

ZAGADNIENIA TERMOSPŘEŻYSTOŚCI W OBSZARACH
OGRANICZONYCH POWIERZCHNIAMI KULISTYMI I STOŻKOWYMI

ZBIGNIEW FRANCISZEK BACZYŃSKI (WARSZAWA)

Spis treści

Wstęp.

1. Ustalone przewodnictwo cieplne.
 - 1.1. Sformułowanie zagadnienia.
 - 1.2. Rozwiązanie I problemu.
 - 1.3. Rozwiązanie II problemu.
2. Ustalony stan naprężenia i przemieszczenia.
 - 2.1. Sformułowanie zagadnienia.
 - 2.2. Szczególne rozwiązanie potencjalne.
 - 2.3. Ogólne rozwiązanie I problemu.
 - 2.4. Ogólne rozwiązanie II problemu.
3. Przykład zastosowania.
 - 3.1. Powłoka półkulista.
 - 3.2. Obliczenia numeryczne.

Strészczenie.

Literatura cytowana w tekście.

Wstęp

Praca niniejsza traktuje o problemach brzegowych termosprężystości w jednorodnych i izotropowych ciałach sprężystych ograniczonych powierzchniami kulistymi i stożkowymi, a w szczególności w grubościennych otwartych powłokach kulistych poddanych wpływom ustalonej temperatury o rozkładzie osiowosymetrycznym.

- Celem pracy jest podanie ścisłych i przybliżonych rozwiązań dla zagadnień przewodnictwa cieplnego oraz stanu naprężeń i przemieszczeń termicznych w ujęciu klasycznej liniowej teorii termosprężystości:

Podjęta w pracy problematyka należy do przestrzennych zagadnień teorii sprężystości lub termosprężystości, a także do klasycznej teorii powłok. Wypada zatem podać przegląd bibliograficzny podstawowych prac, które wiążą się z poruszonymi zagadnieniami.

Pierwsze zainteresowania teorią naprężeń cieplnych w ciałach stałych sprężystych zapoczątkowane zostały pracami J. M. C. DUHAMELA [1 i 2] w latach 1837–1838 i dotyczyły ogólnego sformułowania zagadnień. W roku 1873 C. W. BORCHARDT [3] ogłosił traktat o rozkładzie temperatury i stanie naprężenia w jednorodnej i izotropowej kuli pełnej ogrzanej dowolnie (niekoniecznie symetrycznie) na powierzchni zewnętrznej. On także pierwszy wprowadził funkcję termosprężystego potencjału, która od tej pory była stosowana w pracach N. N. LEBIEDIEWA [4], J. N. GOODIERA [5], R. D. MINDLINA, D. H. CHENGA [6] i innych badaczy. W roku 1957 B. D. SHARMA [7] zbadał stan naprężeń i przemieszczeń termicznych w nieskończonym sprężystym ciele z kulistą pustką i w pełnej sprężystej kuli pod wpływem działania jądra termosprężystego odkształcenia. W tym samym czasie E. L. McDOWELL i E. STERNBERG [8] podali rozwiązanie dla problemu temperatury, naprężeń i przemieszczeń w zamkniętej powłoce kulistej o dowolnej stałej grubości, ogrzanej osiowoosymetrycznie na powierzchniach ograniczających. Grubościenną powłokę półkulistą w osiowoosymetrycznym polu temperatury zbadał J. IGNACZAK [9] sprowadzając zagadnienie do rozwiązania nieskończonego układu równań dla współczynników szeregów. W ostatnim czasie W. E. WARREN [10, 11] uogólnił rozwiązanie podane w pracy [8] na nieustalone pole temperatury.

Stany naprężeń i deformacji termicznych w cienkich powłokach obrotowych (w tym także w powłokach kulistych) w ujęciu klasycznej teorii powłok Kirchhoffa-Love'a w przypadkach osiowoosymetrycznych zostały wyczerpująco zbadane przez G. EICHELBERGA [12], S. P. TIMOSHENKĘ [13], A. I. ŁURIEGO [14], A. L. GOLDENWEJZERA [15], H. PARKUSA [16], E. MELANA [17] i innych. Ponadto podstawowe rezultaty dotyczące powłok obrotowych poddanych działaniu temperatury zebrane zostały w monografii W. NOWACKIEGO [18].

Zagadnienie przewodnictwa cieplnego oraz stan naprężeń i przemieszczeń termicznych w otwartych powłokach kulistych dowolnej grubości były przedmiotem badań autora w pracach [19–23].

1. Ustalone przewodnictwo cieplne

1.1. Sformułowanie zagadnienia. Rozważać będziemy ciało o kształcie wycinka kuli, ograniczone dwiema współśrodkowymi powierzchniami kulistymi o promieniach $r = r_1$ i $r = r_2$ ($0 \leq r < \infty$) oraz powierzchnią stożka kołowego o półkącie wierzchołkowym $\theta = \theta_1$ ($0 < \theta_1 < \pi$) z wierzchołkiem w środku powierzchni kulistych.

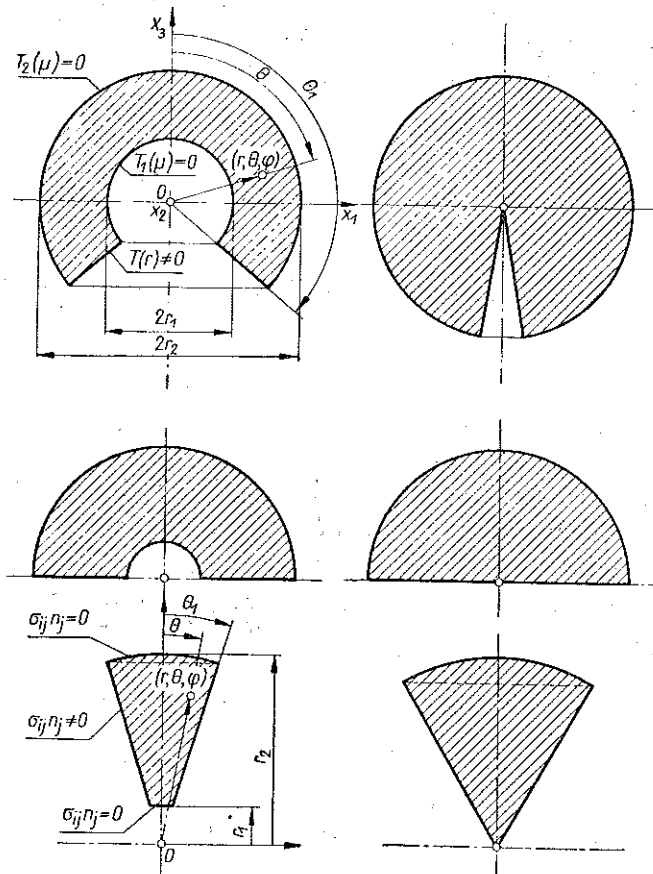
Ciało zanurzone jest w osiowoosymetrycznym polu temperatury tak, że na powierzchniach kulistych i na powierzchni stożkowej dane jest prawo zmiany temperatury. Poszukiwać będziemy pola temperatury wewnątrz obszaru powłoki z żądaniem ścisłego spełnienia warunków granicznych i brzegowych. W dalszym ciągu powierzchnie kuliste ograniczające ciało nazywać będziemy powierzchniami granicznymi, a powierzchnię stożkową powierzchnią brzegową. Powierzchni granicznej przypisywać będziemy warunki graniczne, a powierzchni brzegowej warunki brzegowe.

We współrzędnych kulistych r, θ, φ rozważany obszar ciała (rys. 1) jest opisany nierównościami

$$(1.1) \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

W rozważaniach wprowadza się współrzędne bezwymiarowe

$$(1.2) \quad \varrho = rr_2^{-1}, \quad 0 \leq \varrho \leq 1.$$



Rys. 1

Zagadnienie Dirichleta dla temperatury w przypadku ustalonym sprowadza się do rozwiązania równania przewodnictwa cieplnego (Laplace'a)

$$(1.3) \quad \Delta T = 0$$

w obszarze ciała (1.1) przy następujących warunkach granicznych i brzegowych:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} T(\varrho_k, \mu) &= T_k(\mu), & k &= 1, 2, & \mu_1 < \mu < 1, \\ T(\varrho, \mu_1) &= T(\varrho), & \mu &= \cos \theta, & \varrho_1 < \varrho < 1. \end{aligned}$$

Warunki powyższe oznaczają, że kuliste powierzchnie $\varrho = \varrho_k$ ograniczające obszar (1.1) utrzymuje się w dowolnej temperaturze $T_k(\mu)$ zmiennej wzdłuż południków, a na powierzchni wydrążenia stożkowego określa się temperaturę $T(\varrho)$ zmienną wzdłuż promienia.

Zakłada się, że ciało jest jednorodne i izotropowe termicznie, a współczynnik rozszerzalności termicznej α_T nie zależy od temperatury.

Rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego (1.3) przeprowadzimy dla wygody w dwóch etapach przy rozdzieleniu warunków brzegowych (1.4). W pierwszym etapie poszukiwać będziemy ogólnego jednorodnego rozwiązania równania (1.3) z warunkami granicznymi

$$(1.5) \quad \begin{aligned} T(\varrho_k, \mu) &= T_k(\mu), & k &= 1, 2, & \mu_1 < \mu < 1, \\ T(\varrho, \mu_1) &= 0, & \mu_1 &= \cos \theta_1, & \varrho_1 < \varrho < 1, \end{aligned}$$

a w drugim etapie ogólnego jednorodnego rozwiązania równania (1.3) z warunkami brzegowymi

$$(1.6) \quad \begin{aligned} T(\varrho_k, \mu) &= 0, & k &= 1, 2, & \mu_1 < \mu < 1, \\ T(\varrho, \mu_1) &= T(\varrho), & & & \varrho_1 < \varrho < 1. \end{aligned}$$

1.2. Rozwiązanie I problemu. Niech dane będzie ciało w kształcie wycinka kuli, którego obszar opisany został przez (1.1). Jeśli powierzchnie graniczne ciała pozostają pod wpływem ustalonej osiowosymetrycznej temperatury $T_k(\mu)$, a powierzchnia brzegowa utrzymana jest w temperaturze zerowej, to równanie (1.3) we współrzędnych kulistych $(\varrho, \theta, \varphi)$ ma postać

$$(1.7) \quad T_{,\varrho\varrho} + 2\varrho^{-1}T_{,\varrho} + \varrho^{-2}[(1 - \mu^2)T_{,\mu}]_{,\mu} = 0.$$

Jego rozwiązaniem spełniającym warunki graniczne i brzegowe (1.5) jest funkcja

$$(1.8) \quad T(\varrho, \mu) = \sum_{r=0}^{\infty} [A_{\alpha_r} \varrho^{\alpha_r} + B_{\alpha_r} \varrho^{-\alpha_r - 1}] P_{\alpha_r}(\mu).$$

Funkcja ta określa pole temperatury wewnątrz rozpatrywanego obszaru. W szeregu (1.8) A_{α_r} i B_{α_r} oznaczają ciągi stałych współczynników, ϱ oznacza zmienny promień bezwymiarowy, a $P_{\alpha_r}(\mu)$ zwyczajny wielomian Legendre'a argumentu $\mu = \cos \theta$ o rzeczywistych indeksach α_r określonych na zbiorze liczb naturalnych.

Zakładamy, że temperaturę na powierzchniach granicznych można określić za pomocą szeregu według zwyczajnych wielomianów Legendre'a w przedziale $(\mu_1, 1)$:

$$(1.9) \quad T_1(\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{\alpha_r} P_{\alpha_r}(\mu), \quad T_2(\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{\alpha_r} P_{\alpha_r}(\mu).$$

Wykorzystując warunki brzegowe (1.5) i rozwiązanie (1.8) otrzymamy dla wyznaczenia ciągów współczynników wzory następujące:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} A_\alpha &= (a_\alpha \varrho_1^{\alpha+1} - b_\alpha) (\varrho_1^{2\alpha+1} - 1)^{-1}, \\ B_\alpha &= (b_\alpha \varrho^{2\alpha+1} - a_\alpha \varrho_1^{\alpha+1}) (\varrho^{2\alpha+1} - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

W przedziale ortogonalności wielomianów Legendre'a $(\mu_1, 1)$ mamy

$$(1.11) \quad \begin{aligned} a_\alpha &= - \{ [(1 - \mu^2) (2\alpha + 1)^{-1} P_{\alpha, \alpha} P_{\alpha, \mu}]^{-1} \}_{\mu=\mu_1} \int_{\mu_1}^1 T_1 P_\alpha d\mu, \\ b_\alpha &= - \{ [(1 - \mu^2) (2\alpha + 1)^{-1} P_{\alpha, \alpha} P_{\alpha, \mu}]^{-1} \}_{\mu=\mu_1} \int_{\mu_1}^1 T_2 P_\alpha d\mu. \end{aligned}$$

Ciąg rzeczywistych indeksów $\alpha \neq -1/2$ określony jest równaniem przestępnym

$$(1.12) \quad P_\alpha(\mu_1) = 0.$$

W wyrażeniach (1.8) i (1.11) funkcję $P_\alpha(\mu)$ można przyjmować w postaci całkowej (całki Melera), szeregowej lub funkcji hipergeometrycznych. Najwygodniejsza jednak jest postać

$$(1.13) \quad P_\alpha(\mu) = \frac{\sin \pi \alpha}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha - n} - \frac{1}{\alpha + n + 1} \right) P_n(\mu),$$

gdzie $P_n(\mu)$ oznacza zwyczajny wielomian Legendre'a argumentu $\mu = \cos \theta$ o naturalnych indeksach n .

1.3. Rozwiązanie II problemu. Jeśli na powierzchni brzegowej ciała zdefiniowanego przez (1.1) dana jest ustalona osiowosymetryczna temperatura $T(\varrho) \neq 0$, a powierzchnie graniczne utrzymane są w temperaturze zerowej, to równanie (1.7) oraz warunki graniczne i brzegowe (1.6) spełnia funkcja

$$(1.14) \quad T(\varrho, \mu) = \sum_s^{\infty} A_{\beta_s} (\varrho^{\beta_s} - \varrho^{-\beta_s-1}) P_{\beta_s}(\mu).$$

Funkcja ta określa pole temperatury w rozpatrywanym obszarze. W szeregu (1.14) A_{β_s} oznacza ciąg stałych współczynników, ϱ zmienny promień bezwymiarowy, a $P_{\beta_s}(\mu)$ funkcję Legendre'a pierwszego rodzaju (1) o zespolonych indeksach określonych na zbiorze liczb naturalnych (2), przy czym

$$(1.15) \quad \beta_s = -\frac{1}{2} + i\tau, \quad \tau = -\frac{s\pi}{\ln \varrho_1}, \quad s = 1, 2, \dots$$

(1) Niekiedy funkcje $P_\beta(\mu) = P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\mu)$ nazywa się funkcjami stożkowymi.

(2) Ciąg indeksów β jest rozwiązaniem równania przestępnego $\varrho_1^\beta - \varrho_1^{-\beta-1} = 0$, które wynika z jednorodnych warunków brzegowych dla temperatury.

Funkcja $T(\varrho, \mu)$ jest jednoznacznie określona przez (1.14), gdy znany jest ciąg stałych A_β . Tak więc problem polega na przedstawieniu danej funkcji temperatury w postaci szeregu układu funkcji

$$(1.16) \quad T(\varrho) = \sum_s A_{\beta_s} (\varrho^{\beta_s} - \varrho^{-\beta_s-1}) P_{\beta_s}(\mu_1), \quad \mu_1 = \cos \theta.$$

Dla przybliżonego rozwiązania problemu zachowuje się w wyrażeniu szeregowym (1.16) określoną liczbę składników.

Wprowadźmy do rozważań wielkość, którą nazywać będziemy kwadratowym odchyleniem funkcji na powierzchni stożkowej $\theta = \theta_1$:

$$(1.17) \quad X(A_{\beta_1}, A_{\beta_2}, A_{\beta_3}, \dots) \equiv \int_{\varrho_1}^1 \left[T(\varrho) - \sum_{s=1}^{\infty} A_{\beta_s} (\varrho^{\beta_s} - \varrho^{-\beta_s-1}) P_{\beta_s}(\mu_1) \right]^2 \varrho d\varrho.$$

Współczynniki A_{β_s} ($s = 1, 2, \dots$) określamy z warunku minimum odchylenia kwadratowego funkcji. Warunek ten prowadzi do układu równań liniowych

$$(1.18) \quad \frac{\partial X}{\partial A_{\beta_k}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Jeśli wprowadzić oznaczenia

$$(1.19) \quad \begin{aligned} a_{\alpha_{sk}} &= P_{\beta_s}(\mu_1) P_{\beta_k}(\mu_1) \int_{\varrho_1}^1 (\varrho^{\beta_s} - \varrho^{-\beta_s-1}) (\varrho^{\beta_k} - \varrho^{-\beta_k-1}) \varrho d\varrho, \\ a_{\beta_k} &= P_{\beta_k}(\mu_1) \int_{\varrho_1}^1 T(\varrho) (\varrho^{\beta_k} - \varrho^{-\beta_k-1}) \varrho d\varrho, \end{aligned}$$

to układ równań (1.18) przyjmie postać

$$(1.20) \quad \sum_{s=1}^{\infty} a_{\beta_{sk}} A_{\beta_s} = a_{\beta_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Współczynniki $a_{\beta_{sk}}$ mogą być tutaj obliczone drogą elementarnego całkowania dla całej klasy ciał. Otrzymujemy zatem

$$(1.21) \quad a_{\beta_{sk}} = \begin{cases} 0 & \text{dla } s \neq k, \\ 2(\varrho_1 - 1) [P_{\beta_s}(\mu_1)]^2 & \text{dla } s = k, \end{cases}$$

$$(1.22) \quad a_{\beta_k} = \frac{8ik\pi \ln \varrho_1}{9(\ln \varrho_1)^2 + 4(k\pi)^2} [1 - (-1)^k \varrho_1^{3/2}] P_{\beta_k}(\mu_1).$$

Powyżej współczynniki a_{β_k} obliczone zostały dla stałej temperatury $T(\varrho) = 1$ danej na powierzchni brzegowej $\theta = \theta_1$; można także obliczać je bez trudności dla dowolnie danej temperatury $T(\varrho)$.

W ten sposób znane są wszystkie współczynniki nieskończonego układu równań (1.20). Okazało się przy tym, że macierz A utworzona ze współczynników $a_{\beta_{sk}}$ jest macierzą diagonalną:

$$(1.23) \quad A = \begin{bmatrix} a_{\beta_{11}} & & & \\ & a_{\beta_{22}} & & \\ & & a_{\beta_{33}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Tak więc rozwiązanie nieskończonego układu równań (1.20) otrzymuje się bezpośrednio w postaci

$$(1.24) \quad A_{\beta_s} = \begin{cases} 0 & \text{dla } s \neq k, \\ a_{\beta_k} (a_{\beta_{sk}})^{-1} & \text{dla } s = k. \end{cases}$$

Wracając do rozwiązania ogólnego (1.14) należy podkreślić, że aczkolwiek szereg ten został określony na zbiorze liczb zespolonych, to każdej wartości β_s w postaci (1.15) odpowiada wyłącznie część rzeczywista $T(\varrho)$. Można bowiem wykazać, że

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(\varrho^{\beta_s} - \varrho^{-\beta_s-1}) &= \operatorname{Im} P_{\beta_s}(\mu) = 0, \\ \operatorname{Re} P_{\beta_s}(\mu) &\neq 0, \quad \operatorname{Im}(\varrho^{\beta_s} - \varrho^{-\beta_s-1}) \neq 0, \end{aligned}$$

a ciąg stałych $A_{\beta_{sk}}$ okazał się urojony.

Funkcje Legendre'a w rozwiązaniu (1.14) mogą być brane w rozmaitych postaciach podobnie jak w rozwiązaniach podanych w p. 1.2. Spośród przedstawień całkowych ważniejszymi są następujące:

$$(1.26) \quad P_{-1/2+i\tau}(\mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\operatorname{ch} \tau \psi}{\sqrt{2 \cos \psi - \cos \theta}} d\psi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

oraz dla dużych wartości τ wyrażenie

$$(1.27) \quad P_{-1/2+i\tau}(\mu) \approx \frac{e^{\tau\theta}}{\sqrt{2\pi\tau \sin \theta}}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Przy rzeczywistych wartościach τ i $-1 < \mu < 1$ funkcja $P_{-1/2+i\tau}(\mu)$ jest rzeczywista i ciągła oraz spełnia następujące równości:

$$(1.28) \quad \lim_{\mu \rightarrow -1} P_{-1/2+i\tau}(\mu) = \infty, \quad P_{-1/2+i\tau}(\mu) = P_{-1/2-i\tau}(\mu), \quad P_{-1/2+i\tau}(1) = 1.$$

Równości (1.28) są spełnione dla dowolnych wartości τ .

Szczególne przypadki rozkładu temperatury w ciałach ograniczonych powierzchniami kulistymi i stożkowymi rozważane były przez autora w pracach [19 i 24].

2. Ustalony stan naprężenia i przemieszczenia

2.1. Sformułowanie zagadnienia. Rozważa się swobodne ciało sprężyste o obszarze, który zdefiniowany został poprzednio (w p. 1.1). W obszarze ciała (1.1) panuje znane (wyznaczone w rozdziale 1) pole temperatury $T(\varrho, \mu)$, które wywołuje osiowosymetryczny stan naprężenia i przemieszczenia. Zakłada się, że ciało jest jednorodne i izotropowe, a stałe materiałowe E i ν nie zależą od temperatury.

Zagadnienie polega na rozwiązaniu układu równań klasycznej teorii termosprężystości, tj. równań równowagi wewnętrznej, uogólnionych równań fizycznych i równań geometrycznych:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= 0, \\ \sigma_{ij} &= 2G \left[\varepsilon_{ij} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} e - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha_T T \right) \delta_{ij} \right], \end{aligned}$$

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

z warunkami brzegowymi

$$(2.2) \quad \sigma_{ij} n_j = 0.$$

Rozwiązanie zagadnienia termosprężystej równowagi rozważanego ciała buduje się w postaci:

$$(2.3) \quad S = S_\alpha^{(0)} + S_\alpha^{(1)} + S_\beta^{(2)}.$$

W rozwiązaniu powyższym $S_\alpha^{(0)}$ jest szczególnym rozwiązaniem równań pola (2.1), danym przez potencjał termosprężystego przemieszczenia $\Phi_\alpha(\varrho, \mu)$, a $S_\alpha^{(1)}$ i $S_\beta^{(2)}$ są ogólnymi jednorodnymi rozwiązaniami pierwszego i drugiego problemu, spełniającymi równania (2.1) przy $T(\varrho, \mu) = 0$ oraz pewne warunki brzegowe, tak aby (2.3) spełniało w sposób ścisły wszystkie równania postawionego zagadnienia, tzn. (2.1) i (2.2).

Poniżej zajmiemy się skonstruowaniem powyższych trzech rozwiązań posługując się metodami trójwymiarowej teorii termosprężystości.

2.2. Szczególne rozwiązania potencjalne. Obecnie przystąpimy do określenia szczególnego rozwiązania potencjalnego $S_\alpha^{(0)}$, które dane będzie przez potencjał termosprężystego przemieszczenia $\Phi_\alpha(\varrho, \mu)$. Ograniczymy się przy tym do potencjału odpowiadającego polu temperatury, które wyznaczone zostało w rozdziale 1 i opisane wzorem (1.8). Podobnie zresztą można zbudować potencjał odpowiadający polu temperatury (1.14).

Niech zatem w obszarze rozważanej powłoki (1.1) panuje rozkład temperatury (1.8), który można przedstawić w postaci szeregu Lauranta:

$$(2.4) \quad T(\varrho, \mu) = \sum_r C_{\alpha_r} \varrho^{\alpha_r} P_{\alpha_r}(\mu), \quad r = 0 \pm 1, \pm 2, \dots,$$

gdzie C_{α_r} jest następującym ciągiem liczbowym:

$$(2.5) \quad C_{\alpha_r} = (b_{\alpha_r} - a_{\alpha_r} \varrho_1^{\alpha_r+1}) (1 - \varrho_1^{2\alpha_r+1})^{-1},$$

przy czym

$$(2.6) \quad a_{-\alpha_r-1} = a_{\alpha_r}, \quad b_{-\alpha_r-1} = b_{\alpha_r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Funkcja (2.4) spełnia równanie harmoniczne Laplace'a, przeto funkcja wyrażająca potencjał termosprężystego przemieszczenia w postaci

$$(2.7) \quad \Phi(\varrho, \mu) = \frac{m}{2} \sum_r \frac{C_{\alpha_r}}{2\alpha_r+3} \varrho^2 H_{\alpha_r}(\varrho, \mu), \quad H_{\alpha_r}(\varrho, \mu) = \mu^{\alpha_r} P_{\alpha_r}(\mu)$$

jest szczególnym rozwiązaniem równania Poissona

$$(2.8) \quad \Delta\Phi = mT, \quad m = a_T(1+\nu)(1-\nu)^{-1}.$$

W przypadku osiowosymetrycznym składowe stanu naprężenia i przemieszczenia wyrażają się przez potencjał termosprężystego przemieszczenia wzorami, które w bezwymiarowych współrzędnych sferycznych mają postać:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varrho\varrho} &= 2G(\Phi_{,\varrho\varrho} - mT), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2G\varrho^{-1}(\Phi_{,\varrho} + \varrho^{-1}\mu\bar{\mu}^{-1}\Phi_{,0} - m\varrho T), \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2G\varrho^{-1}(\Phi_{,\varrho} + \varrho^{-1}\Phi_{,\theta\theta} - m\varrho T), \end{aligned}$$

$$\sigma_{\varrho\theta} = 2G(\varrho^{-1}\Phi_{,\theta})_{,\varrho}, \quad \sigma_{\varphi\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = 0,$$

$$(2.10) \quad u_{\varrho} = \Phi_{,\varrho} r_2, \quad u_{\theta} = \varrho^{-1}\Phi_{,\theta} r_2, \quad u_{\phi} = 0.$$

Korzystając z powyższych związków i wykonując odpowiednie operacje na funkcji (2.7), otrzymamy naprężenia i przemieszczenia odpowiadające rozwiązaniu potencjalnemu $S_{\alpha}^{(0)}$. Ograniczymy się tutaj do potencjału (2.7), tzn. przyjmiemy

$$(2.11) \quad \Phi_{\alpha} = \frac{m}{2} \sum_r (2\alpha_r+3)^{-1} C_{\alpha_r} \varrho^2 H_{\alpha_r}, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

W ten sposób otrzymamy

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varrho\varrho}^{(0)} &= mG \sum_r (\alpha_r^2 - \alpha_r - 4) (2\alpha_r+3)^{-1} C_{\alpha_r} H_{\alpha_r}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= -mG \sum_r (2\alpha_r+3)^{-1} C_{\alpha_r} [(\alpha_r+2)^2 H_{\alpha_r} - \mu H_{\alpha_r, \mu}], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} &= -mG \sum_r (2\alpha_r+3)^{-1} C_{\alpha_r} [(3\alpha_r+4) H_{\alpha_r} + \mu H_{\alpha_r, \mu}], \\ \sigma_{\varrho\theta}^{(0)} &= -mG \sum_r (\alpha_r+1) (2\alpha_r+3)^{-1} C_{\alpha_r} \bar{\mu} H_{\alpha_r, \mu}, \\ \sigma_{\varphi\theta}^{(0)} &= \sigma_{\theta\varphi}^{(0)} = 0, \quad \bar{\mu} = \sin \theta \end{aligned}$$

oraz

$$(2.13) \quad \begin{aligned} u_{\varrho}^{(0)} &= \frac{mr_2}{2} \sum_r (\alpha_r + 2)(2\alpha_r + 3)^{-1} C_{\alpha_r} \varrho H_{\alpha_r}, \\ u_{\theta}^{(0)} &= -\frac{mr_2}{2} \sum_r (2\alpha_r + 3)^{-1} C_{\alpha_r} \varrho \bar{\mu} H_{\alpha_r, \mu}, \\ u_{\varphi}^{(0)} &= 0, \quad \mu = \cos \theta. \end{aligned}$$

Zbadamy teraz stan naprężenia na powierzchniach granicznych i powierzchni brzegowej rozważanego ciała. Ze wzorów (2.12) wynika, że na powierzchniach kulistych wystąpiły naprężenia normalne i styczne:

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varrho\varrho}^{(0)}(\varrho_k, \mu) &= \sum_r A_{\alpha_r}^{(0)} H_{\alpha_r}(\varrho_k, \mu), \\ \sigma_{\varrho\theta}^{(0)}(\varrho_k, \mu) &= \sum_r B_{\alpha_r}^{(0)} \bar{\mu} H_{\alpha_r, \mu}(\varrho_k, \mu), \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.15) \quad \begin{aligned} A_{\alpha}^{(0)} &= mG (\alpha^2 - \alpha - 4) (2\alpha + 3)^{-1} C_{\alpha}, \\ B_{\alpha}^{(0)} &= -mG (\alpha + 1) (2\alpha + 3)^{-1} C_{\alpha}. \end{aligned}$$

Podobnie na powierzchni wydrążenia stożkowego obliczone ze wzorów (2.12) naprężenia normalne i styczne są następujące:

$$(2.16) \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(\varrho, \mu_1) = \sum_r C_{\alpha_r}^{(0)} \mu_1 H_{\alpha_r, \mu_1}, \quad \sigma_{\varrho\theta}^{(0)}(\varrho, \mu_1) = \sum_r D_{\alpha_r}^{(0)} H_{\alpha_r, \mu_1},$$

gdzie

$$(2.17) \quad C_{\alpha}^{(0)} = mG (2\alpha + 3)^{-1} C_{\alpha}, \quad D_{\alpha}^{(0)} = -mG (\alpha + 1) (2\alpha + 3)^{-1} C_{\alpha}.$$

W ten sposób wyznaczony został stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(0)}$ i przemieszczenia $u_i^{(0)}$, który odpowiada szczególnemu rozwiązaniu $S_{\alpha}^{(0)}$ równań pola (2.1), a który jednak nie spełnia postawionych warunków brzegowych (2.2).

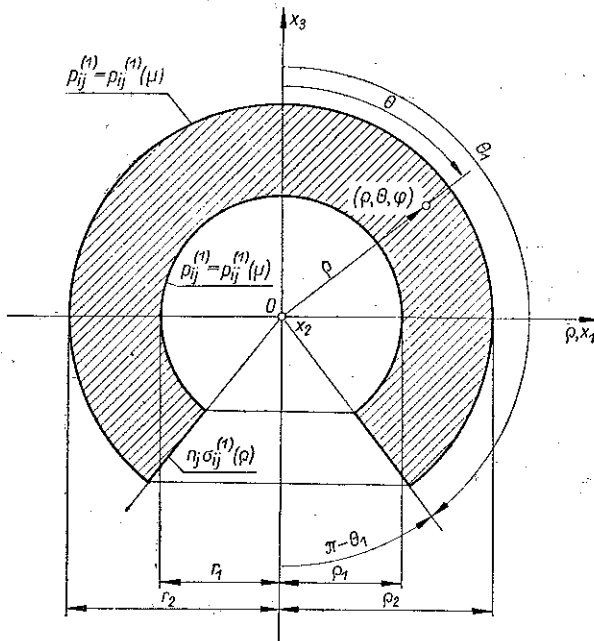
W dalszym ciągu poszukiwać będziemy rozwiązań dla stanów dodatkowych likwidujących odpowiednie naprężenia na powierzchniach granicznych i powierzchni brzegowej ciała; pozwoli to spełnić warunki brzegowe (2.2).

Pierwszy dodatkowy stan ma likwidować naprężenia potencjalne $\sigma_{ij}^{(0)}$ na powierzchniach kulistych $\varrho = \varrho_k$ i odpowiada ogólnemu rozwiązaniu I problemu $S_{\alpha}^{(1)}$, a drugi dodatkowy stan ma likwidować wszelkie naprężenia $\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}$ na powierzchni stożkowej $\mu = \mu_1$ i odpowiada rozwiązaniu II problemu $S_{\alpha}^{(2)}$.

2.3. Ogólne rozwiązanie I problemu. Ogólnym rozwiązaniem I problemu nazywać będziemy takie rozwiązanie równań teorii sprężystości, dla którego naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$ przyjmują na powierzchniach granicznych ciała $\varrho = \varrho_k$ z góry dane wartości równoważące się z pewnymi naprężeniami na powierzchni brzegowej $\mu = \mu_1$ (rys. 2).

Niech powierzchnie kuliste, ograniczające rozważane ciało, poddane będą działaniu obciążenia normalnego i stycznego równego co do wielkości bezwzględnej naprężeniom potencjalnym (2.14) lecz przeciwnie skierowane:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} p_{\varrho\varrho}^{(1)}(\varrho k, \mu) &\equiv - \sum_r A_{\alpha r}^{(0)} H_{\alpha r}(\varrho k, \mu), \\ p_{\varrho\theta}^{(1)}(\varrho k, \mu) &\equiv - \sum_r B_{\alpha r}^{(0)} \bar{\mu} H_{\alpha r, \mu}(\varrho k, \mu), \quad k = 1, 2, \quad \mu_1 < \mu < 1. \end{aligned}$$



Rys. 2

Powierzchnia stożkowa ograniczająca ciało niech pozostaje pod wpływem dowolnego stanu obciążeń normalnych i stycznych, który równoważy stan obciążeń (2.18). Wtedy w obszarze ciała (1.1) wystąpi stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$ i przemieszczenia $u_i^{(1)}$, który zamierzamy wyznaczyć.

Skorzystamy przy tym z funkcji Galerkinia [25, 26 i 27] posługując się pewnymi biharmonicznymi funkcjami naprężeń Ψ_i ($i = 1, 2, 3$).

Z funkcji będących rozwiązaniami równań teorii sprężystości przyjmujemy trzy liniowo niezależne, które w ogólnym przypadku mają postać

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \Psi_1 &= \Psi \cos \varphi, \\ \Psi_2 &= \Psi \sin \varphi, \\ \Psi_3 &= -A_\alpha (\alpha + 1)^{-1} \varrho^{\alpha+1} P_{\alpha+1}(\mu) + B_\alpha \alpha^{-1} \varrho^{-\alpha} P_{\alpha-1}(\mu) + \\ &\quad + C_\alpha (\alpha + 1) (2\alpha + 5)^{-1} \varrho^{\alpha+3} P_{\alpha+1}(\mu) + D_\alpha \alpha (2\alpha - 3)^{-1} \varrho^{-\alpha+2} P_{\alpha-1}(\mu), \end{aligned}$$

gdzie

$$\Psi = -C_\alpha(2\alpha+5)^{-1} \varrho^{\alpha+3} P_{\alpha+1, \theta}(\mu) + D_\alpha(2\alpha-3)^{-1} \varrho^{-\alpha+2} P_{\alpha-1, \theta}(\mu).$$

Korzystając następnie ze znanych formuł [25] wyrażających naprężenia i przemieszczenia przez funkcje naprężeń Ψ_i otrzymamy dla osiowej symetrii

$$\sigma_{\varrho\varrho}^{(1)} = \sum_r \{A_{\alpha_r}^{(1)} \alpha_r (\alpha_r - 1) \varrho^{-2} + B_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r + 1) (\alpha_r + 2) \varrho^{-2\alpha_r - 3} - C_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r + 1) \times \\ \times (\alpha_r + 1) (\alpha_r - 2) - 2\nu\} + D_{\alpha_r}^{(1)} \alpha_r [\alpha_r (\alpha_r + 3) - 2\nu] \varrho^{-2\alpha_r - 1} \} H_{\alpha_r}, \\ H_\alpha = H_\alpha(\varrho, \mu),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \sum_r \{A_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r H_{\alpha_r} - \mu H_{\alpha_r, \mu}) \varrho^{-2} - B_{\alpha_r}^{(1)} [(\alpha_r + 1) H_{\alpha_r} + \mu H_{\alpha_r, \mu}] \varrho^{-2\alpha_r - 3} - \\ - C_{\alpha_r}^{(1)} [(\alpha_r + 1) (\alpha_r - 2) - 2(2\alpha_r + 1)\nu] H_{\alpha_r} + (\alpha_r + 5 - 4\nu) \mu H_{\alpha_r, \mu} \} + \\ + D_{\alpha_r}^{(1)} [\alpha_r (2(2\alpha_r + 1)\nu - \alpha_r - 3) H_{\alpha_r} - (\alpha_r - 4 + 4\nu) \mu H_{\alpha_r, \mu}] \varrho^{-2\alpha_r - 1} \},$$

$$(2.20) \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = - \sum_r \{A_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r^2 H_{\alpha_r} - \mu H_{\alpha_r, \mu}) \varrho^{-2} - B_{\alpha_r}^{(1)} [(\alpha_r + 1)^2 H_{\alpha_r} - \\ - \mu H_{\alpha_r, \mu}] \varrho^{-2\alpha_r - 3} + C_{\alpha_r}^{(1)} [(\alpha_r + 1) (\alpha_r^2 + 4\alpha_r + 2 + 2\nu) H_{\alpha_r} - (\alpha_r + 5 - \\ - 4\nu) \mu H_{\alpha_r, \mu}] - D_{\alpha_r}^{(1)} [\alpha_r (\alpha_r^2 - 2\alpha_r - 1 + 2\nu) H_{\alpha_r} - (\alpha_r - \\ - 4 + 4\nu) \mu H_{\alpha_r, \mu}] \varrho^{-2\alpha_r - 1} \},$$

$$\sigma_{\varrho\theta}^{(1)} = \sum_r [-A_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r - 1) \varrho^{-2} + B_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r + 2) \varrho^{-2\alpha_r - 3} + \\ + C_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r^2 + 2\alpha_r - 1 + 2\nu) + D_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r^2 - 2 + 2\nu) \varrho^{-2\alpha_r - 1}] \bar{\mu} H_{\alpha_r, \mu},$$

$$\sigma_{\varphi\theta}^{(1)} = 0,$$

$$\sigma_{\theta\varrho}^{(1)} = 0,$$

oraz

$$u_\theta^{(1)} = (2G)^{-1} r_2 \sum_r [-A_{\alpha_r}^{(1)} \varrho^{-1} - B_{\alpha_r}^{(1)} \varrho^{-2\alpha_r - 2} - C_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r + 5 - 4\nu) \varrho + \\ + D_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r - 4 + 4\nu) \varrho^{-2\alpha_r}] \bar{\mu} H_{\alpha_r, \mu},$$

$$(2.21) \quad u_\varrho^{(1)} = (2G)^{-1} r_2 \sum_r [A_{\alpha_r}^{(1)} \alpha \varrho^{-1} - B_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r + 1) \varrho^{-2\alpha_r - 2} - \\ - C_{\alpha_r}^{(1)} (\alpha_r + 1) (\alpha_r - 2 + 4\nu) \varrho + D_{\alpha_r}^{(1)} \alpha_r (\alpha_r + 3 - 4\nu) \varrho^{-2\alpha_r}] H_{\alpha_r},$$

$$u_\varphi^{(1)} = 0.$$

Powyższe wzory pozwalają określić stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$ i przemieszczenia $u_i^{(1)}$ w rozważanym obszarze wycinka kuli, gdy tylko określone zostaną ciągi stałych $A_\alpha^{(1)}$, $B_\alpha^{(1)}$, $C_\alpha^{(1)}$ i $D_\alpha^{(1)}$. Stałe te wyznaczamy z warunków danego obciążenia (2.18), które prowadzą do układu algebraicznych równań liniowych:

$$(2.22) \quad A_\alpha^{(1)} \alpha (\alpha - 1) \varrho_k^{-2} + B_\alpha^{(1)} (\alpha + 1) (\alpha + 2) \varrho_k^{-2\alpha - 3} - C_\alpha^{(1)} (\alpha + 1) [(\alpha + 1) \times \\ \times (\alpha - 2) - 2\nu] + D_\alpha^{(1)} \alpha [\alpha (\alpha + 3) - 2\nu] \varrho_k^{-2\alpha - 1} = -A_\alpha^{(0)},$$

$$(2.22) \quad -A_{\alpha}^{(1)}(a-1)\varrho_k^{-2} + B_{\alpha}^{(1)}(a+2)\varrho_k^{-2\alpha-3} + C_{\alpha}^{(1)}(a^2+2a-1+2\nu) + \\ [c.d.] \quad + D_{\alpha}^{(1)}(a^2-2+2\nu)\varrho_k^{-2\alpha-1} = -B_{\alpha}^{(0)}.$$

Rozwiązanie powyższego układu równań daje poszukiwane ciągi stałych:

$$(2.23) \quad A_{\alpha}^{(1)} = -(1 - \varrho_1^{2\alpha+1})(1 - \varrho_1^{2\alpha+3})(a-1)^{-1} [(a+1)c_{-\alpha-1} - ad_{-\alpha-1}] \times \\ \times [c_{\alpha}A_{\alpha}^{(0)} + (a+1)d_{\alpha}B_{\alpha}^{(0)}] \Delta_{\alpha}^{-1}, \quad \alpha \neq 0, 1, \\ B_{\alpha}^{(1)} = \{-(1 - \varrho_1^{2\alpha-1})(1 - \varrho_1^{2\alpha+3}) [(a+1)c_{-\alpha-1} - ad_{-\alpha-1}] (A_{\alpha}^{(0)} + aB_{\alpha}^{(0)} + \\ + \varrho_1^{2\alpha-1}(1 - \varrho_1^2)^2 a(c_{-\alpha-1} + d_{-\alpha-1}) [A_{\alpha}^{(0)} - (a+1)B_{\alpha}^{(0)}] \} \Delta_{\alpha}^{-1}, \quad \alpha \neq -1, \\ C_{\alpha}^{(1)} = \varrho_1^{2\alpha+1}(1 - \varrho_1^2)(1 - \varrho_1^{2\alpha+1}) a(a+2)^{-1} (c_{-\alpha-1} + d_{-\alpha-1}) \times \\ \times [c_{\alpha}A_{\alpha}^{(0)} + (a+1)d_{\alpha}B_{\alpha}^{(0)}] \Delta_{\alpha}^{-1}, \quad \alpha \neq -1, -2, \\ D_{\alpha}^{(1)} = -\varrho_1^{2\alpha-1}(1 - \varrho_1^2)(1 - \varrho_1^{2\alpha+3})(2a+1) [c_{\alpha}A_{\alpha}^{(0)} + (a+1)d_{\alpha}B_{\alpha}^{(0)}] \Delta_{\alpha}^{-1}, \\ \alpha \neq 0,$$

gdzie

$$(2.24) \quad \Delta_{\alpha} = (1 - \varrho_1^{2\alpha-1})(1 - \varrho_1^{2\alpha+3}) [(a+1)c_{-\alpha-1} - ad_{-\alpha-1}] [ac_{\alpha} - (a+1)d_{\alpha}] + \\ + \varrho_1^{2\alpha-1}(1 - \varrho_1^2) a(a+1)(c_{\alpha} + d_{\alpha})(c_{-\alpha-1} + d_{-\alpha-1}),$$

a współczynniki

$$(2.25) \quad c_{\alpha} = a^2 + 2a - 1 + 2\nu, \quad d_{\alpha} = a^2 - a - 2 - 2\nu.$$

Stan zewnętrznych obciążeń ciała, który odpowiada rozwiązaniu $S_{\alpha}^{(1)}$, jest z założenia samorzównoważony; obciążenia powierzchni granicznych równoważą obciążenia powierzchni brzegowej.

Podobnie jak w stanie potencjalnym tak i tutaj na powierzchni brzegowej pojawiły się naprężenia normalne i styczne, które według (2.20)_{3,4}

$$(2.26) \quad \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\varrho, \mu_1) = \sum_r [A_{\alpha_r}^{(1)}\varrho^{-2} + B_{\alpha_r}^{(1)}\varrho^{-2\alpha_r-3} - C_{\alpha_r}^{(1)}(a+5-4\nu) + \\ + D_{\alpha_r}^{(1)}(a_r-4+4\nu)] \mu_1 H_{\alpha_r, \mu_1}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\varrho, \mu_1) = \sum_r [-A_{\alpha_r}^{(1)}(a_r-1)\varrho^{-2} + B_{\alpha_r}^{(1)}(a_r+2)\varrho^{-2\alpha_r-3} + \\ + C_{\alpha_r}^{(1)}(a_r^2+2a_r-1+2\nu) + D_{\alpha_r}^{(1)}(a_r^2-\alpha_r-2\nu)\varrho^{-2\alpha_r-1}] \mu_1 H_{\alpha_r, \mu_1}.$$

Naprężenia brzegowe (2.26) są w ogólności różne od zera i nie czynią zadość jednorodnym warunkom brzegowym (2.2), podobnie jak to miało miejsce w stanie potencjalnym.

Jest rzeczą oczywistą, że suma sił $(\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}) n_j$ jest na powierzchniach kulistych równa zeru, a na powierzchni wydrążenia stożkowego suma ta przedstawia samorzównoważony układ naprężeń normalnych i stycznych, tak że rzut głównego wektora sił brzegowych na kierunek osi symetrii ciała równa się tożsamościowo zeru. Widoczne jest po uwzględnieniu wzorów (2.20) i (2.21), że rozwiązania

$S_\alpha^{(1)}$ dla pierwiastków $\alpha = 0, \pm 1, -2$ stają się równe zero, co odpowiada przemieszczeniu się ciała jako ciała sztywnego. Z tego powodu współczynniki $A_0^{(1)}$, $A_1^{(1)}, B_{-1}^{(1)}, C_{-1}^{(1)}, C_{-2}^{(1)}$ i $D_0^{(1)}$ są w dalszym ciągu nieokreślone.

Naprężenia odpowiadające pierwiastkom $\alpha = 0, 1$, są także równe zero, co jest zgodne z ogólną teorią naprężeń (3). Wiadomo bowiem, że harmoniki T_0 i T_1 odpowiadające polu temperatury (2.4) są liniowymi funkcjami (w układzie współrzędnych x_1, x_2, x_3) i nie dają naprężeń w obszarze jednorodnym.

Wykażemy teraz, że naprężenia i przemieszczenia odpowiadające rozwiązaniom $S_\alpha^{(0)}$, $S_\alpha^{(1)}$, wyrażone przez nieskończone szeregi, są zbieżne bezwzględnie i jednostajnie wewnątrz rozpatrywanego obszaru, tj. dla

$$r_1 + \varepsilon < r < r_2 - \varepsilon, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad [0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(r_2 - r_1)].$$

Aby tego dowiedzieć, wystarczy z uwagi na postać (2.3), (2.12), (2.13) i (2.20) ustalić bezwzględną i jednostajną zbieżność szeregów postaci,

$$\sum_n G(n) t^n P_n(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$$

przy założeniu, że:

$$|t| < 1 - \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0) \quad \text{dla} \quad n \geq 0,$$

$$|t| > 1 + \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0) \quad \text{dla} \quad n < 0$$

oraz, że $G(n)$ jest funkcją wymierną.

Zbieżność ta wynika natychmiast, jeśli zauważymy, że

$$|P_n(\mu)| \leq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|G_{n+1}|}{|G_n|} = 1.$$

Dowód ten pozostaje także ważny dla szeregów opisujących pole temperatury w p. 1.2.

2.4. Ogólne rozwiązanie II problemu. Ogólnym rozwiązaniem II problemu będzie takie rozwiązanie równań teorii sprężystości $S_\beta^{(2)}$, któremu odpowiadające naprężenia $\sigma_{ij}^{(2)}$ spełniają jednorodne warunki na powierzchniach granicznych $\varrho = \varrho_k$, a na powierzchni brzegowej $\mu = \mu_1$ przyjmują z góry dane wartości (rys. 3).

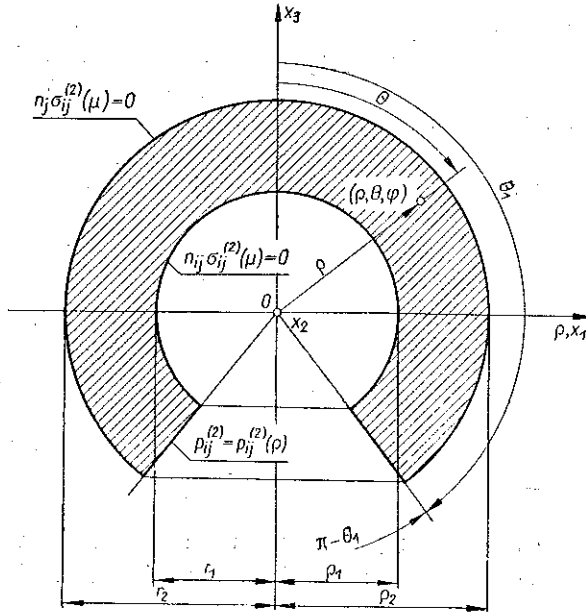
Mamy zatem do czynienia z zagadnieniem obciążeń brzegowych w wycinku grubej warstwy kulistej, gdzie dany jest samozrównoważony układ obciążeń:

$$(2.27) \quad \begin{aligned} p_{\theta\theta}^{(2)}(\varrho, \mu_1) &\equiv -\sigma_{\theta\theta}^{(0)}(\varrho, \mu_1) - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\varrho, \mu_1), \\ p_{\varrho\theta}^{(2)}(\varrho, \mu_1) &\equiv -\sigma_{\varrho\theta}^{(0)}(\varrho, \mu_1) - \sigma_{\varrho\theta}^{(1)}(\varrho, \mu_1). \end{aligned}$$

W pierwszym etapie poszukiwać będziemy takiego układu szczególnych rozwiązań, które by na powierzchniach kulistych $\varrho = \varrho_k$ dawały naprężenia normalne i styczne $\sigma_{\varrho\varrho}^{(2)}$ i $\sigma_{\varrho\theta}^{(2)}$ równe zero, a na powierzchni stożkowej $\mu = \mu_1$ naprężenia $\sigma_{\theta\theta}^{(2)}$ i $\sigma_{\varrho\theta}^{(2)}$ o dość dowolnych wartościach.

(3) Por. odpowiednie twierdzenie w monografii [28] na stronie 95.

Takie różne od zera rozwiązania regularne w całym obszarze ($\varrho_1 \leq \varrho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$) nie istnieją. Jednak w przypadku rozważanego obszaru wystarczy, aby poszukiwane rozwiązania były regularne w obszarze nie zawierającym bieguna $\theta = \pi$.



Rys. 3.

Niech składowe stanu naprężenia $\sigma_{ij}^{(2)}$ wyrażone przez funkcje naprężeń Galerina mają tutaj podobną postać jak w rozwiązaniu $S_\alpha^{(1)}$, tzn.

$$\sigma_{\varrho\varrho}^{(2)} = \sum_s [-\beta_s A_{\beta_s}^{(2)} \varrho^{\beta_s-2} + (\beta_s+1) B_{\beta_s}^{(2)} \varrho^{-\beta_s-3} + c_{\beta_s} C_{\beta_s}^{(2)} \varrho^{\beta_s} + c_{-\beta_s-1} D_{\beta_s}^{(2)} \varrho^{-\beta_s-1}] P_{\beta_s}(\mu), \quad (2.28)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \sum_s (A_{\beta_s}^{(2)} \varrho^{\beta_s-2} + B_{\beta_s}^{(2)} \varrho^{-\beta_s-3} + C_{\beta_s}^{(2)} d_{\beta_s} \varrho^{\beta_s} + D_{\beta_s}^{(2)} d_{-\beta_s-1} \varrho^{-\beta_s-1}) P_{\beta_s, \mu}(\mu) \bar{\mu},$$

gdzie oznaczono

$$c_\beta = (\beta+1)^2 (\beta-2) + 2\nu (\beta+1), \quad d_\beta = \beta (\beta+2) - 1 + 2\nu, \quad (2.29)$$

$$c_{-\beta-1} = \beta^2 (\beta+3) - 2\nu\beta, \quad d_{-\beta-1} = \beta^2 - 2 + 2\nu.$$

Poszukuje się rozwiązania, dla którego powierzchnie kuliste są wolne od naprężeń, tj. przy $\varrho = \varrho_1$ i $\varrho = 1$ powinno być $\sigma_{\varrho\varrho}^{(2)} = 0$ i $\sigma_{\theta\theta}^{(2)} = 0$. Jeśli skorzystamy ze wzorów (2.28), to warunki te mają postać czterech liniowych jednorodnych równań dla stałych $A_{\beta_s}^{(2)}$, $B_{\beta_s}^{(2)}$, $C_{\beta_s}^{(2)}$ i $D_{\beta_s}^{(2)}$.

Dla β -tej harmoniki otrzymamy

$$(2.30) \quad \begin{aligned} A_{\beta}^{(2)} \beta \varrho_k^{\beta-2} - B_{\beta}^{(1)} (\beta+1) \varrho_k^{-\beta-3} - C_{\beta}^{(2)} c_{\beta} \varrho_k^{\beta} - D_{\beta}^{(2)} c_{-\beta-1} \varrho_k^{-\beta-1} &= 0, \\ A_{\beta}^{(2)} \varrho_k^{\beta-2} + B_{\beta}^{(2)} \varrho_k^{-\beta-3} + C_{\beta}^{(2)} d_{\beta} \varrho_k^{\beta} + D_{\beta}^{(2)} d_{-\beta-1} \varrho_k^{-\beta-1} &= 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Aby układ (2.30) posiadał rozwiązania niezerowe, wyznacznik podstawowy powinien przyjmować wartość zera, a współczynniki przy tym warunku można przyjąć proporcjonalne do minora elementu pierwszego wiersza wyznacznika podstawowego. Otrzymamy zatem

$$(2.31) \quad \begin{aligned} A_{\beta}^{(2)} &= (c_{\beta} d_{-\beta-1} - c_{-\beta-1} d_{\beta}) \varrho_1^{-1} - d_{\beta} [(\beta+1) d_{-\beta-1} - c_{-\beta-1}] \varrho_1^{-2\beta-4} + \\ &\quad + d_{-\beta-1} [(\beta+1) d_{\beta} - c_{-\beta-1}] \varrho_1^{-3}, \\ B_{\beta}^{(2)} &= (c_{-\beta-1} d_{\beta} - c_{\beta} d_{-\beta-1}) \varrho_1^{-1} - d_{\beta} (\beta d_{-\beta-1} + c_{-\beta-1}) \varrho_1^{-3} + \\ &\quad + d_{-\beta-1} (\beta d_{\beta} + c_{\beta}) \varrho_1^{2\beta-2}, \\ C_{\beta}^{(2)} &= [(\beta+1) d_{-\beta-1} - c_{-\beta-1}] \varrho_1^{-2\beta-4} + (\beta d_{-\beta-1} + c_{-\beta-1}) \varrho_1^{-3} - \\ &\quad - d_{-\beta-1} (2\beta+1) \varrho_1^{-5}, \\ D_{\beta}^{(2)} &= [c_{\beta} - (\beta+1) d_{\beta}] \varrho_1^{-3} - (c_{\beta} + \beta d_{\beta}) \varrho_1^{2\beta-2} + (2\beta+1) d_{\beta} \varrho_1^{-5}. \end{aligned}$$

Dla określenia ciągu β mamy równanie przestępne, które wynika z warunku zerowania się wyznacznika podstawowego układu równań (2.40):

$$(2.32) \quad (c_{\beta} + \beta d_{\beta}) [(\beta+1) d_{-\beta-1} - c_{-\beta-1}] \operatorname{sh}^2 \left[\frac{1}{2} (2\beta+1) \ln \varrho_1 \right] - \\ - (2\beta+1) (c_{\beta} d_{-\beta-1} - c_{-\beta-1} d_{\beta}) \operatorname{sh}^2 (\ln \varrho_1) = 0.$$

Można bezpośrednio sprawdzić, że równanie (2.32) traci sens przy zamianie β na $(-\beta-1)$ i dlatego wprowadza się do dalszych rozważań parametr

$$(2.33) \quad \beta^* = \frac{1}{2} + \beta.$$

Wtedy równanie przyjmie postać:

$$(2.34) \quad \operatorname{sh}^2 (\beta^* \ln \varrho_1) \operatorname{sh}^{-2} (\ln \varrho_1) = \\ = \beta^{*2} \left(\beta^{*4} - \frac{5}{2} \beta^{*2} + \frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \left[\beta^{*4} + \beta^{*2} \left(4(1-\nu^2) - \frac{5}{2} \right) + \frac{9}{16} \right]^{-1}.$$

Łatwo sprawdzić, że równanie (2.34) ma jedynie dwa pierwiastki rzeczywiste: $\beta^* = 0$ i $\beta^* = 1$. Nie są one jednak interesujące, ponieważ odpowiadają rozwiązaniom tożsamościowo równym zeru. Istotnie, przy $\beta^* = 0$, tj. przy $\beta = -1/2$ mamy

$$c_{\beta} = c_{-\beta-1} = \frac{5}{8} + \nu, \quad d_{\beta} = d_{-\beta-1} = -\frac{7}{14} + 2\nu$$

i według (2.41) znajdujemy

$$A_{\beta}^{(2)} = B_{\beta}^{(2)} = C_{\beta}^{(2)} = D_{\beta}^{(2)} = 0.$$

Przy $\beta^* = 1$, tj. przy $\beta = 1/2$, mamy

$$A_{\beta}^{(2)} = \frac{7}{4} - 2\nu, \quad B_{\beta}^{(2)} = C_{\beta}^{(2)} = 0, \quad D_{\beta}^{(2)} = 1.$$

Podstawiając do równań (2.28) otrzymujemy naprężenia tożsamościowo równe zeru.

Przyпускаjąc zatem, że równanie (2.34) ma pierwiastki zespolone

$$(2.35) \quad \beta_s^* = a_s + ib_s, \quad \bar{\beta}_s^* = a_s - ib_s.$$

Pierwiastkom tym będą odpowiadać ciągi zespolone

$$(2.36) \quad \beta_s = -\frac{1}{2} + a_s + ib_s, \quad \bar{\beta}_s = -\frac{1}{2} + a_s - ib_s.$$

Stosownie do przytoczonych poprzednio formuł należy określić ciągi współczynników $A_{\beta}^{(2)}, \dots, D_{\beta}^{(2)}$, zestawić rzeczywiste części funkcji naprężeń Galerkinia, a następnie naprężenia i przemieszczenia odpowiadające pierwiastkom β_s i β_s^* . Wynik tych elementarnych, ale bardzo uciążliwych rachunków, jest następujący:

$$(2.37) \quad \sigma_{\varrho\varrho}^{(\beta, r)} = \operatorname{Re}(\sigma_{\varrho\varrho}^{\beta}), \quad \beta = \beta_s,$$

$$\sigma_{\varrho\varrho}^{\beta} = -e^{-5/2} \{ (a_1 + a_5 \varrho_1^{-2} \varrho^2) \operatorname{ch}(\beta^* \ln \varrho) + (a_2 + a_6 \varrho_1^{-2} \varrho^2) \operatorname{sh}(\beta^* \ln \varrho) +$$

$$+ 2 \operatorname{sh}(\beta^* \ln \varrho_1) (1 - \varrho_1^2)^{-1} [(a_3 + a_7 \varrho^2) \operatorname{ch}(\beta^* \ln \varrho \varrho_1^{-1}) +$$

$$+ (a_4 + a_8 \varrho^2) \operatorname{sh}(\beta^* \ln \varrho \varrho_1^{-1})] \} P_{\beta}(\mu), \quad \beta^* = \beta_s^*,$$

gdzie

$$(2.38) \quad a_1 = -a_5 = \beta^{*1/2} - \frac{5}{2} \beta^{*-1/2} + \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \beta^{*-3/2},$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \beta^{*-1} - \left(\frac{73}{32} - 2\nu^2 \right) \beta^{*-2},$$

$$a_3 = -a_7 = -1 + \left(\frac{3}{2} - \nu \right) \beta^{*-1} + \left(\frac{27}{16} + \frac{1}{4} \nu - 2\nu^2 \right) \beta^{*-2},$$

$$a_4 = -\left(\frac{1}{2} - 2\nu \right) \beta^{*-1/2} - \left(\frac{5}{4} + \frac{7}{2} \nu - 4\nu^2 \right) \beta^{*-3/2} - \left(\frac{21}{32} - \frac{3}{4} \nu \right) \beta^{*-5/2},$$

$$a_6 = \frac{5}{2} - \left(\frac{17}{4} - 2\nu \right) \beta^{*-1} - \left(\frac{35}{32} + \frac{1}{2} \nu - 2\nu^2 \right) \beta^{*-2},$$

$$a_8 = -\left(\frac{3}{2} + 2\nu \right) \beta^{*-1/2} - \left(\frac{7}{4} - \frac{7}{2} \nu - 4\nu^2 \right) \beta^{*-3/2} - \left(\frac{15}{32} + \frac{3}{4} \nu \right) \beta^{*-5/2},$$

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta, r)} &= \operatorname{Re} \sigma_{\varrho\theta}^{\beta}, \quad \beta = \beta_s, \\ \sigma_{\varrho\theta}^{\beta} &= \varrho^{-5/2} \{ (b_2 + b_6 \varrho_1^{-2} \varrho^2) \operatorname{sh} (\beta^* \ln \varrho) + \\ &\quad + 2 \operatorname{sh} (\beta^* \ln \varrho_1) (1 - \varrho_1^2)^{-1} [(b_3 + b_7 \varrho^2) \operatorname{ch} (\beta^* \ln \varrho \varrho_1^{-1}) + \\ &\quad + (b_4 + b_8 \varrho^2) \operatorname{sh} (\beta^* \ln \varrho \varrho_1^{-1})] \} \bar{\mu} P_{\beta, \mu}(\mu), \quad \beta^* = \beta_s^*, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.40) \quad \begin{aligned} b_1 &= b_5 = 0, \\ b_2 &= -1 + \frac{5}{2} \beta^{*-1} - \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \beta^{*-2}, \\ b_3 &= -b_7 = (1 - 2\nu) \beta^{*-1} + \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{2} \nu - 4\nu^2 \right) \beta^{*-2}, \\ b_4 &= -b_8 = \beta^{*-1/2} - \beta^{*-3/2} - \left(\frac{21}{16} - \frac{3}{2} \nu \right) \beta^{*-5/2}, \\ b_6 &= 1 - \left(\frac{9}{2} - 4\nu \right) \beta^{*-1} + \left(\frac{49}{16} - 7\nu + 4\nu^2 \right) \beta^{*-2}. \end{aligned}$$

Łatwo bezpośrednio sprawdzić na podstawie wzorów (2.37) i (2.39), że naprężenie styczne $\sigma_{\varrho\theta}^{\beta}$ dla $\varrho = \varrho_1$ i $\varrho = 1$, a także naprężenie normalne $\sigma_{\varrho\varrho}^{\beta}$ dla $\varrho = \varrho_1$, są równe tożsamościowo zeru. Podobnie $\sigma_{\varrho\varrho}^{\beta}$ dla $\varrho = 1$ przyjmuje wartość zera na mocy równania przestępnego (2.34).

Wyrażenia dla różnicy naprężeń normalnych $\sigma_{\varrho\varrho}^{(\beta, r)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(\beta, r)}$ mają postać taką samą jak (2.37) z zamianą P_{β} na $(1/4 - \beta^*) P_{\beta} + 2\mu P_{\beta, \mu}$ oraz współczynników $a_i(\beta)$ na $c_i(\beta)$, przy czym

$$(2.41) \quad \begin{aligned} c_1 &= \left[\beta^{*-1/2} - \frac{5}{2} \beta^{*-3/2} + \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \beta^{*-5/2} \right] \left(1 - \frac{4}{9} \beta^{*-1} \right)^{-1}, \\ c_2 &= \frac{3}{2} \left[\beta^{*-1} - \frac{5}{2} \beta^{*-2} + \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \beta^{*-3} \right] \left(1 - \frac{4}{9} \beta^{*-1} \right)^{-1}, \\ c_3 &= \left[-\beta^{*-1} - \left(\frac{1}{2} - 3\nu \right) \beta^{*-2} + \left(\frac{3}{16} - \frac{27}{4} \nu + 6\nu^2 \right) \beta^{*-3} \right] \left(1 - \frac{4}{9} \beta^{*-1} \right)^{-1}, \\ c_4 &= \left[-\left(\frac{5}{2} - 2\nu \right) \beta^{*-3/2} + \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{2} \nu + 4\nu^2 \right) \beta^{*-5/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{63}{32} - \frac{9}{4} \nu \right) \beta^{*-7/2} \right] \left(1 - \frac{4}{9} \beta^{*-1} \right)^{-1}, \\ c_5 &= -\beta^{*-1/2} + \left(\frac{25}{4} - 6\nu \right) \beta^{*-3/2}, \\ c_6 &= -\left(\frac{7}{2} - 4\nu \right) \beta^{*-1} + \left(\frac{63}{8} - 16\nu + 8\nu^2 \right) \beta^{*-2}, \end{aligned}$$

$$c_7 = \beta^{*-1} + \left(\frac{3}{4} - 9\nu + 8\nu^2\right) \beta^{*-2},$$

$$c_8 = \left(\frac{9}{2} - 6\nu\right) \beta^{*-3/2} + \left(\frac{27}{8} - 3\nu\right) \beta^{*-5/2}.$$

I wreszcie wyrażenia dla sumy naprężeń normalnych $\sigma_{\theta\theta}^{(\beta, r)} + \sigma_{\varphi\varphi}^{(\beta, r)}$ mają także postać (2.37) z zamianą współczynników $a_i(\beta)$ na $d_i(\beta)$, przy czym

$$(2.42) \quad \begin{aligned} d_1 &= 2e_1 + \left(\frac{1}{4} - \beta^*\right) c_1, \\ d_2 &= 2e_2 + \left(\frac{1}{4} - \beta^*\right) c_2, \\ d_3 &= 2e_3 + \left(\frac{1}{4} - \beta^*\right) c_3, \\ d_4 &= 2e_4 + \left(\frac{1}{4} - \beta^*\right) c_4, \\ d_5 &= \left[(2+\nu)e_5 + 2\nu e_6 \beta^{*1/2} + \left(\frac{1}{4} - \beta^*\right) c_5\right] (1-2\nu)^{-1}, \\ d_6 &= \left[(2+\nu)e_6 + 2\nu e_5 \beta^{*1/2} + \left(\frac{1}{4} - \beta^*\right) c_6\right] (1-2\nu)^{-1}, \\ d_7 &= \left[(2+\nu)e_7 + 2\nu e_8 \beta^{*1/2} + \left(\frac{1}{4} - \beta^*\right) c_7\right] (1-2\nu)^{-1}, \\ d_8 &= \left[(2+\nu)e_8 + 2\nu e_7 \beta^{*1/2} + \left(\frac{1}{4} - \beta^*\right) c_8\right] (1-2\nu)^{-1}. \end{aligned}$$

Wyrażenia dla składowych stanu przemieszczenia można przedstawić w podobnej postaci:

$$(2.43) \quad \begin{aligned} u_\theta^{(\beta, r)} &= \operatorname{Re}(u_\theta^\beta), \quad \beta = \beta_s(\beta_s^*), \\ u_\theta^\beta &= -(1+\nu) E^{-1} r_2 \varrho^{-3/2} \{ (e_1 + e_5 \varrho_1^{-2} \varrho^2) \operatorname{ch}(\beta^* \ln \varrho) + \\ &\quad + (e_2 + e_6 \varrho_1^{-2} \varrho^2) \operatorname{sh}(\beta^* \ln \varrho) + (1 - \varrho_1)^{-1} \operatorname{sh}(\beta^* \ln \varrho_1) \times \\ &\quad \times [(e_3 + e_7 \varrho_1^2) \operatorname{ch}(\beta^* \ln \varrho_1^{-1} \varrho) + (e_4 + e_8 \varrho^2) \operatorname{sh}(\beta^* \ln \varrho_1^{-1} \varrho)] \} P_\beta(\mu), \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.44) \quad \begin{aligned} e_1 &= \left[\beta^{*-1/2} - \frac{5}{2} \beta^{*-3/2} + \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2\right) \beta^{*-5/2} \right] \left(1 - \frac{9}{4} \beta^{*-1}\right)^{-1}, \\ e_2 &= \left\{ \left(1 - \frac{3}{4} \beta^{*-1}\right) \left[1 - \frac{5}{2} \beta^{*-1} + \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2\right) \beta^{*-2} \right] \right\} \left(1 - \frac{9}{4} \beta^{*-1}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_3 &= \left\{ -\beta^{*-1} + \beta^{*-2} + \left(\frac{21}{16} - \frac{3}{2} \nu \right) \beta^{*-3} - \left(1 - \frac{3}{4} \beta^{*-1} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[(1 - 2\nu) \beta^{*-1} + \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{2} \nu - 4\nu^2 \right) \beta^{*-2} \right] \right\} \left(1 - \frac{9}{4} \beta^{*-1} \right)^{-1}, \\
 e_4 &= \left\{ -(1 - 2\nu) \left[\beta^{*-3/2} + \left(\frac{3}{4} + \frac{7}{2} \nu - 4\nu^2 \right) \beta^{*-5/2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \left(1 - \frac{3}{4} \beta^{*-1} \right) \left[\beta^{*-1/2} - \beta^{*-3/2} - \left(\frac{24}{16} - \frac{3}{2} \nu \right) \beta^{*-5/2} \right] \right\} \left(1 - \frac{9}{4} \beta^{*-1} \right)^{-1}, \\
 (2.44) \quad [c.d.] \quad e_5 &= (3 - 4\nu) \beta^{*-1/2} - \left(\frac{19}{4} - 13\nu + 8\nu^2 \right) \beta^{*-3/2}, \\
 e_6 &= -1 + \beta^{*-1} - \left(\frac{35}{16} - 6\nu + 4\nu^2 \right) \beta^{*-2}, \\
 e_7 &= -2(1 - \nu) \beta^{*-1} - \left(\frac{3}{2} - \frac{11}{2} \nu + 4\nu^2 \right) \beta^{*-2}, \\
 e_8 &= \beta^{*-1/2} - \left(\frac{1}{2} - 6\nu + 8\nu^2 \right) \beta^{*-3/2} - \left(\frac{15}{16} - \frac{3}{2} \nu \right) \beta^{*-5/2}.
 \end{aligned}$$

Wyrażenie dla składowej przemieszczenia $u_\theta^{(\beta, r)}$ przedstawia się w takiej postaci jak u_θ^β z zamianą P_β na $P_{\beta, \theta}$ i z zamianą współczynników e_i na c_i , przy czym te ostatnie zostały określone przez (2.41).

Powyższe rozwiązania równań teorii sprężystości mają tę własność, że czynią zadość jednorodnym naprężeniowym warunkom na powierzchniach granicznych ciała.

Do liczby rozwiązań tej klasy można włączyć także trywialne rozwiązania

$$(2.45) \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\varphi\theta} = 0, \quad u_\theta = A \cos \theta, \quad u_\varphi = -A \sin \theta,$$

które odpowiadają przemieszczeniu ciała bez deformacji w kierunku osi symetrii.

Podobnie jak wyżej można zestawić urojone części naprężeń i przemieszczeń $\sigma_{ij}^{(\beta, \vartheta)}$ i $u_{ij}^{(\beta, \vartheta)}$ odpowiadające pierwiastkom β_s i $\bar{\beta}_s$.

W ten sposób wyznaczyliśmy całą klasę jednorodnych rozwiązań równań teorii sprężystości, które odpowiadają wolnym od naprężeń powierzchniom kulistym ciała. Te rozwiązania można wykorzystać do zrealizowania warunków brzegowych na powierzchni wydrążenia stożkowego, ponieważ dodanie ich do rozwiązań dotychczasowych nie wnosi żadnych zmian w warunkach obciążenia kulistych powierzchni ciała.

Jeśli oznaczyć rzeczywistą i urojoną część naprężeń określoną wzorami (2.47-2.52) odpowiednio przez $\sigma_{ij}^{(\beta_s, r)}$ i $\sigma_{ij}^{(\beta_s, \vartheta)}$, to wyrażenia dla naprężeń normalnych i stycznych $\sigma_{ij}^{(2)}$ odpowiadające β_s -tej parze rzeczywistych jednorodnych rozwiązań $S_\beta^{(2)}$ będą następujące:

$$(2.46) \quad \sigma_{ij}^{(2)} = A_{\beta_s} \sigma_{ij}^{(\beta_s, r)} + C_{\beta_s} \sigma_{ij}^{(\beta_s, \vartheta)}.$$

Warunki brzegowe na powierzchni wydrążenia stożkowego $\mu = \mu_1$ napisane zostały w postaci (2.27) i wyrażają prawo rozkładu obciążenia na tej powierzchni. Przy tym $p_{\theta\theta}^{(2)}(\varrho, \mu_1) > 0$, jeśli zewnętrzne normalne obciążenie jest rozciągające, a $p_{\varrho\theta}^{(2)}(\varrho, \mu_1) > 0$, jeśli zewnętrzne styczne obciążenie jest zorientowane w stronę wzrastającego ϱ .

Rozkład obciążenia normalnego i stycznego na powierzchni brzegowej jest statycznie równoważny zeru, tzn.

$$(2.47) \quad \int_{e_1}^1 [\bar{\mu}_1 p_{\theta\theta}^{(2)}(\varrho, \mu_1) + \mu_1 p_{\varrho\theta}^{(2)}(\varrho, \mu_1)] \varrho d\varrho = 0.$$

Tak więc zadanie wyznaczenia ciągów stałych A_{β_s} i C_{β_s} w wyrażeniu (2.46) polega na jednoznacznym przedstawieniu dwóch danych funkcji (2.27) w postaci szeregów:

$$(2.48) \quad \begin{aligned} p_{\theta\theta}^{(2)}(\varrho) &= \sum_{s=1}^{\infty} [A_{\beta_s} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_s, r)}(\varrho, \mu_1) + C_{\beta_s} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_s, i)}(\varrho, \mu_1)], \\ p_{\varrho\theta}^{(2)}(\varrho) &= \sum_{s=1}^{\infty} [A_{\beta_s} \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_s, r)}(\varrho, \mu_1) + C_{\beta_s} \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_s, i)}(\varrho, \mu_1)]. \end{aligned}$$

W praktyce ograniczamy się do s -tej sumy rozważanych szeregów. Wprowadźmy do rozważań (podobnie jak w p. 1.3.) kwadratowe odchylenie funkcji na powierzchni stożkowej $\mu = \mu_1$:

$$(2.49) \quad \begin{aligned} Y(A_{\beta_1}, A_{\beta_2}, A_{\beta_3}, \dots, C_{\beta_1}, C_{\beta_2}, C_{\beta_3}, \dots) &= \\ &= \int_{e_1}^1 \left\{ \left[p_{\theta\theta}^{(2)}(\varrho) - \sum_{s=1}^{\infty} (A_{\beta_s} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_s, r)}(\varrho, \mu_1) + C_{\beta_s} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_s, i)}(\varrho, \mu_1)) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[p_{\varrho\theta}^{(2)}(\varrho) - \sum_{s=1}^{\infty} (A_{\beta_s} \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_s, r)}(\varrho, \mu_1) + C_{\beta_s} \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_s, i)}(\varrho, \mu_1)) \right]^2 \right\} \varrho d\varrho. \end{aligned}$$

Współczynniki A_{β_s} i C_{β_s} ($s = 1, 2, 3, \dots$) określimy z warunku minimum odchylenia kwadratowego Y , co jak wiadomo prowadzi do układu równań liniowych

$$(2.50) \quad \frac{\partial Y}{\partial A_{\beta_s}} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial C_{\beta_s}} = 0.$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenia

$$(2.51) \quad \begin{aligned} a_{\beta_{sk}} &= \int_{e_1}^1 (\sigma_{\theta\theta}^{(\beta_s, r)} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_k, r)} + \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_s, r)} \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_k, r)}) \varrho d\varrho, \\ b_{\beta_{sk}} &= \int_{e_1}^1 (\sigma_{\theta\theta}^{(\beta_s, i)} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_k, r)} + \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_s, i)} \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_k, r)}) \varrho d\varrho, \\ c_{\beta_{sk}} &= \int_{e_1}^1 (\sigma_{\theta\theta}^{(\beta_s, i)} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_k, i)} + \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_s, i)} \sigma_{\varrho\theta}^{(\beta_k, i)}) \varrho d\varrho, \end{aligned}$$

$$(2.51) \quad \begin{aligned} a_{\beta_k} &= \int_{e_1}^1 (p_{\theta\theta}^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_k, r)} - p_{\theta\theta}^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_k, r)}) \varrho d\varrho, \\ c_{\beta_k} &= \int_{e_1}^1 (p_{\theta\theta}^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_k, t)} - p_{\theta\theta}^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_k, t)}) \varrho d\varrho, \end{aligned}$$

to układ równań (2.50) przyjmie postać następującą:

$$(2.52) \quad \begin{aligned} \sum_{s=1}^{\infty} (a_{\beta_{sk}} A_{\beta_s} + b_{\beta_{sk}} C_{\beta_s}) &= a_{\beta_k} \\ \sum_{s=1}^{\infty} (b_{\beta_{ks}} A_{\beta_s} + c_{\beta_{sk}} C_{\beta_s}) &= e_{\beta_k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ciągi stałych $a_{\beta_{sk}}$, $b_{\beta_{sk}}$ i $c_{\beta_{sk}}$ mogą być obliczone dla całej klasy ciał za pomocą całkowania elementarnego. Rozwiązanie nieskończonego układu równań (2.52) daje poszukiwane ciągi stałych A_{β_s} , ..., C_{β_s} .

Tak więc stosownie do skonstruowanego rozwiązania (2.46) możemy wyrazić stan naprężenia i przemieszczenia w postaci nieskończonych szeregów według nieortogonalnych funkcji:

$$(2.53) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^{(2)} &= \sum_{s=1}^{\infty} (A_{\beta_s} \sigma_{ij}^{(\beta_s, r)} + C_{\beta_s} \sigma_{ij}^{(\beta_s, t)}), \\ u_i^{(2)} &= \sum_{s=1}^{\infty} (A_{\beta_s} u_i^{(\beta_s, r)} + C_{\beta_s} u_i^{(\beta_s, t)}). \end{aligned}$$

Szeregi (2.52) są określone za pomocą pierwiastków β_s równania przestępnego (2.34). Ścisłe wyznaczenie wszystkich pierwiastków tego równania jest praktycznie niemożliwe. Autorowi udało się znaleźć następujący nieskończony ciąg pierwiastków β_s^* spełniających ściśle równanie przestępne (2.34):

$$(2.54) \quad \begin{aligned} \beta_s^* &= i\tau_s, \quad \text{tj.} \quad \beta_s = -\frac{1}{2} + i\tau_s, \\ \tau_s &= \frac{s\pi}{\ln \varrho_1}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Nie jest to, jak należy przypuszczać, jedyny układ pierwiastków spełniający równanie (2.34). Niemniej jednak ze względu na strukturę rozwiązań (2.37) i (2.39) oraz zespolone indeksy funkcji Legendre'a $P_{-1/2+i\tau}(\mu)$ zespolony ciąg (2.53) nasuwa się w sposób naturalny i zupełnie wystarcza do opisu zagadnienia.

Zajmiemy się obecnie badaniem nieskończonego układu równań algebraicznych (2.52). Układ równań (2.52) można napisać w postaci macierzowej

$$(2.55) \quad \sum_{s=1}^{\infty} \begin{bmatrix} a_{\beta_{sk}} & b_{\beta_{sk}} \\ b_{\beta_{ks}} & c_{\beta_{sk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\beta_s} \\ C_{\beta_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\beta_k} \\ c_{\beta_k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

lub w postaci

$$(2.56) \quad \begin{bmatrix} A_{\beta_k} \\ C_{\beta_k} \end{bmatrix} = \sum_{s=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \delta_{sk} - a_{\beta_{sk}} & -b_{\beta_{sk}} \\ -b_{\beta_{ks}} & \delta_{sk} - a_{\beta_{sk}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\beta_s} \\ C_{\beta_s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{\beta_k} \\ c_{\beta_k} \end{bmatrix},$$

gdzie nieskończona macierz współczynników tego układu ma postać

$$(2.57) \quad \begin{bmatrix} a_{\beta_{11}} - 1 & b_{\beta_{11}} & a_{\beta_{12}} & b_{\beta_{12}} & \cdot & \cdot \\ b_{\beta_{11}} & c_{\beta_{11}} - 1 & b_{\beta_{12}} & c_{\beta_{12}} & \cdot & \cdot \\ \hline a_{\beta_{21}} & b_{\beta_{21}} & a_{\beta_{21}} - 1 & b_{\beta_{21}} & \cdot & \cdot \\ b_{\beta_{21}} & c_{\beta_{21}} & b_{\beta_{21}} & c_{\beta_{21}} - 1 & \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

a macierz jednokolumnowa wyrazów wolnych — postać

$$(2.58) \quad \begin{bmatrix} a_{\beta_1} \\ c_{\beta_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy (2.57) określone zostały wyrażeniami (2.51)_{1,2,3}, a elementy macierzy (2.58) wyrażeniami (2.51)_{4,5}. Jeśli wykonamy całkowanie zgodnie z tymi wzorami i uwzględnimy, że układ jednorodnych rozwiązań $\sigma_{\theta\theta}^{\beta}$ i $\sigma_{\theta\theta}^{\beta}$ określony jest ciągiem (2.54), to otrzymamy

$$(2.59) \quad a_{\beta_{sk}} = \bar{\mu}_1^2 P_{\beta_s, \mu}(\mu_1) P_{\beta_k, \mu}(\mu_1) \left\{ \frac{75}{8} (1 - \varrho_1^{-3}) \left[\frac{1}{(\tau_s + \tau_k)^2 - 9} - \frac{1}{(\tau_s - \tau_k)^2 - 9} \right] - \left[\left(\frac{45}{4} - 10\nu \right) - \left(\frac{9}{8} - \nu \right)^2 \varrho_1^{-1} \right] (1 - \varrho_1^{-1}) \varrho_1^{-2} \left[\frac{1}{(\tau_s + \tau_k)^2 - 1} - \frac{1}{(\tau_s - \tau_k)^2 - 1} \right] \right\} \frac{1}{\tau_s \tau_k},$$

$$(2.59) \quad b_{\beta_{sk}} = \bar{\mu}_1^2 P_{\beta_s, \mu}(\mu_1) P_{\beta_k, \mu}(\mu_1) \left\{ \frac{15}{4} (1 - \varrho_1^{-3}) \left[\left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \frac{1}{\tau_s^2} - 1 \right] \times \right.$$

$$\times \left[\frac{1}{(\tau_s + \tau_k)^2 - 9} - \frac{1}{(\tau_s - \tau_k)^2 - 9} \right] - \left[\frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{7}{4} - 2\nu \right)^2 \frac{1}{\tau_s^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{9}{4} - 2\nu \right) \left(1 - \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \frac{1}{\tau_s^2} \right) + \left(\frac{9}{4} - 2\nu \right) \left(1 - \left(\frac{7}{4} - 2\nu \right)^2 \frac{1}{\tau_s^2} \right) \varrho_1^{-1} \right] \times$$

$$\times (1 - \varrho_1^{-1}) \varrho_1^{-2} \left[\frac{1}{(\tau_s + \tau_k)^2 - 1} - \frac{1}{(\tau_s - \tau_k)^2 - 1} \right] \left. \right\} \frac{1}{\tau_k},$$

$$\begin{aligned}
 [2.59] \quad c_{\beta_{sk}} &= \bar{\mu}_1^2 P_{\beta_s, \mu}(\mu_1) P_{\beta_k, \mu}(\mu_1) \left\{ \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \frac{1}{\tau_s^2} \right) \left(1 - \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \frac{1}{\tau_k^2} \right) \times \right. \\
 [c.d.] \quad &\times (1 - \varrho_1^{-3}) \left[\frac{1}{(\tau_s + \tau_k)^2 - 9} - \frac{1}{(\tau_s - \tau_k)^2 - 9} \right] + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \frac{1}{\tau_s^2} \right) \times \right. \\
 &\times \left(1 - \left(\frac{7}{4} - 2\nu \right)^2 \frac{1}{\tau_k^2} \right) + \left(1 - \left(\frac{7}{4} - 2\nu \right)^2 \frac{1}{\tau_s^2} \right) \left(1 - \left(\frac{73}{16} - 4\nu^2 \right) \frac{1}{\tau_k^2} \right) + \\
 &\quad \left. + \left(1 - \left(\frac{7}{4} - 2\nu \right)^2 \frac{1}{\tau_s^2} \right) \left(1 - \left(\frac{7}{4} - 2\nu \right)^2 \frac{1}{\tau_k^2} \right) \varrho_1^{-1} \right] \times \\
 &\times \left[\frac{1}{(\tau_s + \tau_k)^2 - 1} - \frac{1}{(\tau_s - \tau_k)^2 - 1} \right] (1 - \varrho_1^{-1}) \varrho_1^{-2} \Big\}.
 \end{aligned}$$

Podobnie wykonując całkowania (2.51)_{4,5} otrzymamy ostateczną postać elementów macierzy jednkolumnowej.

Całkowanie przeprowadzono przy założeniu, że na powierzchni stożkowej $\theta = \theta_1$ dane jest stałe obciążenie styczne $p_{\theta\theta}^{(2)} = 1$ i normalne $p_{\theta\theta}^{(2)} = 1$. Nie ma tutaj trudności w przyjęciu dowolnych warunków obciążenia. Te obliczenia prowadzą do następujących formuł:

$$\begin{aligned}
 (2.60) \quad a_{\beta_k} &= \bar{\mu}_1 P_{\beta_k, \mu}(\mu_1) \left\{ \frac{10}{4\tau_k^2 + 1} [1 - (-1)^k \varrho_1^{-1/2}] - \frac{18 - 16\nu}{4\tau_k^2 + 9} [\varrho_1^{-2} + (-1)^k \varrho_1^{-1/2}] \right\}, \\
 b_{\beta_k} &= \bar{\mu}_1 P_{\beta_k, \mu}(\mu_1) \left\{ \frac{16\tau_k^2 - 73 + 64\nu^2}{4\tau_k + 1} [(-1)^k \varrho_1^{-1/2} - 1] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16\tau_k^2 - (7 - 8\nu)^2}{4\tau_k + 9} [(-1)^k \varrho_1^{-1/2} + \varrho_1^{-2}] \right\} \frac{1}{4\tau_k}.
 \end{aligned}$$

Wobec bardzo długich wzorów uzyskanych z całkowania podaliśmy tylko wyniki dla wyrażeń (2.51), odpowiadające drugim częściom całek, tj.

$$\int_{\varrho_1}^1 \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_s, r)} \sigma_{\theta\theta}^{(\beta_k, r)} \varrho \, d\varrho \quad \text{itd.}$$

Rozpatrzmy nieskończoną macierz postaci (2.57). Okazuje, że ciągi podwójne utworzone z jej elementów są zbieżne do zera:

$$(2.61) \quad \lim_{s, k \rightarrow \infty} a_{\beta_{sk}} = \lim_{s, k \rightarrow \infty} b_{\beta_{sk}} = \lim_{s, k \rightarrow \infty} c_{\beta_{sk}} = 0.$$

Ponadto elementy diagonalne macierzy (2.57) $a_{\beta_{kk}}$, $b_{\beta_{kk}}$, $c_{\beta_{kk}}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) przyjmują wartości ekstremalne. Nie powiodło się zbadanie regularności układu równań (2.56), bowiem trudno dowieść, że suma modułów elementów w każdym wierszu macierzy (2.57) jest mniejsza od jedności. Wykażemy natomiast, że otrzymany nieskończony układ równań (2.56) spełnia pewne słabsze kryteria, tzw. warunki H. Kochoa [29].

1. Szeregi utworzone z modułów elementów głównej przekątnej macierzy (2.57)

$$(2.62) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (|a_{\beta_{kk}}| + |b_{\beta_{kk}}| + |c_{\beta_{kk}}|)$$

są zbieżne.

2. Szeregi podwójne utworzone z kwadratów elementów macierzy (2.57)

$$(2.63) \quad \sum_{s, k=1}^{\infty} [(a_{\beta_{sk}})^2 + (b_{\beta_{sk}})^2 + (c_{\beta_{sk}})^2]$$

są zbieżne.

3. Szeregi utworzone z kwadratów elementów macierzy jednokolumnowej (2.58)

$$(2.64) \quad \sum_{k=1}^{\infty} [(a_{\beta_k})^2 + (c_{\beta_k})^2]$$

są zbieżne.

Dla dowodu pierwszego zauważmy, że szereg (2.62) można przedstawić przy wykorzystaniu wyrażeń (2.59) w formie

$$(2.65) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{A(k)}{\tau_k^5} + \frac{B(k)}{\tau_k^4} + \frac{C(k)}{\tau_k^3} + \frac{D(k)}{\tau_k^2} + \frac{E(k)}{\tau_k} \right\},$$

gdzie $A(k), \dots, E(k)$ są funkcjami ograniczonymi, a

$$\tau_k = \frac{\pi k}{\ln \varrho_1}, \quad 0 < \varrho_1 < 1.$$

Szereg utworzony z czterech pierwszych składników (2.65) jest zbieżny. Natomiast aby dowieść zbieżności szeregu

$$(2.66) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |E(k)| \frac{1}{\tau_k}$$

potrzebne są dalsze informacje o funkcji $E(k)$ poza tym, że jest ona ograniczona. Jak wynika z wyrażenia (2.59)₂ funkcje $E(k)$ można przedstawić w formie

$$E(k) = \bar{E} [P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^1(\mu_1)]^2,$$

gdzie \bar{E} jest stałą dla danego zagadnienia (zależną od parametrów geometrycznych i mechanicznych), a $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^1(\mu_1)$ jest przyporządkowaną funkcją Legendre'a pierwszego rodzaju (funkcją Mehlera) ustalonego argumentu $\mu_1 = \cos \theta$. Jeśli skorzystamy z asymptotycznego przedstawienia tej funkcji w postaci

$$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^1(\mu) = \left(\frac{\tau}{2\pi\mu} \right)^{1/2} e^{\tau\theta} \left[1 - \frac{3\mu}{8\tau\mu} + o\left(\frac{1}{\tau^2} \right) \right], \quad 0 < \theta < \pi,$$

to zamiast szeregu (2.66) możemy rozważać szereg

$$(2.67) \quad \tilde{E} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\tau_k} \left[1 - \frac{3\mu}{8\tau_k} + o\left(\frac{1}{\tau_k^2}\right) \right]^2.$$

Tutaj \tilde{E} jest stałą, a $\tau_k = k\pi/\ln q_1$ i przyjmuje zawsze wartości ujemne, bo $0 < q_1 < 1$. Zatem zbieżność szeregu (2.67) wynika natychmiast ze zbieżności szeregu

$$(2.68) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k}$$

i pociąga za sobą zbieżność szeregu (2.66).

Aby dowieść zbieżności szeregu podwójnego (2.63), wystarczy wykazać, że zbieżny jest szereg postaci

$$(2.69) \quad \sum_{s,k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{A}(s,k)}{(\tau_s + \tau_k)^4 \tau_s^2 \tau_k^2} + \frac{\bar{B}(s,k)}{(\tau_s + \tau_k)^4 \tau_s^2} + \frac{\bar{C}(s,k)}{(\tau_s + \tau_k)^4 \tau_k^2} + \frac{\bar{D}(s,k)}{(\tau_s + \tau_k)^4} \right\},$$

gdzie funkcje $\bar{A}(s,k)$, $\bar{B}(s,k)$, $\bar{C}(s,k)$ i $\bar{D}(s,k)$ są ograniczone, a

$$\tau_s = \frac{\pi s}{\ln q_1}, \quad \tau_k = \frac{\pi k}{\ln q_1}, \quad 0 < q_1 < 1.$$

Zbieżność szeregu (2.69) wynika z kryterium porównawczego wobec zbieżności szeregu

$$(2.70) \quad \sum_{s,k=1}^{\infty} \frac{1}{(s+k)^\alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha > 2.$$

Postępując jak poprzednio, przekształcamy szereg (2.64) do postaci

$$(2.71) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \tilde{A}(k) \frac{1}{\tau_k^4} + \tilde{B}(k) \frac{1}{(\tau_k^3 + \tau_k)^2} + \tilde{C}(k) \frac{(-1)^k}{\tau_k^4} + \tilde{D}(k) \frac{(-1)^k}{(\tau_k^3 + \tau_k)^2} \right\},$$

skąd natychmiast wynika, że szereg (2.71) jest zbieżny wobec zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ($\alpha > 1$) oraz ograniczoności funkcji $\tilde{A}(k)$, $\tilde{B}(k)$, $\tilde{C}(k)$, $\tilde{D}(k)$, ...

Podsumowując powyższe rozważania stwierdzamy, że nieskończony układ równań algebraicznych (2.56) względem poszukiwanych ciągów stałych A_{β_s} i C_{β_s} spełnia warunki Kócha. Wynikają z tego następujące ważne wnioski.

Wyznacznik Δ_n utworzony z n^2 elementów macierzy (2.57) jest zbieżny do granicy Δ , przy czym Δ jest nieskończonym wyznacznikiem układu równań (2.56). Jeśli zastąpimy w macierzy układu (2.56) s -tą kolumnę ciągiem ograniczonych liczb

$$\begin{aligned} & a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, a_{\beta_3}, \dots, \\ & c_{\beta_1}, c_{\beta_2}, c_{\beta_3}, \dots, \end{aligned}$$

to również będzie istnieć granica skończonych wyznaczników:

$$(2.72) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n^{(s)} = \Delta^{(s)}.$$

Po wprowadzeniu takich wyznaczników dla układu równań (2.56) może być stosowana metoda rozwiązań analogiczna do metody dla układów skończonych. W szczególności zachodzą analogiczne twierdzenia do twierdzeń Cramera. Można dowieść, że w naszym przypadku nieskończony wyznacznik układu równań (2.56) jest różny od zera. Zatem układ równań ma jednoznaczne ograniczone rozwiązanie

$$(2.73) \quad \begin{bmatrix} A_{\beta_s} \\ C_{\beta_s} \end{bmatrix} = \frac{\Delta^{(s)}}{\Delta}.$$

Z warunków (2.62) i (2.63) wynika, że zbieżne są szeregi kwadratów rozwiązań

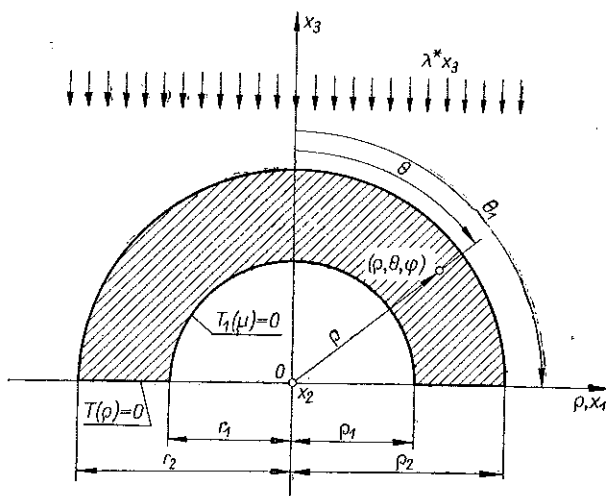
$$\sum_{s=1}^{\infty} (A_{\beta_s})^2 \quad \text{i} \quad \sum_{s=1}^{\infty} (C_{\beta_s})^2.$$

Zagadnienia stosowania metod redukcji i przybliżonych rozwiązań nieskończonych układów równań, które to równania czynią zadość kryteriom Kocho, opracowane zostało przez Ł. W. KANTOROWICZA [30].

3. Przykład zastosowania

3.1. Powłoka półkulista. Rozważa się swobodną powłokę półkulistą (rys. 4), której obszar opisują nierówności:

$$(3.1) \quad e_1 \leq \varrho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$



Rys. 4

Zewnętrzna powierzchnia kulista poddana jest działaniu ustalonego strumienia ciepłego, a pozostałe powierzchnie ograniczające obszar powłoki utrzymywane są w temperaturze zerowej, tj.

$$(3.2) \quad T(\varrho_1, \mu) = 0, \quad T_{,\varrho}(\varrho_2, \mu) = \lambda^* \mu, \quad T(\varrho, \mu_1) = 0, \\ 0 \leq \mu \leq 1, \quad \varrho_1 < \varrho < 1,$$

gdzie λ^* jest proporcjonalne do intensywności strumienia.

Rozwiązanie równania przewodnictwa ciepłego dla pola beźródłowego i stacjonarnego jako równania Laplace'a przy powyższych warunkach ma postać

$$(3.3) \quad T = \lambda^* r_2 (1 + 2\varrho_1^3)^{-1} (1 - \varrho_1^3 \varrho^{-3}) \varrho \mu, \quad \varrho = r r_2^{-1}.$$

Występowanie pierwszego wyrazu w wyrażeniu (3.3), tzn. $\lambda^* r_2 (1 + 2\varrho_1^3)^{-1} \varrho \mu$, jest związane z beznapięzeniowym stanem w swobodnej powłoce półkulistej i swobodnymi odkształceniami termicznymi. Natomiast drugi wyraz wyrażenia (3.3), tzn.

$$(3.4) \quad T_{-2} = A_{-2}^{(0)} \varrho^{-2} \mu, \quad A_{-2}^{(0)} = -\lambda^* r_2 (1 + 2\varrho_1^3)^{-1} \varrho_1^3$$

odgrywa rolę w równaniu Poissona i określa stan naprężenia w rozważanej powłoce (4). Potencjał termosprężystego przemieszczenia ma w tym przypadku postać

$$(3.5) \quad \Phi_{-2} = -\frac{m}{2} A_{-2}^{(0)} \mu$$

i spełnia równanie Poissona

$$(3.6) \quad \Delta \Phi_{-2} = m T_{-2}, \quad m = \alpha_T (1 + \nu) (1 - \nu)^{-1}.$$

Stan naprężenia odpowiadający rozwiązaniu potencjalnemu wyznacza się wzorami (2.9), które tutaj przyjmują postać

$$(3.7) \quad \sigma_{\varrho\varrho}^{(0)} = -2mGA_{-2}^{(0)} \varrho^{-2} \mu, \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = -mGA_{-2}^{(0)} \varrho^{-2} \mu, \\ \sigma_{\varrho\theta}^{(0)} = -mGA_{-2}^{(0)} \varrho^{-2} \bar{\mu}, \quad \sigma_{\varrho\varphi}^{(0)} = \sigma_{\theta\varphi}^{(0)} = 0.$$

Naprężenia $\sigma_{\varrho\varrho}^{(0)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(0)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(0)}$ znikają w płaszczyźnie równikowej, gdy $\theta = \pi/2$, a $\sigma_{\varrho\theta}^{(0)}$ znika na osi symetrii przy $\theta = 0$. Na powierzchniach ograniczających powłokę wystąpiły naprężenia normalne i styczne, które nie spełniają jednorodnych warunków brzegowych. Naprężenia te nie są zrównoważone, bo rzut głównego wektora naprężeń potencjalnych z powierzchni kulistych na oś symetrii powłoki nie równa się zero, tzn.

$$(3.8) \quad Z_k^* = 2\pi\varrho_k^2 \int_0^1 [\sigma_{\varrho\varrho}^{(0)}(\varrho_k, \mu) \mu - \sigma_{\varrho\theta}^{(0)}(\varrho_k, \mu) \bar{\mu}] d\mu \neq 0, \quad k = 1, 2.$$

(4) W wyrażeniach (3.4) i dalszych występują indeksy (-2) , co oznacza, że pole temperatury oraz pole naprężeń i przemieszczeń opisane są w rozważanym przypadku jedną harmoniką sferową Fouriera-Legendre'a.

Warunek taki dla naprężeń w płaszczyźnie równikowej jest spełniony. Jak widać, potencjalny stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(0)}$ musi być uzupełniony dodatkowymi stanami $\sigma_{ij}^{(1)}$ i $\sigma_{ij}^{(2)}$ tak, aby spełnione zostały jednorodne warunki naprężeniowe na powierzchniach kulistych i płaszczyźnie równikowej.

W pierwszym etapie na potencjalny stan naprężenia nakładamy stan $\sigma_{ij}^{(1)}$ wywołany statycznymi obciążeniami (2.18) o intensywności

$$(3.9) \quad \begin{aligned} p_{\theta\theta}^{(1)}(\varrho_k, \mu) &\stackrel{\text{df}}{=} 2mGA_{-2}^{(0)} \varrho_k^{-2} \mu, \\ p_{\theta\varrho}^{(1)}(\varrho_k, \mu) &\stackrel{\text{df}}{=} mGA_{-2}^{(0)} \varrho_k^{-2} \mu, \quad 0 < \mu < 1, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$ wyrazi się jedną harmoniką funkcji naprężeń stosownie do wzorów (2.20), które tutaj się upraszczają:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= [6A_{-2}^{(2)} \varrho^{-4} + 4(1+\nu) D_{-2}^{(1)} \varrho] \mu, \\ \sigma_{\theta\varphi}^{(1)} &= \sigma_{\varphi\theta}^{(1)} = [-3A_{-2}^{(1)} \varrho^{-4} + 8(1+\nu) D_{-2}^{(1)} \varrho] \mu, \\ \sigma_{\theta\varrho}^{(1)} &= [3A_{-2}^{(1)} \varrho^{-4} + 2(1+\nu) D_{-2}^{(1)} \varrho] \bar{\mu}, \\ \sigma_{\varphi\theta}^{(1)} &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Stałe A_{-2} i D_{-2} występujące w powyższych wyrażeniach są rozwiązaniem układu równań algebraicznych (2.22), uproszczonego w rozważanym przypadku do postaci

$$(3.11) \quad \begin{aligned} 6A_{-2}^{(1)} \varrho_k^{-2} + 2(2-\nu) C_{-2}^{(1)} + 4(1+\nu) D_{-2}^{(1)} \varrho_k^3 &= 2mGA_{-2}^{(0)}, \\ 3A_{-2}^{(1)} \varrho_k^{-2} - (1-2\nu) C_{-2}^{(1)} + 2(1+\nu) D_{-2}^{(1)} \varrho_k^3 &= mGA_{-2}^{(0)}, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

i mają wartości

$$(3.12) \quad \begin{aligned} A_{-2}^{(1)} &= \frac{1}{3} mGA_{-2}^{(0)} \varrho_1^2 (1 - \varrho_1^3) (1 - \varrho_1^5)^{-1}, \\ C_{-2}^{(1)} &= 0, \\ D_{-2}^{(1)} &= \frac{1}{2} mG(1+\nu)^{-1} A_{-2}^{(0)} (1 - \varrho_1^2) (1 - \varrho_1^5)^{-1}. \end{aligned}$$

W tym stanie podobnie jak poprzednio naprężenia $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$, $\sigma_{\theta\varphi}^{(1)}$, $\sigma_{\varphi\theta}^{(1)}$ znikają na płaszczyźnie równikowej $\theta = \pi/2$, a $\sigma_{\theta\varrho}^{(1)}$ znika na osi symetrii $\theta = 0$. Naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$ na powierzchniach ograniczających powłokę stanowią układ samozrównoważony, co wynika z analogicznego warunku do (3.8). Suma odpowiednich naprężeń (3.7) i (3.10) realizuje warunki graniczne na powierzchniach kulistych, natomiast na płaszczyźnie równikowej suma ta daje resztkowe naprężenia styczne, różne od zera:

$$(3.13) \quad \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = -mGA_{-2}^{(0)} \varrho^{-2} + 3A_{-2}^{(1)} \varrho^{-4} + 2(1+\nu) D_{-2}^{(1)} \varrho.$$

W drugim etapie na stan naprężenia $\sigma_{ij}^{(0)}$ i $\sigma_{ij}^{(1)}$ należałoby nałożyć stan $\sigma_{ij}^{(2)}$ wywołany obciążeniem stycznym działającym w płaszczyźnie $\theta = \pi/2$ o intensywności

$$p_{\theta\theta}^{(2)} \equiv -\sigma_{\theta\theta}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}.$$

Z uwagi jednak na bardzo małą wartość obciążenia brzegowego $p_{\theta\theta}^{(2)}$ w stosunku do sumy naprężeń $\sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}$ pomijamy stan $\sigma_{ij}^{(2)}$ ograniczając się do przybliżonego rozwiązania zadania. Ostatecznie stan naprężenia odpowiadający temu rozwiązaniu

$$(3.14) \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}$$

wyznaczony zostaje z dokładnością do resztkowych naprężeń stycznych na powierzchni brzegowej o wielkości (3.13).

3.2. Obliczenia numeryczne. Dana jest stalowa powłoka półkuli o wymiarach: $r_1 = 60$ cm, $r_2 = 100$ cm ($2h/r_0 = 1/2$) (5), której zewnętrzna powierzchnia kulista narażona jest na działanie strumienia cieplnego o gradiencie

$$[T, \rho(\rho, \mu)]_{\rho=1} = 2 \cos \theta \text{ [}^\circ\text{C/cm]},$$

a pozostałe powierzchnie utrzymywane są w temperaturze zerowej. Stałe materiałowe są następujące: $\nu = 0,3$; $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $\alpha_T = 1,1 \cdot 10^7$.

Pole temperatury w powłoce przy powyższych warunkach brzegowych jest określone wzorem (3.3). W szczególności po wstawieniu tam wielkości danych powyżej mamy

$$T = 139,664\rho\mu - 30,168\rho^{-2}\mu,$$

Rozkład temperatury w poszczególnych przekrojach powłoki podano na rys. 5.

Naprężenia w stanie potencjalnym $\sigma_{ij}^{(0)}$ oblicza się wzorami (3.7). Po wstawieniu w tych wzorach wartości szczegółowych: $m = 2,043$; $G = 8,076 \cdot 10^5$; $A_{-2}^{(0)} = -30,168$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(0)} &= 995,478 \rho^{-2} \mu, & \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(0)} = 497,739 \rho^{-2} \mu, \\ \sigma_{\rho\theta}^{(0)} &= 497,739 \rho^{-2} \bar{\mu}, & \sigma_{\varphi\theta}^{(0)} &= \sigma_{\rho\varphi}^{(0)} = 0. \end{aligned}$$

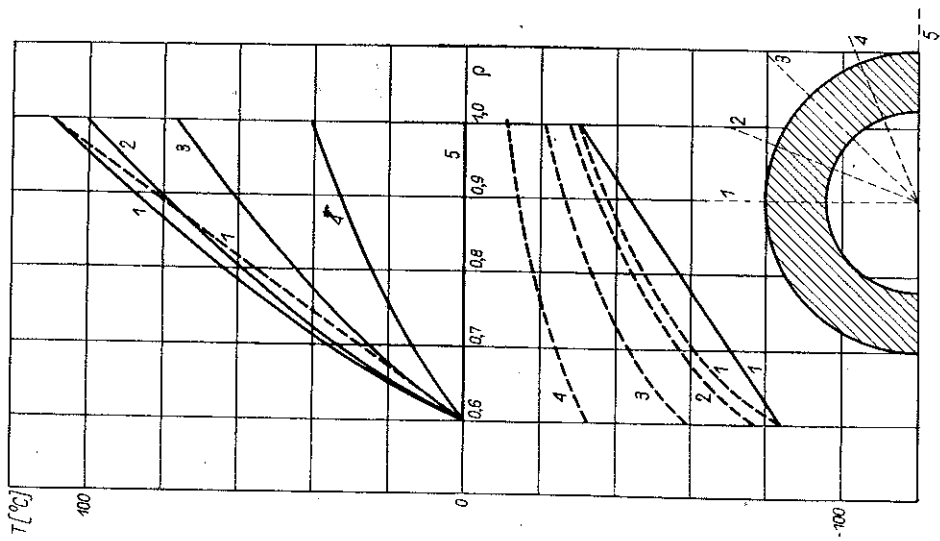
Naprężenia w stanie $\sigma_{ij}^{(1)}$ odpowiadające rozwiązaniu pomocniczemu $S^{(1)}$ wyznacza się wzorami (3.10). Po obliczeniu stałych według wzorów (3.12) i wstawieniu ich wartości do wzorów (3.10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(1)} &= -(304,656 \rho^{-4} + 690,820\rho) \mu, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = (152,328\rho^{-4} - 1381,640\rho) \mu, \\ \sigma_{\rho\theta}^{(1)} &= -(152,328 \rho^{-4} + 345,410 \rho) \bar{\mu}, \\ \sigma_{\varphi\theta}^{(1)} &= \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

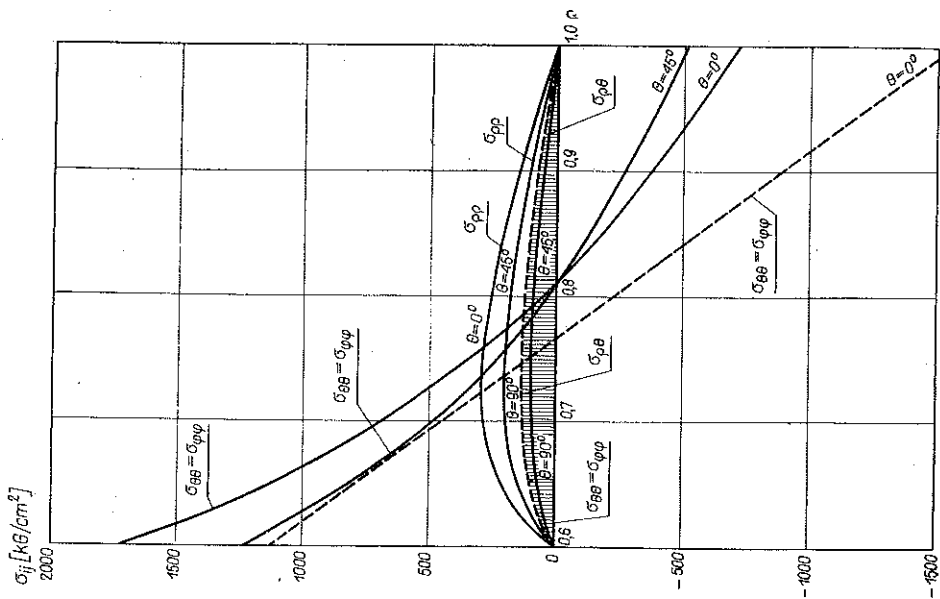
Superponując ostatecznie stany naprężeń $\sigma_{ij}^{(0)}$ i $\sigma_{ij}^{(1)}$ stosownie do (3.14) otrzymujemy wartości naprężeń $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}$ odpowiadające przybliżonemu rozwiązaniu zadania.

Na rys. 5 przedstawiono rozkład temperatury $T(\rho, \mu)$ w rozważanym obszarze powłoki. Linie ciągłe 1, 2, 3, 4 i 5 wyrażają zmianę temperatury wzdłuż promienia przy ustalonych kolejno kątach θ . Linie przerywane 1, 2, 3 i 4 wyrażają zmianę

(5) $2h/r_0$ oznacza stosunek grubości powłoki do jej średniego promienia krzywizny.



Rys. 5



Rys. 6

fikcyjnej temperatury, która wywołuje niejako stan naprężenia. Na rys. 5 naniesiono także zmianę $T(\varrho)$ na osi symetrii powłoki przy założeniu prostoliniowego rozkładu. Jak widać przyjęcie takiego rozkładu daje w rozważanym przypadku błąd równy 20,9%. Stan naprężenia w powłoce odpowiadający ściśle wyznaczonemu polu temperatury ilustruje rys. 6, na którym naniesiono wartości $\sigma_{ij}(\varrho, \mu)$. Linie ciągłe wyrażają zmianę naprężeń promieniowych, obwodowych i stycznych mierzonych wzdłuż promienia ϱ dla $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Wyznaczony stan naprężenia jest przybliżony w tym sensie, że na powierzchni równikowej pozostało resztkowe naprężenie $\sigma_{\theta\theta}$ które na rys. 6 przedstawia pole zakreskowane. Błąd, jaki popełniamy nie uwzględniając jego wpływu na naprężenia w obszarze, nie przewyższa 8,1%. Na rys. 6 prosta przerywana wyraża rozkład naprężeń obwodowych $\sigma_{\theta\theta}$ na osi symetrii powłoki, które wyznaczone zostały na podstawie teorii powłok Kirchhoffa-Love'a. Porównanie wyników dla naprężeń w tym szczególnym przypadku wskazuje na duże błędy wynikające z obliczania powłok grubych w ujęciu teorii powłok cienkich. I tak naprężenia obwodowe $\sigma_{\theta\theta}$ na wewnętrznej powierzchni granicznej obarczone są błędem 35%, a na zewnętrznej powierzchni granicznej błąd wynosi aż 115%. Ponadto naprężenia promieniowe w ujęciu teorii powłok cienkich są w ogóle niewyznaczalne, co prowadzi dla naprężeń $\sigma_{\varrho\varrho}$ do błędów 100%.

Podziękowanie. Autor wyraża swą wdzięczność Panu docentowi doktorowi Józefowi IGNACZAKOWI za cenne sugestie, przedyskutowanie wielu kwestii i przeczytanie rękopisu tej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. J. M. C. DUHAMEL, *Second mémoire sur le phénomènes thermomécaniques*, Journal de l'École Polytechnique, 25, 15 (1837), 1-57.
2. J. M. C. DUHAMEL, *Mémoire sur le calcul des actions moléculaires développés par les changements de temperature dans les corps solides*, Mémoires ... par divers savans, j. de l'École Polytechnique, 5 (1838), 440-498.
3. C. W. BORCHARDT, *Untersuchungen über die Elasticität fester isotroper Körper unter Berücksichtigung der Wärme*, Monatsber, Akad. Wiss., Berlin, Germany, 9 (1873).
4. Н. Н. Лебедев, *Тепловое напряжения в теории упругости*, ПИММ, 1, 2 (1934).
5. J. N. GOODIER, *On the Integration of the Thermo-Elastic Equations*, Philosophical Magazine, 23 (1937), 1017.
6. R. D. MINDLIN, D. H. CHENG, *Thermoelastic stress in the semiinfinite elastic solid*, J. Appl. Phys., 21 (1950), 931.
7. B. SHARMA, *Stresses due to a nucleus of thermoelastic strain (i) in an infinite elastic solid with spherical cavity and (ii) in a solid elastic sphere*, ZAMP, 2, 8 (1957), 142-150.
8. E. L. MC DOWELL, E. STERNBERG, *Axisymmetrical thermal stresses in a spherical shell of arbitrary thickness*, J. Appl. Mech., 24 (1957), p. 376.
9. J. IGNACZAK, *The axially symmetric boundary-value problem of thermoelasticity for a hemispherical shell of any thickness*, Arch. Mech. Stos., 12 (1960), 415.
10. W. E. WARREN, *A transient axisymmetric thermoelastic problem for the hollow sphere.*, AIAA Journal, 1, 11 (1963), 2569-2576.
11. W. E. WARREN, *A note on the transient axisymmetric thermoelastic problem for the solid sphere*, J. Appl. Mech., 2, 31, (E) (1964), 348-350.
12. G. EICHELBERG, *Temperaturverlauf und Wärmespannungen in Verbrennungsmotoren*, VDI-Forschungsheft 263, Berlin 1923.
13. S. P. ТИМОШЕНКО, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New-York 1940.
14. А. И. Лурье, *Статика тонкостенных упругих оболочек*, ОТИЗ, Гостехиздат, 1947.

15. А. Л. Гольденбейзер, *Температурные напряжения в тонких оболочках*, Труды ЦАГИ, нр. 618, Москва 1947.
16. H. PARKUS, *Wärmespannungen in Rotationsschalen bei drehsymmetrischer Temperaturverteilung*, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss., Abt. II, 160, 1 (1951).
17. E. MELAN, *Wärmespannungen bei der Abkühlung einer Kugel*, Acta Physica Austriaca, 1-2, 10 (1956), 6-81.
18. W. NOWACKI, *Thermoelasticity*, Pergamon Press, London 1962.
19. Z. F. BACZYŃSKI, *Axisymmetric steady-state conduction in an open spherical shell of arbitrary thickness*, IASS, Symposium on Non-Classical Shell Problems, Warsaw 1963; (Summary in Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 11a, 12 (1964), 7-8).
20. Z. F. BACZYŃSKI, *The steady-state axisymmetric thermoelastic problem for an open spherical shell of arbitrary thickness*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 12 (1964), 581-587.
21. Z. F. BACZYŃSKI, *Naprężenia termiczne w cienkiej otwartej powłoce kulistej*, Arch. Bud. Maszyn, 3, 13 (1966).
22. Z. F. BACZYŃSKI, *The thermoelastic steady-state stresses and strains for and strains for an open spherical shell of arbitrary thickness*, Arch. Mech. Stos., 7, 18 (1966).
23. Z. F. BACZYŃSKI, *Jednorodne rozwiązania termospłężystości dla obszarów kulistych*, referat na konferencji naukowej ZMOC, IPPT, PAN, Augustów 1965.
24. Z. F. BACZYŃSKI, *Naprężenia termiczne w grubych otwartych powłokach kulistych* (rozprawa doktorska), IPPT, PAN, Warszawa 1966.
25. Б. Г. Галеркин *Равновесие упругой сферической оболочки*, ПММ, 6, 6 (1942), 487-496.
26. А. И. Лурье, *Пространственные задачи теории упругости*, Москва 1955.
27. E. STERNBERG, R. A. EUBANKS, M. A. SADOWSKY, *On axisymmetric problem of elasticity theory for a region bounded by two concentric spheres*, Proc. First Nat. Congr. Appl. Mech. A.S.M.E., New York 1951.
28. В. А. БОЛЕЙ, J. H. WEINER, *Theory of Thermal Stresses*, New York-London 1962.
29. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, ГИТТЛ, Москва 1952.
30. Л. В. Канторович, *Функциональный анализ и прикладная математика*, Успехи мат. наук, 6, 3 (1948), гл. II, § 3.

Резюме

ВОПРОСЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ОБЛАСТЯХ ОГРАНИЧЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИМИ И КОНУСОБРАЗНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В работе рассматривается, между прочим, метод однородных решений, касающихся краевых задач теплопроводности, напряжений и перемещений для некоторого класса упругих тел, ограниченных сферическими и конусообразными поверхностями. Метод иллюстрируется на трехмерной осесимметрической задаче для толстостенной открытой сферической оболочки.

Общее однородное решение для задач теплопроводности приведенное в разделе 1 дает возможность определить температурное поле в произвольной односвязной области тела, ограниченного соосными сферическими поверхностями и поверхностью круглого конуса с произвольным углом раскрытия. Краевые условия могут в данном случае принимать совершенно произвольный вид так на граничных поверхностях, как и на краевой поверхности.

Вопрос нагрева тела на граничных поверхностях с нулевой температурой приводит к общему решению в виде ряда (1.8). Это решение (1.8) является рядом Фурье-Лежандра, построенным с помощью ортогональных функций и корней трансцендентного уравнения Лежандра. Это уравнение вытекает из однородного условия для температуры на краевой поверхности. В работе доказывается, что ряды (1.8) являются абсолютно сходящимися и равномерными

в рассматриваемых областях. Эта сходимость является однако медленной так, что оставление для численных расчетов нескольких выражений приводит к погрешностям величиной от 10 до 20 процентов, а учет нескольких десятков выражений — дает погрешность величиной в несколько процентов. Для особых случаев следует добавочно решить соответствующее трансцендентное уравнение Лежандра и привести последовательность действительных корней. Решение такого уравнения в общем случае невозможно.

Вопрос, касающийся произвольного нагрева тела на краевой поверхности с нулевой температурой на граничных поверхностях, приводит к решению в виде ряда (1.14). Это решение является рядом Фурье-Махлера, построенным с помощью ортогональной функции и комплексных корней трансцендентного уравнения, которое выводится из однородных условий для температуры на сферических поверхностях. Комплексные коэффициенты ряда (1.14) определяются непосредственно путем решения бесконечной системы уравнений (1.20). Следует подчеркнуть, что решение (1.14) в противоположность решению (1.8) не требует решения трансцендентного уравнения для каждого случая рассматриваемого тела. Отдельные области тела характеризуются здесь коэффициентами ряда (1.14). С помощью значений функции Мехлера при установленных аргументах [в решении (1.8) разные области характеризуются индексами функции Лежандра при установленных аргументах].

В разделе 2 решается задача, касающаяся напряжений и термических перемещений, вызванных произвольным осесимметрическим температурным полем в односвязном секторе шара. Напряженное состояние и перемещения являются здесь суммой потенциального состояния и двух добавочных состояний соответствующих вспомогательным решениям.

Потенциальное состояние $\sigma_{ij}^{(0)}$, $u_j^{(0)}$ [ср. формулы (2.12) и (2.13)] соответствует особому решению уравнений поля (7.9) и выражается потенциалом перемещения. В этом состоянии на поверхностях, ограничивающих рассматриваемую область, появляются, в общем, нормальные и касательные, различающиеся от нуля, напряжения. Добавочное состояние $\sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(2)}$ [формулы (2.20) и (2.21)] соответствует общему решению (первой задачи) уравнений теории упругости (I задачи) обладающему тем свойством что напряжения σ_{ij} на граничных поверхностях принимают априори, заданные значения. Добавочное состояние $\sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(2)}$ соответствует общему решению второй задачи уравнений теории упругости, имеющему такое свойство, что напряжения σ_{ij} на краевой поверхности принимают априори, заданные значения. Напряженные состояния и перемещения $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_j^{(0)}$, $u_i^{(1)}$ определяются с помощью рядов Фурье-Легранжа, которые строятся с помощью системы ортогональных функций к корней того же трансцендентного уравнения, как и решение (1.8).

Из проведенного анализа напряженных состояний и численных расчетов вытекает, что потенциальное состояние $\sigma_{ij}^{(0)}$ и потенциальное состояние $\sigma_{ij}^{(1)}$ играют доминирующую роль. Добавочное же состояние $\sigma_{ij}^{(2)}$ носит характер резидуальных напряжений, которыми можно в ряде случаев в практических расчетах пренебречь. Ошибку, которую мы таким образом совершаем, можно определить.

Summary

PROBLEMS OF THERMOELASTICITY FOR REGIONS BOUNDED BY SPHERICAL AND CONICAL SURFACES

One of the subject matters of the present paper is a method of homogeneous solutions of boundary-value problems of heat conduction, stress and displacement for a certain class of elastic bodies bounded by spherical and conical surfaces. This method is illustrated by solving the three-dimensional axially symmetric problem of a thick-walled open spherical shell.

The general homogeneous solutions of heat conduction problems given in Sec. 1 enable us to determine the temperature field in any simply connected region of a body bounded by concentric spherical surfaces and the surface of a circular cone of any apex angle.

The conditions on the spherical surfaces and the conical surface are arbitrary. The general solution of the problem of heating of the body at the spherical surfaces, the conical surface being kept at zero temperature is obtained in the form of the series (1.8), which is (are) a Fourier-Legendre series constructed by means of orthogonal functions and the roots of the transcendental Legendre equation resulting from the homogeneous condition for the temperature at the conical surface. It is shown that the series (1.8) are absolutely and uniformly convergent in the regions considered. This convergence is slow, however, so that the substitution of a few terms results in an error of more than ten percent and the substitution of several tens of terms — in an error of a few percent. In particular cases we must solve in addition the transcendental Legendre equation to obtain the sequence of real roots. The solution of such an equation is impossible in the general case.

The problem in which the body is heated in any manner on its conical surface the spherical surfaces being kept at zero temperature leads to a solution in the form of the series (1.14). This is a Fourier-Mehler series constructed by means of orthogonal sets of functions and complex roots of the transcendental equation which is derived from the homogeneous conditions for the temperature at the spherical surfaces. The complex coefficients of the series (1.14) are determined directly by solving the infinite set of equations (1.20). It should be stressed that the solution (1.14), by contrast with (1.8), does not require the solution of the (a) transcendental equation for each case of the body considered. Each particular region of the body is characterized by the coefficients of the series (1.14) through the values of Mehler's functions with constant arguments [in the solution (1.8) different regions are characterized by different indices of the Legendre functions with constant arguments].

In Sec. 2 is solved the problem of thermal stress and displacement produced by any axially symmetric temperature field in a simply connected spherical sector. The state of stress and displacement is the sum of a potential state and two additional states corresponding to auxiliary solutions.

The potential state [cf. the Eqs. (2.12) and (2.13)] corresponds to a particular solution of the equations of the field (7.9) and is determined by a potential of thermoelastic displacement. In this state, on the surfaces bounding the region under consideration there occur, in general, normal and shear stresses different from zero. The additional state of stress $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(1)}$ [Eqs. (2.20) and (2.21)] corresponds to the general solution of the first problem of the equations of the theory of elasticity, in which the stresses $\sigma_{ij}^{(1)}$ take prescribed values on the spherical surfaces. The additional state of stress $\sigma_{ij}^{(2)}$, $u_i^{(2)}$ corresponds to the general solution of the second problem of the equations of elasticity in which the stresses $\sigma_{ij}^{(2)}$ take prescribed values on the conical surface.

The states of stress and strain $\sigma_{ij}^{(0)}$, $\sigma_{ij}^{(1)}$, $u_i^{(0)}$, $u_i^{(1)}$ are described by Legendre-Fourier series constructed by means of a set of orthogonal functions and roots of the same transcendental equation as for the solution (1.8).

From the analysis of the state of stress and the numerical computation it follows that the potential states of stress $\sigma_{ij}^{(0)}$ and $\sigma_{ij}^{(1)}$ play a dominating role. The additional state of stress $\sigma_{ij}^{(2)}$ has the character of residual stress which may be rejected in many practical cases. It is possible to estimate the error thus committed.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 kwietnia 1967 r.