16] wiskozymetry PW-4 i Instorf znajdują się poza liniową strefą pomiarów i to dla wszystkich ciał plastycznych mających $\tau_0/\eta_p > 10^2\,s^{-1}$. Tłumaczy to jasno przyczyny błędnych pomiarów i różnic między stałymi reologicznymi pomierzonymi przez tych autorów za pomocą wiskozymetrów typu Couette'a i przewodów rurowych.

Sposób graficznego określenia $\Delta\,(dv/dr)_{\text{lin}}$ i $\Delta\tau_{R_1,\text{lin}}$. Wychodząc ze wzoru $(3.21)_2$ skonstruowaliśmy wykres (rys. 8)

$$\Delta\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\text{lin}} = f\left(\alpha, \frac{\tau_0}{\eta_p}, W_{\max}\right).$$

Nanieśliśmy tam krzywe dla trzech różnych wartości τ_0/η_p równych 10, 10^2, 10^3 s^{-1} oraz dwóch wartości maksymalnej prędkości obrotowej $W_{\max}$ równych 10^2 i 10^3 obr/min. Wykres ten uwidocznia brak liniowego przedziału pomiarów dla substancji o dużym stopniu rozwoju własności nienewtonowskich, dla których $\tau_0/\eta_p = 10^3$ s^{-1} w wiskozymetrach charakteryzujących się wysokimi wartościami α. Rys. 8 pozwala więc na wstępną charakterystykę wiskozymetru.

Dla dokładniejszego określenia przedziału liniowych pomiarów wskazane jest korzystanie z wykresów opartych na wielkościach bezwymiarowych. Dla $\Delta\tau_{R_1,\text{lin}}$ otrzymamy z $(3.21)_1$ wielkość

$$\frac{\Delta\tau_{R_1,\text{lin}}}{\tau_0} = \frac{\Omega_{\max}\eta_p}{\tau_0}\,\frac{2}{1-1/\alpha} - \frac{\alpha - 1 - \ln\alpha}{1-1/\alpha}, \tag{3.23}$$

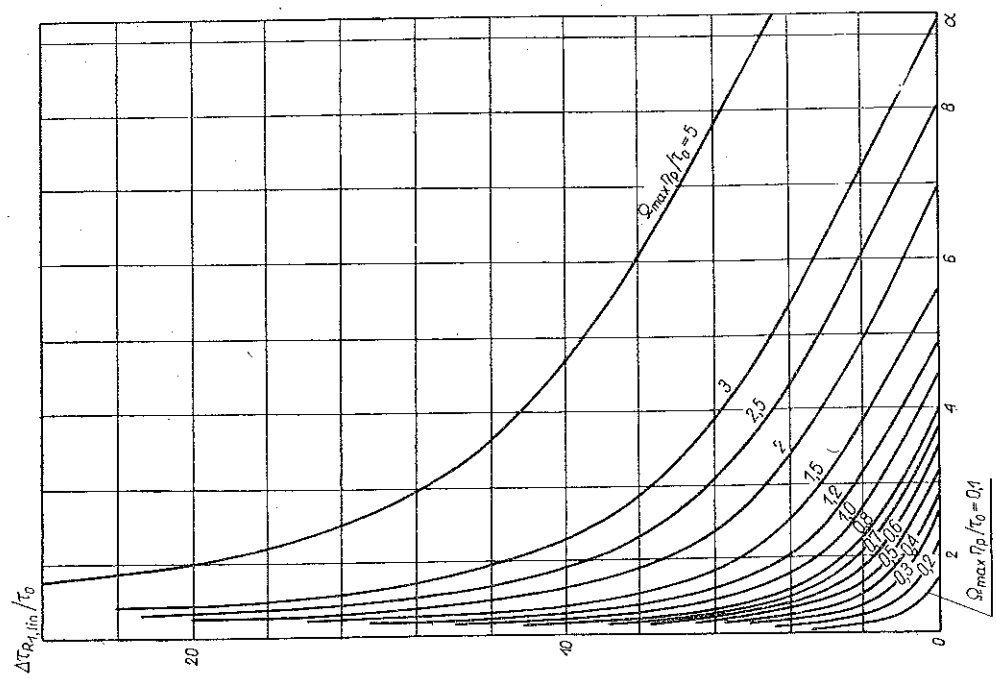
którą można również przedstawić następująco:

$$\frac{\Delta\tau_{R_1,\text{lin}}}{\tau_0} = f\left(\frac{\Omega_{\max}\eta_p}{\tau_0}, \alpha\right). \tag{3.24}$$

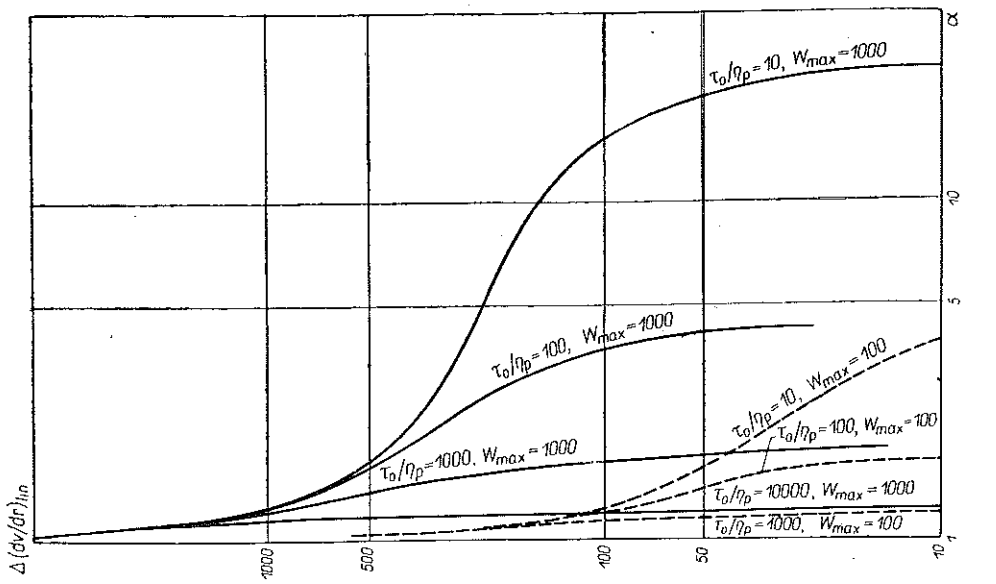
Na podstawie wzorów (3.23) i (3.24) opracowaliśmy wykres (rys. 9) nanosząc krzywe dla wartości $\Omega_{\max}\eta_p/\tau_0$ od 0,1 do 5,0 dla α w przedziale [1, 10] dla $\Delta\tau_{R_1,\text{lin}}/\tau_0$ w przedziale [0, 20].

Zauważmy jednak, że na podstawie (3.22) możemy napisać

$$\Delta\left(\frac{dv}{dr}\right)_{\text{lin}} = \frac{\Delta\tau_{R_1,\text{lin}}}{\tau_0}\,\frac{\tau_0}{\eta_p}. \tag{3.25}$$


$\Delta\tau_{R_1,lin}/\tau_0$
20
10
0
α
8
6
4
2
$\varrho_{max}\eta_p/\tau_0 = 5$
3
2,5
2
1,5
1,2
1,0
0,8
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
$\varrho_{max}\eta_p/\tau_0 = 0,1$

Rys. 9


$\Delta(dv/dr)_{lin}$
1000
500
100
50
10
1
α
10
5
1
$\tau_0/\eta_p = 10,\ W_{max} = 1000$
$\tau_0/\eta_p = 100,\ W_{max} = 1000$
$\tau_0/\eta_p = 1000,\ W_{max} = 1000$
$\tau_0/\eta_p = 10,\ W_{max} = 100$
$\tau_0/\eta_p = 100,\ W_{max} = 100$
$\tau_0/\eta_p = 10000,\ W_{max} = 1000$
$\tau_0/\eta_p = 1000,\ W_{max} = 100$

Rys. 8

Tablica 1. Wartości τ_0/η_p dla różnych ciał binghamowskich

Nr	Substancja	Koncentracja wagowa s′	τ_0/η_p w s^{-1}		Źródło
			Wiskozymetry rotacyjne	Rury	
1	Glina żółta Illin.	0,34—0,52	87,6—815		[2]
2	Glina Tenessee	0,15—0,25	172—900		[2]
3	Glina Kudinow	(0,27—0,30)*		706—1160	[11]
4	Glina Askangel	(0,029—0,032)*	1845—3980	750—1400	[11]
5	Il Serre-Ponçon	0,25—0,396	171—819		autor
6	Il norweski	0,51—0,654	153—441		autor
7	Osad kanalizacyjny	0,073—0,14		49—473	[2]
8	Osad kanalizacyjny	(0,03—0,01)*		39—484	[16]
9	Namuł po przejściu powodzi	(0,34—0,62)*	167—667		[23/
10	Namuł Milicz	0,097—0,231	124—619		autor
11	Namuł Gosławice	0,249—0,395	208—634		autor
12	Grunt gliniasty	0,521—0,624	297—540		autor
13	Namuł morski Brila	0,312—0,402	800—1323		autor
14	Namuł morski Le Havre Avant-port	0,359—0,498	470—991		autor
15	Zawiesina ThO_2	0,45—0,58		253—2820	[30]
16	Zawiesina ThO_2-II	0,3—0,58		396—6650	[30]
17	Surowe ciasto cementowe	0,543	554		[15]
18	Kaolin	0,18—0,47		655—3950	[30]
19	Bentonit (ciasto)	0,446	2520		[2]

*) Wartość obliczona przez autora na podstawie danych niekompletnych.

Tablica 2. Wyniki analizy przedziału liniowych pomiarów dla produkowanych seryjnie wiskozymetrów Couette'a

Rodzaj wiskozymetru	Charakterystyki przyrządu				Wyniki analizy		
	Liczba obrotów obr/min		α		Maksymalne dopuszczalne wartości dla zakresu τ_0/η_p równego		Zestawy pomiarowe nie nadające się dla ciał Binghama
	min	max	min	max	10^2—10^3 s^{-1}	10^3—10^4 s^{-1}	
Rotovisco	0,03	486	1,10	1,91	wszystkie	1,33	—
Fann	3	600	1,145	1,145	wszystkie		—
Epprecht	5,595	352	1,12	14,1	2,16	1,38	zestawy: D; E_a do E_c
PW-4		100	1,9	10,95	żadna		wszystkie
Instorf		100	1,82	1,82	żadna		wszystkie

W (3.24) i (3.25) występuje wielkość τ_0/η_p, którą można określić w przybliżeniu na podstawie tablicy 1, jak również znane charakterystyki danego wiskozymetru $\Omega_{\max}$ i a. Proponujemy następujący sposób określenia $\Delta\,(dv/dr)_{\text{lin}}$: a) przyjąć τ_0/η_p z tablicy 1; b) obliczyć $\Omega_{\max}\,\eta_p/\tau_0$ i określić $\Delta\tau_{R_1,\,\text{lin}}/\tau_0$ z rys. 9; c) obliczyć $\Delta\,(dv/dr)_{\text{lin}}$ ze wzoru (3.25).

3.2. Rury. Dla przepływu substancji idealnie plastycznej w rurach, mamy $\dot{G} = du/dr$; równanie (1.2) przekształci się więc następująco:

$$\tau = \tau_0 + \eta_p \frac{du}{dr}.$$

Wprowadzając wartość τ zgodnie z (2.14) (jednakową w ruchu laminarnym dla wszystkich substancji plastycznolepkich) mamy

$$\frac{r\Delta p}{2L} - \tau_0 = \eta_p \frac{du}{dr}.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\eta_p u = \frac{\Delta p r^2}{4L} - \tau_0 r + C. \tag{3.26}$$

Przyjmując warunek graniczny braku poślizgu na ścianie ($u = 0$ dla $r = R$) dochodzi się do wartości na C:

$$C = -\frac{\Delta p}{4L} R^2 - \tau_0 R,$$

co wraz z (3.26) daje

$$-\eta_p u = \frac{\Delta p}{4L}(R^2 - r^2) - \tau_0 (R - r);$$

na wartość u znajdziemy

$$-u = \frac{1}{\eta_p}\left[\frac{\Delta p}{4L}(R^2 - r^2) - \tau_0 (R - r)\right]. \tag{3.27}$$

Zgodnie z (3.27) wokół środka rury występuje rdzeń o promieniu r_0 przemieszczający się jak ciało stałe, ponieważ dla $r < r_0$, $\tau < \tau_0$ (rys. 10) r_0 otrzymuje się z (2.14) po wprowadzeniu $\tau = \tau_0$ i $r = r_0$:

$$r_0 = \tau_0 \frac{2L}{\Delta p}. \tag{3.28}$$

Dla $r = r_0$, $du/dr = 0$. Dla otrzymania prędkości rdzenia u_0 wprowadźmy do (3.27) wartość τ_0 z (3.18) i przyjmijmy $r = r_0$; pomijając znak ujemny otrzymamy

$$u_0 = \frac{\Delta p}{4L\eta_p}(R - r_0)^2.$$

Pamiętając o rozkładzie prędkości mamy

$$Q = \int_{r_0}^{R} \left(\frac{r^3 \Delta p}{2L} - r^2 \tau_0 \right) dr.$$

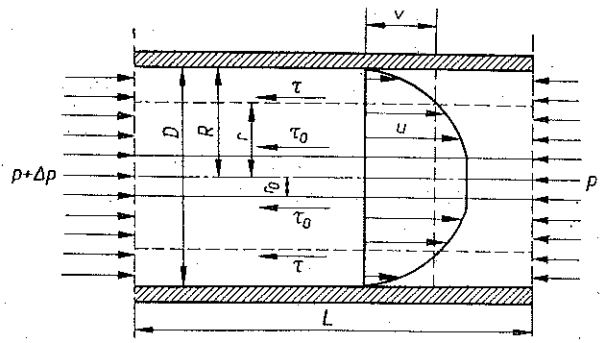
Wprowadzając dla r_0 jego wartość ze wzoru (3.28) otrzymujemy po scałkowaniu wzór

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8 L \eta_p} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{2\tau_0 L}{R \Delta p} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2\tau_0 L}{R \Delta p} \right)^4 \right], \tag{3.29}$$

znany jako wzór Buckinghama i Reinera [27].

Średnia prędkość $v = Q/\pi R^2$; dla rozpatrywanego przypadku mamy z przekształcenia wzoru (3.29)

$$v = \frac{R^2 \Delta p}{8 L \eta_p} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{2\tau_0 L}{R \Delta p} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{2\tau_0 L}{R \Delta p} \right)^4 \right].$$



Rys. 10

Dla potrzeb pomiarów przyjmijmy $D = 2R$ i przepiszmy wzór na v w postaci

$$v = \frac{D}{8\eta_p} \left[\frac{\Delta p D}{4L} - \frac{4}{3} \tau_0 + \frac{1}{3} \frac{\tau_0^4}{\left(\frac{\Delta p D}{4L} \right)^3} \right]. \tag{3.30}$$

Zgodnie z analizami REINERA [26] i FILATOWA [11] można pominąć ostatni wyraz wzoru (3.30), jeżeli $\tau_0/\tau_{\max} < 0{,}5$, tzn. dla większości przypadków występujących w praktyce.

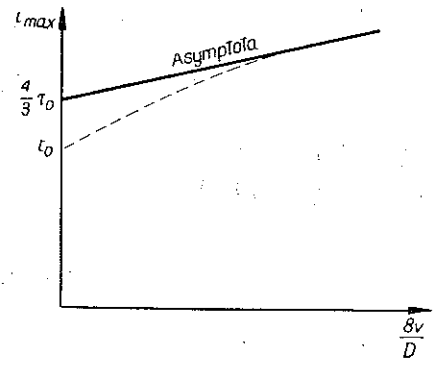
Po tym uproszczeniu wzór (3.30) przyjmuje postać

$$v = \frac{D}{8\eta_p} \left(\frac{\Delta p D}{4L} - \frac{4}{3} \tau_0 \right). \tag{3.31}$$

Zastępując $\Delta pD/4L$ przez $\tau_{\max}$ (równanie (2.15)) otrzymamy

$$\tau_{\max} = \eta_p \frac{8v}{D} + \frac{4}{3} \tau_0. \tag{3.32}$$

Pozwoli to nam na opracowanie pseudoreogramów $\tau_{max} = f(8v/D)$ (rys. 11). Wielkość η_p otrzymamy bezpośrednio z nachylenia stycznej do krzywej:



Rys. 11

$$\eta_p = \frac{\Delta \tau_{max}}{\Delta \frac{8v}{D}}.$$

Wartość τ_0 otrzymuje się z korekcji wartości pozornego progu płynięcia τ_{max}; dla $v = 0$ wzór (3.32) daje

$$\tau_0 = \frac{3}{4}\tau_{max_0}.$$

Określenie przedziału liniowych pomiarów. W przeciwieństwie do wiskozymetrów rotacyjnych (mała wielkość szczeliny narzucająca z reguły laminarny reżim ruchu) występują tutaj najczęściej wszystkie podstawowe formy ruchu, tj. laminarny, przejściowy i turbulentny. Skończony i odpowiednio duży wymiar rur powoduje odpowiednio szybkie pojawienie się turbulencji i zmniejsza wyraźnie wielkość przedziału liniowych pomiarów; przedział ten ograniczony jest tutaj w pierwszym rzędzie przez punkt przejścia z ruchu laminarnego do turbulentnego. Dla zapewnienia odpowiednio szerokiej strefy liniowych $8v/D$ trzeba przyjąć przewody o małej średnicy lub też wiskozymetry kapilarne.

Górne granice przedziału liniowych pomiarów $\tau_{max_{sup}}$ i $(8v/D)_{sup}$ są funkcjami uogólnionej liczby Reynoldsa Re_{gen}. Dla przypadku ruchu ciała Binghama w rurze przyjmijmy $Re_{gen} = Re^*$, przyjmując uproszczone równanie Buckinghama-Reinera (3.31). Dla tego przypadku (por. [11])

$$Re^* = \frac{\varrho v D}{\eta_p + \frac{\tau_0 D}{6v}}.$$

Według szeregu prac [11, 16 i 17] graniczna wartość Re^*_{lim} waha się od 2200 do 2400; przyjmijmy średnio $Re^*_{lim} = 2300$. Dla tej wartości Re^*_{lim} dochodzi się do następującego wzoru na graniczną prędkość średnią:

$$v_{lim} = \frac{1150}{\varrho}\left(\frac{\eta_p}{D} \pm \sqrt{\frac{\eta_p^2}{D^2} + \frac{\varrho \tau_0}{3450}}\right). \tag{3.33}$$

Górne granice przedziału liniowych pomiarów będą teraz równe zgodnie z (3.33) i (3.32):

$$\tau_{max_{sup}} = \frac{9200\eta_p}{\varrho D}\left(\frac{\eta_p}{D} \pm \sqrt{\frac{\eta_p^2}{D^2} + \frac{\varrho \tau_0}{3450}}\right) + \frac{4}{3}\tau_0,$$

$$\left(\frac{8v}{D}\right)_{sup} = \frac{9200}{\varrho D}\left(\frac{\eta_p}{D} \pm \sqrt{\frac{\eta_p^2}{D^2} + \frac{\varrho \tau_0}{3450}}\right).$$

4. Przypadek ciała pseudoplastycznego

4.1. Wiskozymetry typu Couette'a. Rozkład naprężeń ścinających τ_r określony jest przez (2.1), gdyż jest on identyczny z rozkładem dla pozostałych substancji plastyczno-lepkich. Wiążąc (2.1) ze wzorem (1.3) dla ciał nienewtonowskich otrzymujemy

$$\frac{M}{2\pi lr^2} = k\left(r\frac{d\dot{\Phi}}{dr}\right)^n,$$

skąd

$$\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} d\dot{\Phi} = \left(\frac{M}{2\pi lk}\right)^{1/n} \int_{R_1}^{R_2} r^{-2/n-1}\, dr,$$

gdzie Ω_2 i Ω_1 oznaczają odpowiednio prędkości kątowe rotacji cylindra zewnętrznego i wewnętrznego. Po scałkowaniu dochodzi się do wzoru

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \frac{n}{2}\left(\frac{M}{2\pi lk}\right)^{1/n}\left(\frac{1}{R_1^{2/n}} - \frac{1}{R_2^{2/n}}\right).$$

Dla wiskozymetrów Couette'a zastąpmy $\Omega_2 - \Omega_1$ przez Ω oraz wprowadźmy $\alpha = R_2^2/R_1^2$ i τ_{R_1}:

$$\tau_{R_1} = k\left(\frac{2\Omega}{1-1/\alpha}\,\frac{1-1/\alpha}{1-1/\alpha^{1/n}}\,\frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.1}$$

Wartość $(dv/dr)_k = rd\dot{\Phi}/dr$ dla ciał pseudoplastycznych jest określona przez wyrażenie w klamrze ze wzoru (4.1). Zastępując $2\Omega/(1-1/\alpha)$ przez dv/dr można napisać

$$\left(\frac{dv}{dr}\right)_k = \frac{dv}{dr}\left(\frac{1-1/\alpha}{1-1/\alpha^{1/n}}\,\frac{1}{n}\right). \tag{4.2}$$

Prawe strony wzoru ogólnego (1.3) dla ruchu ciał pseudoplastycznych oraz wzoru (4.1), odnoszącego się wyłącznie do wiskozymetrów typu Couette'a, są funkcjami potęgowymi. Tak więc ten model ruchu odnosi się tylko do stałych k i n. We współrzędnych logarytmicznych krzywe płynięcia $\tau_{R_1} = f(dv/dr)_k$ powinny przedstawiać proste.

Dotyczy to również pseudoreogramów $\tau_{R_1} = f(dv/dr)$. Równanie (4.2) wykazuje, że dla $n = \text{const}$ istnieje liniowa zależność prędkości deformacji $(dv/dr)_k$ od prędkości pozornej dv/dr, gdyż wyraz w klamrach we wzorze (4.2) jest stały dla danej substancji i danego przyrządu. We współrzędnych logarytmicznych pseudokrzywa dla substancji pseudoplastycznych powinna być więc również prostą.

Przy określaniu k i n za pomocą pseudoreogramów $\tau_{R_1} = f(dv/dr)$ należy wprowadzić do obliczeń niezbędne korekcje pseudokrzywych płynięcia. Przyjmijmy

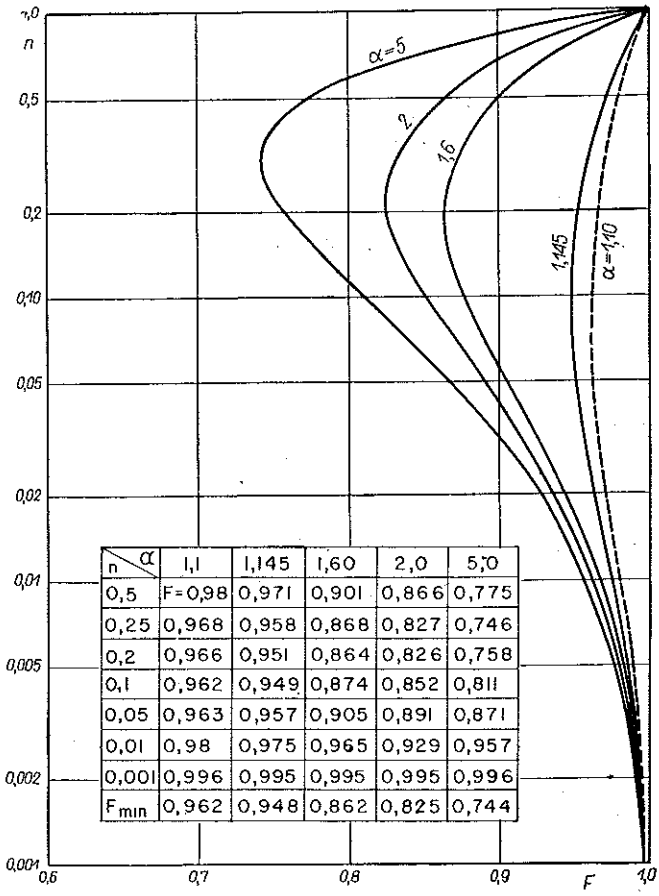
$$\left(\frac{1-1/\alpha^{1/n}}{1-1/\alpha}\,n\right)^n = F \tag{4.3}$$

i wprowadźmy do (4.1)

$$\tau_{R_1} = k\left(\frac{dv}{dr}\right)^n \frac{1}{F}.$$

Dla $dv/dr = 1$ mamy $\tau_{R_1} = k_{ap}$ (pozorna wartość k według pseudoreogramu). Stąd

(4.4) $$k = k_{ap} F.$$



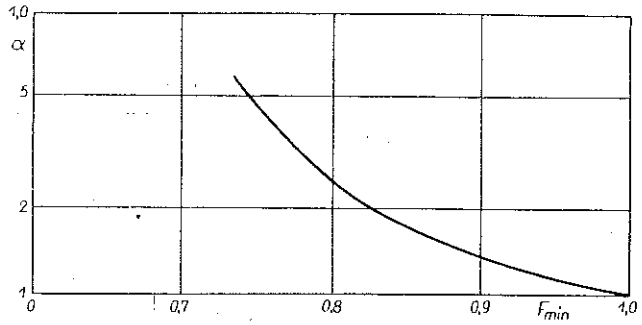
n \ α	1,1	1,145	1,60	2,0	5,0
0,5	F=0,98	0,971	0,901	0,866	0,775
0,25	0,968	0,958	0,868	0,827	0,746
0,2	0,966	0,951	0,864	0,826	0,758
0,1	0,962	0,949	0,874	0,852	0,811
0,05	0,963	0,957	0,905	0,891	0,871
0,01	0,98	0,975	0,965	0,929	0,957
0,001	0,996	0,995	0,995	0,995	0,996
F_{min}	0,962	0,948	0,862	0,825	0,744

Rys. 12

Symbol k jest wartością τ_{R_1} dla $dv/dr = 1$ pomnożoną przez współczynnik poprawkowy F. Wartość n dana jest wprost z pseudokrzywej płynięcia, gdyż jest ona równoległa do krzywej rzeczywistej (dla stałych k i n):

$$n = \frac{\Delta(\lg \tau_{R_1})}{\Delta\left(\lg \frac{dv}{dr}\right)}.$$

Współczynnik poprawkowy F równy jest jedności dla $n = 1$, zmniejsza się z n aż do pewnej wartości i wzrasta ponownie do 1 dla $n \to 0$. Na rys. 12 przedstawiliśmy przykładowo krzywe $F = f(\alpha, n)$ dla pięciu wartości α_n wraz z tablicą zawierającą wartości liczbowe F dla siedmiu wartości n. Tablica ta zawiera również wartości $F_{\min}$ dla każdego przyjętego α; następnie nanieśliśmy je na wykres $F_{\min} = f(\alpha)$ (rys. 13). Z rysunków 12 i 13 wynika, że różnicę między k_{ap} i k można pominąć dla wiskozymetrów mających małą wartość α, mniejszą od 1,15 ($F_{\min} \approx 0{,}94$) lub też od 1,10 ($F_{\min} \approx 0{,}962$) w zależności od wymaganej dokładności pomiarów. Dla tych wartości α błąd nie przekracza odpowiednio 6% lub 3,8%.



Rys. 13

Dla wykazania różnic między krzywymi rzeczywistymi a pseudokrzywymi płynięcia skonstruowaliśmy schematyczny pseudoreogram dla ciał pseudoplastycznych dla kilku wartości n oraz dwóch wartości $\alpha \neq 1$.

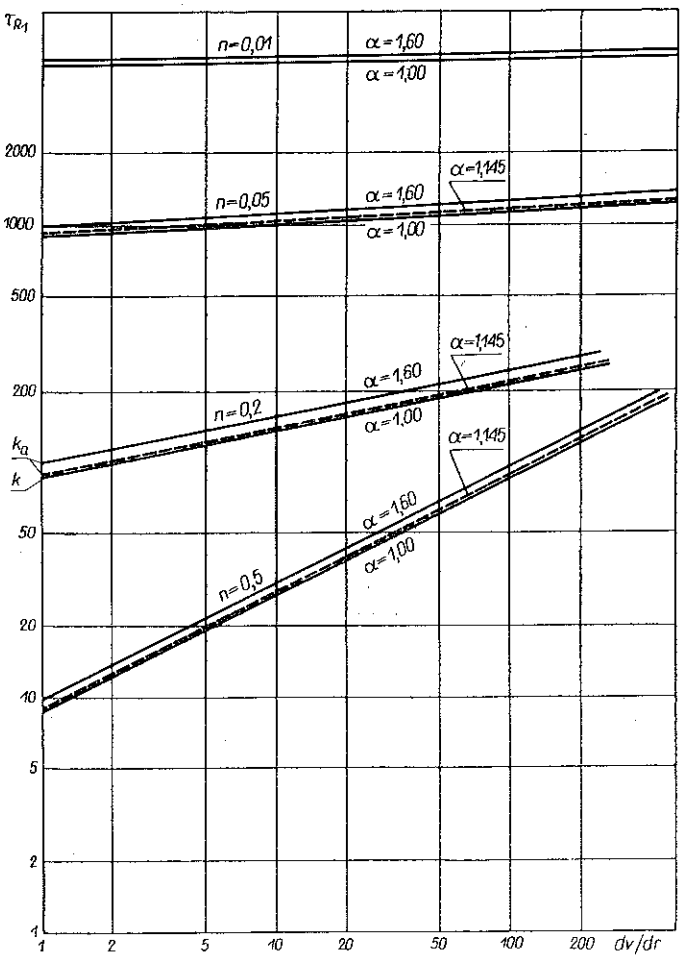
Gdy k i n zmieniają się wraz z dv/dr, to zmieniają się także ich wymiary. Oba współczynniki reologiczne zależą wtedy od warunków ruchu. W ścisłym tego słowa znaczeniu model (1.3) nie ma już zastosowania dla tego przypadku. Mimo to wprowadzono w kilku pracach korekcje krzywych o zmiennych k i n za pomocą stycznych przyłożonych w różnych punktach pseudokrzywej płynięcia. Stosowanie takiej metody do pseudokrzywych, zwłaszcza przy dużych wartościach α, może spowodować poważne błędy. Naszym zdaniem można ją stosować wyłącznie w celu otrzymania przybliżonych wartości k i n i to dla takich części pseudokrzywej, które mogą być przybliżone za pomocą prostej.

WELTMANN i KUHNS [32] podali metodę korekcji k i n. Stwierdzają oni jednak, że pomiary powinny być wykonane za pomocą przyrządów mających $\alpha \to 1{,}0$, tylko w tym przypadku występują bowiem wystarczająco małe różnice między wartościami mierzonymi a rzeczywistymi. Np. dla $R_2/R_1 = 1{,}08$ występuje błąd rzędu 5% dla ciał, których stała $n \geqslant 0{,}125$.

Korekcja pseudokrzywych jest więc możliwa dla stałych k i n; wtedy $F = f(\alpha, n)$. Lecz dla zmiennych k i n zmienne jest również F; dla jego określenia w takim przypadku trzeba by znać z góry rząd wielkości n dla różnych wartości dv/dr, aby można było obliczyć ostateczne wartości k i n metodą prób.

Trudności te powodują, że szereg badaczy przyjmuje k i n bezpośrednio z pseudoreogramów bez wymaganej korekcji.

Wnioski. Model (1.3) jest bardziej uniwersalny od modelu Binghama (1.2). Ściśle rzecz biorąc odnosi się on jednak wyłącznie dla stałych k i n. Wartości tych współczynników reologicznych można określić w tym przypadku za pomocą pseudoreogramów we współrzędnych logarytmicznych; n dane jest bezpośrednio z nachylenia krzywej, k określa się ze wzoru (4.4) ze współczynnikiem poprawkowym F zgodnie z (4.3).



Rys. 14

W przypadku k i n zmieniających się wraz z dv/dr model (1.3) nie jest już prawidłowy. W szeregu prac przyjmowano wtedy częściową linearyzację pseudokrzywej płynięcia. Korekcja ta nie jest jednak w tym przypadku poprawna, ponieważ współczynnik korekcyjny F jest również zmienny. Jedynym sposobem gwarantującym prawidłowy pomiar byłoby tu przyjęcie wiskozymetru, dla którego $\alpha \to 1{,}0$.

Dla reologicznej charakterystyki rozwodnionych gruntów i innych ciał za pomocą funkcji koncentracji s' można przyjąć ten model tylko w przypadku stałych

wartości k i n, gdyż wtedy $k = f(s')$ i $n = f(s')$. W przeciwnym przypadku, tj. przy zmiennych k i n, funkcje te stają się bardziej złożone: $k = f(s', dv/dr)$ i $n = f(s', dv/dr)$.

4.2. Rury. Rozpatrując równowagę sił podczas ruchu laminarnego dla ciekłego cylindra mamy $\tau = r\Delta p/2L$ (wzór (2.14)), tj. jak dla ciała Newtona. Biorąc pod uwagę (2.14) i (1.3) oraz wprowadzając $\dot{G} = du/dr$, otrzymujemy

$$\frac{r\Delta p}{2L} = k\left(\frac{du}{dr}\right)^n.$$

Po scałkowaniu dochodzi się do wzoru

$$u = \left(\frac{\Delta p}{2Lk}\right)^{1/n} \frac{r^{1/n+1}}{\frac{1}{n}+1} + C. \tag{4.5}$$

Dla $r = R$, $u = 0$; stąd

$$C = -\left(\frac{\Delta p}{2Lk}\right)^{1/n} \frac{R^{1/n+1}}{\frac{1}{n}+1},$$

co daje wraz z (4.5)

$$-u = \left(\frac{\Delta p}{2Lk}\right)^{1/n} \frac{n}{n+1}(R^{1/n+1} - r^{1/n+1}).$$

Oblicza się wydatek, a następnie średnią prędkość:

$$v = \frac{Rn}{3n+1}\left(\frac{\Delta p R}{2Lk}\right)^{1/n}$$

oraz

$$\tau_{\max} = k\left(\frac{3n+1}{4n}\right)\left(\frac{8v}{D}\right)^n. \tag{4.6}$$

Przy określaniu wartości k i n z wykresu $\tau_{\max} = f(8v/D)$ wygodniej jest zastosować wartości skorygowane dla przypadku przepływu w rurach, tj. k' i n':

$$\tau_{\max} = k'\left(\frac{8v}{D}\right)^{n'}. \tag{4.7}$$

Wzór (4.7) zaproponowali METZNER i REED [20]. Porównanie (4.6) i (4.7) wykazuje, że związki między współczynnikami reologicznymi k i n oraz wartościami k' i n' są następujące:

$$k' = k\left(\frac{3n+1}{4n}\right)^n, \qquad n' = n.$$

Przyjmując k' i n' jako charakterystyki ruchu ciał pseudoplastycznych w rurach należy je ustalać w następujący sposób: k' jest wartością $\tau_{\max}$ dla $8v/D = 1$ oraz

$$n' = \frac{\Delta(\lg \tau_{\max})}{\Delta\left(\lg \frac{8v}{D}\right)}.$$

Określenie przedziału liniowych pomiarów. Wychodząc z takiego samego założenia jak dla poprzednich przypadków (p. 3.2) określmy górne granice strefy liniowej jako funkcje liczby Reynoldsa Re_k dla ruchu ciał plastycznolepkich w rurach. Liczba ta jest równa (por. [20 i 34])

$$\mathrm{Re}_k = \frac{D^{n'} v^{2-n'}}{k' \cdot 8^{n'-1}}.$$

Graniczna wartość Re_k jest równa w przybliżeniu 2300. Pozwala nam to na obliczenie rzędu wielkości granicznej prędkości przyjmując w przybliżeniu rząd wielkości k' i n'.

5. Porównanie modeli Binghama i de Waele'a-Ostwalda

1. Oba modele (1.2) i (1.3) stosowane są do opisu ruchu ciał plastycznolepkich, nienewtonowskich. Model Binghama opisuje ruch ciał idealnie plastycznych i oparty jest na teorii potwierdzonej eksperymentalnie. Wzory potęgowe (1.3) i (4.7) są wzorami doświadczalnymi, zaproponowanymi w celu ułatwienia opisu ruchu ciał nienewtonowskich.

2. *Charakterystyka modelu Binghama.* a) Płynięcie ciała Binghama opisane jest przez dwie stałe reologiczne τ_0 i η_p. Ruch rozpoczyna się przy $\tau > \tau_0$. Pozorna lepkość η_a jest zmienna, lecz lepkość plastyczna η_p pozostaje stała. b) Podczas ruchu w wiskozymetrach rotacyjnych stałe τ_0 i η_p nie zależą od warunków ruchu jeśli wartość τ_{R_2} jest większa od τ_0, tj. jeśli cała objętość substancji jest ścinana w pełni. Pozwala to na określenie dokładnych wartości stałych τ_0 i η_p na podstawie pseudokrzywych płynięcia i to niezależnie od zastosowanego przyrządu. c) Równanie (1.2) jest oparte na teorii fizycznej; τ_0 i η_p są wielkościami fizycznymi. Według tej teorii przy przepływie ciała Binghama w rurach powinien się utworzyć rdzeń («plug flow») w środkowej części rury. Ten typ ruchu został stwierdzony eksperymentalnie przez GREENA [20] i WOŁAROWICZA [35]. d) Korekcja pseudokrzywych płynięcia mierzonych za pomocą wiskozymetrów jest łatwa i daje dokładne wartości. e) Wartości τ_0 i η_p rosną wyraźnie z koncentracją substancji, co pozwala na łatwe określenie tych stałych dla wszystkich koncentracji s'. f) Znajomość rzędu wielkości τ_0/η_p (tablica 1) pozwala na wcześniejsze obliczenie przybliżonych charakterystyk liniowej strefy pomiarów i na dobór wiskozymetru rotacyjnego, zapewniającego właściwy (prawidłowy) pomiar τ_0 i η_p.

3. *Charakterystyka modelu de Waele'a-Ostwalda.* a) Wzór, któremu odpowiada ten model, jest wzorem doświadczalnym. Jest to model bardziej uniwersalny od

modelu Binghama; ściśle rzecz biorąc odnosi się on wyłącznie do stałych k i n (1.3) lub k' i n' (4.7). b) Jeżeli oba współczynniki reologiczne k i n zależą od warunków ruchu, to występuje wiele trudności w interpretacji pseudokrzywych płynięcia, ponieważ związek między τ_{R_1} i dv/dr jest nieliniowy. c) Podstawowe zastrzeżenia wobec modeli (1.3) i (4.7) są następujące (por. REINER [27]): (1) wartości k (lub k') nie mogą być wyrażane w jednostkach lepkości (dla ciał newtonowskich model ten daje $k = \eta$ dla $n = 1$); (2) wzór (4.7) dla rur jest niezgodny z istnieniem rdzenia, stwierdzonego eksperymentalnie przy ruchu ciał plastycznych. d) METZNER i REED [20] twierdzą, że na podstawie wielu badań k' i n' są w zasadzie stałe w szerokim przedziale gradientów prędkości. Zastrzeżenia REINERA są więc ich zdaniem nieistotne. Zdanie to podziela WILKINSON [34].

METZNER i REED [20] zanalizowali profil prędkości w rurach dla modelu potęgowego (4.7). Przy wartościach n' mniejszych od 0,2 profil prędkości ciała pseudoplastycznego jest podobny do profilu «rdzeniowego» ciał Binghama, przy czym różnica nie przekracza 1%, gdy $D/D_0 > 0{,}4$. Według tych autorów wzory (1.2) i (4.7) są więc równoważne dla $n' < 0{,}2$. Zauważmy, że tylko część ciał pseudoplastycznych ma wykładnik $n' < 0{,}2$. e) Wartości k (lub k') rosną, a n zmniejszają się ze wzrostem koncentracji mieszaniny (dla ciał pseudoplastycznych $0 < n < 1$). Dokładne określenie n jest bardzo trudne dla substancji o bardzo wyraźnych cechach nienewtonowskich, dla których $n \to 0$, zwłaszcza w strefie małych prędkości deformacji. Ustalenie funkcji $n = f(s')$ jest więc mało dokładne dla ciał o dużej koncentracji.

4. Z przedstawionej pracy wynika, że model Binghama jest dokładniejszy od modelu de Waele'a-Ostwalda dla wszystkich ciał mających w przybliżeniu liniowe krzywe płynięcia (por. WELTMANN [32]). Dotyczy to również jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych (por. [11, 23, 24 i 30]).

Model potęgowy można stosować wyłącznie dla ciał mających stałe k i n (lub k' i n'). Korekcja krzywych płynięcia o zmiennych k i n (lub k' i n') jest bardzo skomplikowana i może dostarczyć wyłącznie przybliżone wartości; dokładne określenie zależności między reologicznymi charakterystykami mieszaniny i jej koncentracją s' jest w tym przypadku niemożliwe.

Natomiast model Binghama zapewnia łatwe określenie $\tau_0(s')$ i $\eta_p(s')$, ponieważ τ_0 i η_p są stałymi rosnącymi wyraźnie z s'.

6. Wnioski końcowe

1. Prawidłowe określanie reologicznych własności mieszanin gruntowo-wodnych wymaga: a) użycia takich wiskozymetrów, których konstrukcja dostosowana jest do potrzeb dokładnych pomiarów oraz do fizycznych własności mieszanin (a zwłaszcza do kształtu i wielkości ziarn stałych); b) przyjęcia optymalnego modelu reologicznego, zapewniającego dobrą aproksymację krzywych płynięcia badanej substancji.

2. Dla jednorodnych mieszanin gruntowo-wodnych trzeba zastosować wiskozymetry mające stosunkowo dużą szczelinę rzędu 1 mm i więcej. Warunek ten wypełniają tylko wiskozymetry rotacyjne typu Couette'a i wiskozymetry rurowe.

Przedstawiona praca zawiera teorię płynięcia mieszanin w tych dwóch typach wiskozymetrów dla podstawowych trzech modeli reologicznych: Newtona, Binghama i de Waele'a-Ostwalda. Określono także metody doboru wiskozymetrów typu Couette'a dla ciał Binghama i de Waele'a-Ostwalda oraz określanie wielkości strefy liniowych pomiarów w rurach dla tych dwóch modeli.

3. Na podstawie porównania obu modeli (1.2) i (1.3) w oparciu o prace wcześniejsze oraz niniejsze opracowanie wykazano przewagę modelu Binghama; stwierdzono, że dla opisu ruchu i reologicznej charakterystyki mieszaniny w funkcji koncentracji s' model ten jest znacznie dokładniejszy od modelu de Waele'a-Ostwalda.

Literatura cytowana w tekście

1. G. ANNEN, *Zur Berechnung der Reibungsverluste von Klärschlamm*, Gas- und Wasserfach, Wasser-Abwasser, 12, 22. III. 1963, 342–346.

2. H. E. BABBITT, D. H. CALDWELL, *The flow of muds, sludges and suspensions in circular pipe*, Trans. Amer. Inst. Chem. Engrs., **37** (1941), 237.

3. E. C. BINGHAM, *Fluidity and Plasticity*, New-York 1922.

4. J. BOURCART, J. FLORENTIN, V. ROMANOWSKY, *Sur un appareil permettant la détermination de la rigidité des suspensions grossières*, C. R. Acad. Sc. Paris, **212** (1941), 624–684.

5. J. BRIANT, *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, **11** (1956), 113–133, 247–287.

6. J. G. BRODNYAN, F. H. GASKINS, W. PHILIPOFF, *Correlation between rheological parameters measured in instruments of different geometries*, Symposium on Non-Newtonian Viscometry, Washington X/1960, 14–25.

7. D. W. DODGE, A. B. METZNER, *Flow of non-Newtonian systems*, A. I. Ch. E. J. 2, **5** (1959), 189–204.

8. W. VON ENGELHARDT, H. LÜBBEN, *Absolute Viscositätsmessungen mit einem Rotations-viscosimeter nach Couette-Hatschek*, Kolloid-Ztschr., 1/2, **147** (1956), 1–6.

9. H. ENNEKING, *Theoretische und experimentale Untersuchung einer thixotropischen Suspension am Beispiel von Bentonit*, Dissertation, Rhein. Tech. Westf. Hochschule, Aachen 1960.

10. A. G. EPPRECHT, *Le comportement rhéologique véritable des substances plastiques*, Revue Intern. de la Chocolaterie, 7, 1959.

11. Б. С. Филатов, *Определение реологических свойств суспензии глины в условиях установившегося движения*, Коллоидный Журнал, 2, **16** (1965).

12. Б. С. Филатов, *Течение суспензии глины в трудах*, Коллоидный Журнал, 1, **16** (1954).

13. K. H. GRODDE, *Ein Absolut-Rheometer vom Couette-Typ*, Kolloid-Ztschr., 1/2, **139** (1954), 91–96.

14. E. HATSCHEK, *La viscosité des liquides*, Paris 1932.

15. B. O. H. HEDSTROM, *Flow of plastics materials in pipes*, Ind. and Engin. Chem., 3, **44** (1952), 651–656.

16. С. В. Яковлев, И. М. Ласков, *Перекачка ил и осадков сточных вод*, Москва 1959.

17. А. П. Юфин, *Движение глинистых гидросмесей по трубам*, Издат. АН СССР, Гидравлика сооружений и динамика речных русел, Москва 1959, 54–61.

18. M. KEPES, *Un nouveau consistomètre à large gamme de gradients, et de la température*, Journal of Polymere Sciences, **23** (1956), 109–122.

19. I. KISIEL, *Kilka uwag o pomiarach cech reologicznych gruntów*, Arch. Hydrot., 2 (1965), 165–181.

20. A. B. METZNER, J. C. REED, *Flow of non-Newtonian fluids-correlation of the laminar, transition, and turbulent flow regions*, A. I. Ch. E. Journal, Dec. 1955, 434–440.

21. W. OSTWALD, *Über die Geschwindigkeitsfuntion der Viscosität disperser Systeme*, Kolloid-Ztg., **36** (1925), 99–117.

22. W. PARZONKA, *Une méthode exacte de la détermination des constantes rhéologiques des corps plastiques de Bingham à l'aide du viscosimère type Couette*, La Houille Blanche, **8** (1964), 921–927.

23. W. PARZONKA, *Détermination de la concentration limite des mixtures homogènes*, C.R. Acad. Sc. Paris, **258** (1944), 5583–86.

24. W. PARZONKA, *Ustalenie modelu reologicznego dla namułu na podstawie pomiarów rurowych i wiskozymetrycznych*, Politechnika Wrocławska, Sympozjum z Reologii, 1964.

25. S. PETER, W. SLIWKA, *Ein Absolut-Viscosimeter des Couette-Typs von hoher Messgenauigkeit*, Chemie-Ingenieur-Technik, **28** (1956), 49–53.

26. M. REINER, *Über die Strömung einer elastischen Flüssigkeit durch eine Kapillare*, Kolloid-Ztg., 1, **39** (1926), 80–87.

27. M. REINER, *Deformation, Strain and Flow. An Elementary Introduction to Rheology*, London 1960.

28. M. REINER, R. RIVLIN, *Über die Stromung einer elastischen Flüssigkeit im Couette Apparat*, Kolloid-Ztg., 1, **43** (1927).

29. V. ROMANOWSKY, *Recherches sur les propriétés physiques des sédiments*, Thèse, Université de Paris, 1948.

30. D. G. THOMAS, *Transport characteristics of suspensions*, part IV. *Friction Loss of concentrated-flocculated snspensions in turbulent flow*, A.I.Ch.E. Journal, **8** (1962), 266–271.

31. J. R. VAN WAZER. J. W. LYONS, K. Y. KIM, R. E. COLWELL, *Viscosity and Flow Measurement*, New-York-London 1963.

32. R. N. WELTMANN, KUHNS, *An automatic viscometer for non-Newtonian materials*, NACA T.N. 3510, Washington 1955.

33. R. H. WILHELM, D. M. WROUGHTON, W. F. LOEFFEL, *Flow of suspensions through pipes*, Ind. and Engin. Chemistry, **31** (1939), 622.

34. W. L. WILKINSON, *Non-Newtonian Fluids Mechanics*, Mixing and Heat Transfer, Pergamon Press 1960.

35. М. П. Воларович, *Исследование реологических свойств дисперсных систем*, Коллоидный Журнал, 3, **16** (1954).

36. J. ZAWADZKI, W. SIUTA, *Z badań nad płynięciem cieczy lepkiej przez kapilarę*, Zesz. Nauk. Polit. Wrocł., Mechanika VI, Wrocław 1961, 129–142.

Р е з ю м е

ТЕОРИЯ ВИСКОЗИМЕТРОВ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГРУНТОВОДНЫХ СМЕСЕЙ

В работе представлен теоретических анализ основных вискометрических приборов для однородных грунтоводных смесей. Эти смеси состоят из воды и зерен грунта величиной от 2 до 50–100μ. Реологическое поведение этих смесей зависит от характера твердых частиц: от формы, величины и удельного веса, а главным образом от их концентрации. Предельная концентрация s'_{lim} является важной характеристикой смеси: при $s' < s'_{\text{lim}}$ смесь обладает свойством ньютоновского тела, тогда как выше s'_{lim} ведет себя как неньютоновское тело.

Для правильного определения реологических свойств грунтоводных смесей можно применить модели текучести вязко-пластических тел, реологические свойства которых не зависят от времени:

a. Модель Ньютона (1) для веществ с малой концентрацией, $s' < s'_{\text{lim}}$ обладающих свойствами двухфазной жидкости, b) модели Бингама (2) или де Вель-Оствальда (3) для веществ с высокой концентрацией, $s' < s'_{\text{lim}}$.

Важным условием правильных измерений является применение вискозиметров конструкцией приспособленной для требуемой точности измерений и для рода исследуемого вещества.

Для однородных грунтоводных смесей, заключающих крупные зерна, следует использовать вискозиметры с относительно большой щелью порядка 1 *мм* и больше.

Такому условию удовлетворяют только ротационные вискозиметры типа Куэтт и трубчатые вискозиметры. Прибор типа конус-пластинка не отвечает требованиям ввиду слишком узкой щели, меньше 10–100 μ.

Разработка заключает теорию течения в обеих типах вискозиметров для приведенных трех моделей. Вискозиметр типа Куэтта является однако более точным, так как обеспечивает квази-однородность поля напряжений и широкий интервал линейных измерений.

Предлагаются также методы точных измерений и подбора вискозиметров для пластических тел Бингама и для псевдопластических веществ. Разработка заключает 1 — для тел Бингама: a) метод подбора вискозиметров Куэтта, основанного на знании порядка величины числа (τ_0/η_p) и параметров вискозиметра характеризующихся числом $\alpha = R_2^2/R_1^2$ и максимальной угловой скоростью Ω_{max}, b) метод подбора трубчатых вискозиметров, линейный интервал которых характеризуется обобщенным числом Рейнольдса Re*; 2 — для псевдопластических тел предлагается: a) метод коррекции результатов измерений полученных при использовании вискозиметров типа Куэтта. Доказывается, что можно не учитывать разницы между псевдокоэффициентом жесткости k_{ap} и его реальной величиной k при условии применения вискозиметра, имеющего $\alpha < 1{,}10$. В этом случае максимальное отклонение меньше чем 3,8%, b) метод определения линейного интервала измерений для ротационных и для трубчатых вискозиметров.

Summary

THEORY OF VISCOMETERS FOR HOMOGENEOUS WATER-SOIL MIXTURES

This paper contains a theoretical analysis of fundamental viscometric instruments for homogeneous water-soil mixtures. These mixtures are composed of water and soil grains, the size of which is 2 to 50–100μ. The rheologic behaviour of such mixtures depends on the properties of the solid particles: their form, size, specific weight and, in particular, their concentration. The limit concentration s'_{lim} is an important characteristic of the mixture: which has the properties of a Newtonian body for $s' < s'_{lim}$ and those of a non-Newtonian body above this limit.

Correct determination of the rheologic properties of a water-soil mixture can be achieved by models of flow of viscoplastic bodies, the rheologic properties of which are independent of time, that is

a) The Newtonian model (1) for low concentration mixtures, having the properties of a two-phase liquid, for $s' < s'_{lim}$;

b) The Bingham (2) or De Waele-Ostwald (3) model for high concentrations, $s' < s'_{lim}$.

An important condition of correct measurement is the application of viscometers (viscosimeters) designed for the required accuracy of measurement and the type of liquid to be investigated. For homogeneous water-soil mixtures with large grains viscometers of a relatively wide gap (of the order of 1 mm or more) should be applied. This requirement is satisfied only by rotational viscometers (viscosimeters) of the Couette type or tube type viscometers. The cone-plate type is not suitable the gap (which is below 10–100 μ) being too small.

The paper explains a theory of flow of the three bodies just mentioned through viscometers of both types. The Couette viscometer is much more accurate, because it ensures quasi-homogeneous stress field and a wide range of linear measurement.

The paper contains also a description of methods of accurate measurement and selection of viscometers for Bingham-type plastic bodies and pseudo-plastic bodies. It contains also a description,

1) for Bingham bodies, of

a) a method of selection of a Couette viscometer knowing the order of magnitude of the number τ_0/η_p and the parameters of the viscometer characterized by the number $\alpha = R_2^2/R_1^2$ and the maximum angular velocity Ω_{max},

b) a method of selection of a tube type viscometer the linear range of which is characterized by the generalized Reynolds number Re*;

2) for pseudo-plastic bodies is proposed

a) a method of correction of the measurement results obtained by means of viscometers of the Couette type. It is shown also that the difference between the pseudo-coefficient of rigidity k_{ap} and its real value k can be disregarded under the condition that a viscometer of $\alpha < 1{,}10$ is used. In this case the maximum deviation is smaller than 3,8%;

b) a method of determining the linear measurement range for rotational viscometers and tubes.

WYŻSZA SZKOŁA ROLNICZA, WROCŁAW
KATEDRA BUDOWNICTWA WODNEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1967 r.