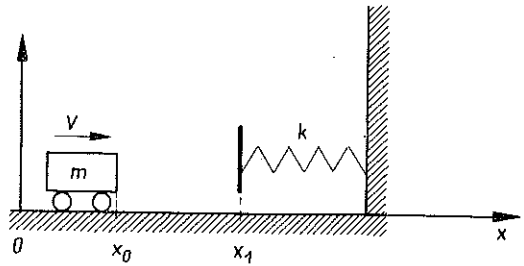


RÓWNANIA RUCHU UKŁADÓW Z SIŁAMI UDERZENIOWYMI

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. Wzrastające zastosowanie układów wibracyjno-uderzeniowych w technice spowodowało konieczność analizy układów dynamicznych z uwzględnieniem zjawisk uderzeniowych. W pracach dotyczących tego problemu, np. [1 i 2], działanie sił uderzeniowych uwzględnia się dopiero w warunkach granicznych zagadnienia lub też w postaci ciągu sił impulsowych zależnych od czasu, występujących w charakterze dodatkowych sił wymuszających (po prawej stronie równania różniczkowego ruchu). Wiadomo, że wielkość popędu tych sił impulsowych określona jest przez warunki ruchu układu oraz że zjawisko uderzenia występuje zawsze przy tej samej współrzędnej układu (np. przy $x = x_1$). Te dwa fakty nasuwają przypuszczenie, że zjawisko uderzenia można opisać pewną funkcją zależną od położenia i prędkości układu. Odpowiadająca tej funkcji «siła uderzeniowa» będzie miała charakter pozycyjny i jako określana przez warunki pracy układu powinna wystąpić po lewej stronie równania różniczkowego ruchu. Postać siły uderzeniowej i sposób występowania jej w równaniach ruchu postaramy się określić w niniejszej pracy.



Rys. 1

2. Rozpatrzmy ruch układu składającego się z masy m i sprężystego ogranicznika ruchu o sztywności k (rys. 1).

Równanie ruchu układu i warunki początkowe mają postać

$$(1) \quad \ddot{x} + \lambda^2 (x - x_1) u(x - x_1) = 0, \\ \lambda^2 = \frac{k}{m}, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = V, \quad u(x - x_1) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } x \leq x_1, \\ 1, & \text{jeśli } x > x_1. \end{cases}$$

Przyjmijmy, że po czasie $t = T$ masa m w swoim ruchu osiągnie ogranicznik, a po czasie $t = T + \tau$ oderwie się od niego poruszając się w stronę przeciwną niż na początku ruchu, czyli że

$$(2) \quad x(T) = x(T + \tau) = x_1.$$

Na podstawie własności ruchu (2) możemy zastąpić funkcję skoku jednostkowego w równaniu (1) przez dwie funkcje zależne od czasu:

$$(3) \quad \ddot{x} + \lambda^2 (x - x_1) [u(t - T) - u(t - T - \tau)] = 0.$$

Rozwiązanie równania w postaci (3) napotyka na istotne trudności. Można je ominąć przez dwukrotne różniczkowanie i przyjęcie dodatkowych warunków początkowych w postaci $\dot{x}(0) = 0$, $\ddot{x}(0) = 0$. Wykonując różniczkowanie musimy skorzystać ze wzoru na różniczkowanie dystrybucji, jaką jest w szczególności drugi wyraz równania. Na podstawie [3] mamy

$$(4) \quad \frac{d}{dz} [f(z) u(z - a)] = f'(z) u(z - a) + f(a) \delta(z - a),$$

gdzie $\delta(z - a)$ jest znaną funkcją Diraca.

Różniczkując dwukrotnie (3) i uwzględniając (4) i (2), otrzymamy

$$(5) \quad \ddot{\ddot{x}} + \lambda^2 \ddot{x} [u(t - T) - u(t - T - \tau)] + \lambda^2 \dot{x}(T) \delta(t - T) - \\ - \lambda^2 \dot{x}(T + \tau) \delta(t - T - \tau) = 0.$$

Otrzymane równanie rozwiążemy stosując rachunek operatorowy Laplace'a. Przedtem jednak zauważmy, że

$$(6) \quad a \{ \ddot{x} u(t - T) \} = \int_0^{\infty} \ddot{x} u(t - T) e^{-st} dt = \int_T^{\infty} \ddot{x} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \ddot{x} e^{-st} dt = a(\ddot{x}), \\ a \{ \ddot{x} u(t - T - \tau) \} = \int_0^{\infty} \ddot{x} u(t - T - \tau) e^{-st} dt = \int_{T+\tau}^{\infty} \ddot{x} e^{-st} dt = 0,$$

gdyż, jak wynika z (3),

$$\ddot{x} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \ddot{x} = 0, \quad t \geq T + \tau.$$

Po uwzględnieniu (6) transformacie równania (5) nadamy postać

$$(7) \quad s^4 x(s) - s^3 x(0) - s^2 \dot{x}(0) - s \ddot{x}(0) - \ddot{\ddot{x}}(0) + \\ + \lambda^2 [s^2 x(s) - s x(0) - \dot{x}(0) + \dot{x}(T) e^{-sT} - \dot{x}(T + \tau) e^{-s(T + \tau)}] = 0,$$

a uwzględniając założone warunki początkowe mamy

$$(8) \quad x(s) = \frac{s^3 x_0 + s^2 V + \lambda^2 s x_0 + \lambda^2 V - \lambda^2 \dot{x}(T) e^{-sT} + \lambda^2 \dot{x}(T + \tau) e^{-s(T + \tau)}}{s^2 (s^2 + \lambda^2)}.$$

Stąd po rozkładzie na ułamki proste

$$(9) \quad x(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{V - \dot{x}(T) e^{-sT} + \dot{x}(T + \tau) e^{-s(T + \tau)}}{s^2} + \frac{\dot{x}(T) e^{-sT} - \dot{x}(T + \tau) e^{-s(T + \tau)}}{s^2 + \lambda^2}.$$

Wykonując na funkcji (9) transformację odwrotną i korzystając z warunków granicznych (2) obliczymy niewiadome:

$$(10) \quad \dot{x}(T) = V, \quad \dot{x}(T + \tau) = -V, \quad \tau = \frac{\pi}{\lambda}.$$

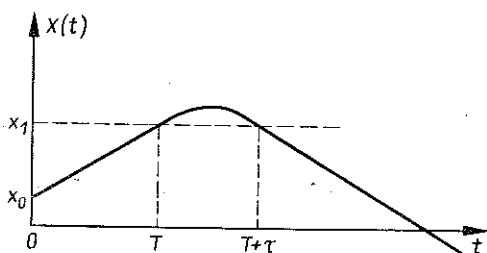
Uwzględniając powyższe w transformacie (9) mamy

$$(11) \quad x(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{V(1 - e^{-sT})}{s^2} + \frac{V[e^{-sT} + e^{-s(T+\frac{\pi}{\lambda})}]}{s^2 + \lambda^2} - \frac{Ve^{-s(T+\frac{\pi}{\lambda})}}{s^2}$$

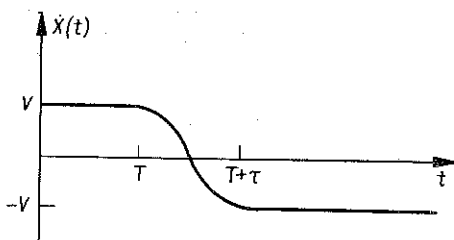
Wobec tego przemieszczenie masy m wyraża się wzorem

$$(12) \quad x(t) = x_0 + Vt - V(t-T)u(t-T) + \frac{V}{\lambda} \sin \lambda(t-T)u(t-T) + \\ + \frac{V}{\lambda} \sin \lambda\left(t-T-\frac{\pi}{\lambda}\right)u\left(t-T-\frac{\pi}{\lambda}\right) - V\left(t-T-\frac{\pi}{\lambda}\right)u\left(t-T-\frac{\pi}{\lambda}\right)$$

Łatwo sprawdzić, że otrzymane stąd wykresy przemieszczenia i prędkości w skali czasu mają postać przedstawioną na rys. 2 i 3. Z wykresów przemieszczenia i prędkości wynika, że jeśli $\tau \rightarrow 0$, to otrzymamy ruch będący wynikiem odbicia masy od sztywnego ogranicznika ($k \rightarrow \infty$) przy $x = x_1$.



Rys. 2



Rys. 3

3. Chcąc rozpatrzeć przejście graniczne od ogranicznika sprężystego przy $x = x_1$ do sztywnego ($k \rightarrow \infty$), weźmy pod uwagę równanie ruchu masy m ze sprężystym ogranicznikiem w postaci

$$(13) \quad m\ddot{x} + k(x - x_1)[u(t - T) - u(t - T - \tau)] = 0$$

Oznaczając drugi wyraz równania jako $f(k, T, \tau)$, mamy

$$(14) \quad f(k, T, \tau) = k(x - x_1)[u(t - T) - u(t - T - \tau)]$$

Wiadomo, że jeśli sztywność ogranicznika dąży do nieskończoności, to czas kontaktu masy ze sprężyną dąży do zera ($\tau \rightarrow 0$). Zmienna $x(t)$ występująca w (14) zawiera się tu w granicach $x_1 \leq x(t) \leq x_{\max}$, $x(T) = x_1$. Przyjmując $x(t) = x(T + \theta)$, $0 \leq \theta \leq \tau$ i przechodząc z (14) do granicy, znajdziemy

$$(15) \quad f(x_1, T) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} f(k, T, \tau) = \\ = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{k\tau \left[x\left(T + \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) - x(T) \right] [u(t - T) - u(t - T - \tau)]}{\tau} = \\ = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{k\tau^2 \left[x\left(T + \frac{\theta}{2}\right) + \frac{\theta}{2} \dot{x}\left(T + \frac{\theta}{2}\right) - x(T) \right] [u(t - T) - u(t - T - \tau)]}{\tau/2}$$

Granica ostatniego wyrażenia będzie iloczynem granic. Obliczając je kolejno otrzymamy

$$(16) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{[u(t-T) - u(t-T-\tau)]}{\tau} = \delta(t-T),$$

$$\lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ \theta = \tau}} \frac{\left[x\left(T + \frac{\theta}{2}\right) - x(T) + \frac{\theta}{2} \dot{x}\left(T + \frac{\theta}{2}\right) \right]}{\tau/2} =$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{x\left(T + \frac{\tau}{2}\right) - x(T)}{\tau/2} + \dot{x}\left(T + \frac{\tau}{2}\right) \right] = 2\dot{x}(T).$$

Aby doprowadzić pozostałe wyrażenie do postaci bezwymiarowej, podzielmy je i pomnóżmy przez masę m . Wtedy znajdziemy

$$(17) \quad \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{k\tau^2}{2} = m \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{k\tau^2}{2m} = m, \quad \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{k\tau^2}{2m} \equiv 1,$$

przy czym wartość ostatniej granicy przyjęliśmy jako postulat, który uzasadnimy później.

Funkcja $f(x_1, T)$, którą możemy nazwać «siłą uderzeniową» wobec (15), (16) i (17) wyniesie

$$(18) \quad f(x_1, T) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} f(k, T, \tau) = 2m\dot{x}(T) \delta(t-T).$$

Z otrzymanego rezultatu wynika, że siła ta ma charakter pseudosprężysty ($k \rightarrow \infty$) i jak wynika z (18) jest dystrybucją zależną od czasu. Ponieważ chwili $t = T$ odpowiada przemieszczenie układu $x(T) = x_1$, to w myśl [3]

$$(19) \quad \delta(t-T) = |\dot{x}(T)| \delta(x-x_1),$$

w związku z czym

$$(20) \quad f(x_1, T) = 2m\dot{x}(T) |\dot{x}(T)| \delta(x-x_1).$$

Wstawiając obecnie otrzymany rezultat do równania (13) otrzymamy równanie ruchu masy m przy możliwości zderzenia ze sztywną przegrodą przy $x = x_1$:

$$(21) \quad m\ddot{x} + 2m\dot{x}(T) |\dot{x}(T)| \delta(x-x_1) = 0.$$

Jak wiadomo [3], dla funkcji ciągłych odpowiedni jest wzór

$$f(T) \delta(t-T) = f(t) \delta(t-T).$$

W naszym przypadku prędkość \dot{x} w punkcie $x = x_1$ może mieć nieciągłość skokową. Jeśli jednak umówimy się, że $\dot{x}(T) = [\dot{x}(t)]_{t=T^-}$, czyli że zawsze będziemy uwzględniali granicę lewostronną, to równanie (21) przyjmie postać

$$(22) \quad m\ddot{x} + 2m\dot{x} |\dot{x}| \delta(x-x_1) = 0.$$

Aby przekonać się o poprawności równania (22) i sprawdzić słuszność przyjętego postulatu, rozważmy zderzenie masy m ze sztywną przegrodą usytuowaną w punkcie $x = x_1$. Na podstawie (22) równanie ruchu ma postać

$$(23) \quad \ddot{x} + 2\dot{x} |\dot{x}| \delta(x - x_1) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = V.$$

Stosując przekształcenie (19) przy założeniu zderzenia w chwili $t = T$ otrzymamy

$$(24) \quad \ddot{x} + 2\dot{x} \delta(t - T) = 0,$$

a po zastosowaniu transformacji Laplace'a i uwzględnieniu warunków początkowych (23)

$$(25) \quad x(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{V - 2\dot{x}(T) e^{-sT}}{s^2}.$$

Pamiętając, że

$$(25') \quad \dot{x}(T) = x_1, \quad u(t-T) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } t \leq T, \\ 1, & \text{jeśli } t > T \end{cases}$$

otrzymamy

$$(26) \quad \dot{x}(T) = V, \quad x(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{V}{s^2} - \frac{2Ve^{-sT}}{s^2}.$$

Zauważmy, że identyczny wynik otrzymamy z transformaty $x(s)$ układu z ogranicznikiem sprężystym, stosując przejście graniczne $\lambda \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). Biorąc pod uwagę (11) znajdziemy

$$(27) \quad x(s) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x(s, \lambda) = \lim \left\{ \frac{x_0}{s} + \frac{V(1 - e^{-sT})}{s^2} + \frac{V \left[e^{-sT} + e^{s\left(T + \frac{\pi}{\lambda}\right)} \right]}{s^2 + \lambda^2} - \frac{Ve^{-s\left(T + \frac{\pi}{\lambda}\right)}}{s^2} \right\} = \frac{x_0}{s} + \frac{V}{s^2} - \frac{2Ve^{-sT}}{s^2}.$$

Wynik ten usprawiedliwia przyjęcie naszego postulatu i potwierdza poprawność traktowania siły uderzeniowej jako pseudosprężystej i pozycyjnej. Stosując transformację odwrotną do (26), otrzymamy

$$(28) \quad x(t) = x_0 + Vt - 2V(t-T)u(t-T), \quad \dot{x}(t) = V - 2Vu(t-T).$$

Wykresy tych funkcji podajemy na rys. 4 i 5.

Jak widać, otrzymany wykres przemieszczenia i prędkości w zależności od czasu jest poprawny i identyczny z tym, jaki otrzymalibyśmy stosując hipotezę Poissona o impulsach sił uderzeniowych przy wartości współczynnika restytucji $R = 1$.

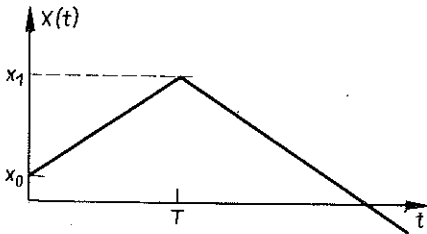
Równanie (22) można uogólnić na przypadek, gdy współczynnik restytucji $R \leq 1$. Wtedy będziemy mieli

$$(29) \quad m\ddot{x} + (1+R)m\dot{x} |\dot{x}| \delta(x - x_1) = 0.$$

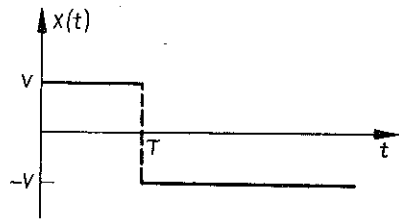
Poprawność takiego przyjęcia łatwo sprawdzić stosując do równania (29) twierdzenie Kelvina o pracy sił impulsowych. Po obliczeniach otrzymalibyśmy

$$\Delta E = \frac{1-R^2}{2} m \dot{x}^2(T),$$

co jest zgodne z teorią zderzenia masy m z nieruchomymi więzami. Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, że równanie (29) jest poprawne bez względu na to, czy ogranicznik znajduje się przy $x_1 > 0$, czy $x_1 < 0$, tzn. czy $\dot{x}(T) > 0$, czy też $\dot{x}(T) < 0$. Ta własność przedstawionego opisu sił uderzeniowych pozwala konstruować równania ruchu układów ze sztywnymi ogranicznikami biorąc za punkt wyjścia równania Newtona lub zasadę d'Alemberta.



Rys. 4



Rys. 5

4. Jako pierwszy rozpatrzmy układ składający się z masy m , poruszającej się między dwoma ogranicznikami dla $x_1 > 0$ i $x_2 < 0$. Z rozumowania przeprowadzonego wyżej, a w szczególności z przejścia granicznego wynika, że siły uderzeniowe należy traktować jako pseudosprężyste, a więc w równaniu Newtona muszą wystąpić po prawej stronie ze znakiem minus. Uwzględniając jeszcze, że $R \leq 1$, mamy

$$(30) \quad m\ddot{x} = -(1+R) m\dot{x} |\dot{x}| \delta(x-x_1) - (1+R) m\dot{x} |\dot{x}| \delta(x-x_2).$$

Pamiętając, że w myśl przyjętej umowy w obliczeniach uwzględniamy wartość prędkości dla $[\dot{x}(t)]_{t=t_n}$, gdzie t_n oznacza czas uderzenia, będziemy mieli

$$(31) \quad \ddot{x} + (1+R) \dot{x} |\dot{x}| [\delta(x-x_1) + \delta(x-x_2)] = 0.$$

Jest oczywiste, że jeśli masa m poddana jest wymuszeniu, to w równaniu wystąpi ono po prawej stronie.

Posługując się analogiczną zasadą łatwo skonstruować równanie ruchu układu złożonego z masy, sprężyny i dwu ograniczników (rys. 6).

W przypadku ogólnym równanie to ma postać

$$(32) \quad m\ddot{x} + kx + (1+R) m\dot{x} |\dot{x}| [\delta(x-x_1) + \delta(x-x_2)] = 0,$$

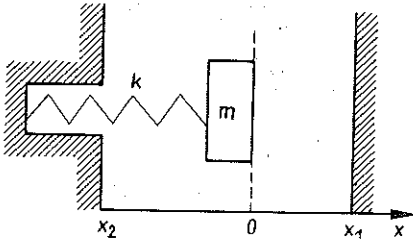
czyli

$$(32') \quad \ddot{x} + \lambda^2 x + (1+R) \dot{x} |\dot{x}| [\delta(x-x_1) + \delta(x-x_2)] = 0, \quad \lambda^2 = \frac{k}{m}.$$

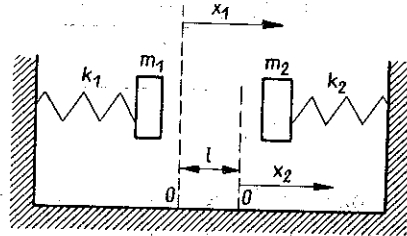
W przypadku $|x_2| \gg x_1$, tj. gdy $x(t) < x_2$, funkcja uogólniona $\delta(x - x_2)$ będzie dystrybucją wszędzie równą zero. W związku z tym otrzymamy równanie ruchu układu z ogranicznikiem jednostronnym przy $x = x_1$ w postaci

$$(33) \quad \ddot{x} + \lambda^2 x + (1+R) \dot{x} |\dot{x}| \delta(x - x_1) = 0.$$

Konstrukcję równań dla układów o dwu stopniach swobody dogodnie jest zacząć od układu z rys. 7.



Rys. 6



Rys. 7

Ze względu na analogie do układów wyżej rozpatrywanych równanie ruchu napiszemy od razu w postaci

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + S_1 \delta(x_1 - x_2 - l) = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + S_2 \delta(x_2 - x_1 + l) = 0.$$

Współczynniki S_1 i S_2 można znaleźć stosując hipotezę Poissona dla przypadku zderzenia prostego dwu kul o masach m_1 i m_2 . Po obliczeniach otrzymamy

$$(34) \quad m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + \frac{(1+R) m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) |\dot{x}_1 - \dot{x}_2| \delta(x_1 - x_2 - l) = 0,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 + \frac{(1+R) m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) |\dot{x}_2 - \dot{x}_1| \delta(x_2 - x_1 + l) = 0.$$

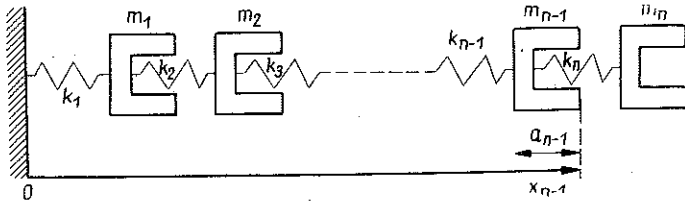
Z otrzymanego rezultatu wynika, że układanie równań ruchu z siłami uderzeniowymi jest proste, a pomiędzy odpowiednimi równaniami a równaniami ruchu z siłami sprzęgającymi typu sprężystego (np. $k_1(x_1 - x_2)$, $k_2(x_2 - x_1)$) zachodzi wiele analogii. Analogie te występują w sposób wyraźny w równaniach ruchu układu o n stopniach swobody (rys. 8), gdzie założono możliwość zderzeń mas sąsiednich. W przypadku tym równania ruchu mają postać

$$(35) \quad m_i \ddot{x}_i + k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \\ + \frac{(1+R) m_i m_{i-1}}{m_i + m_{i-1}} (\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) |\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}| \delta(x_i - a_i - x_{i-1}) + \\ + \frac{(1+R) m_i m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}} (\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}) |\dot{x}_i - \dot{x}_{i+1}| \delta(x_i + a_{i+1} - x_{i+1}) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, \quad m_0 = k_0 = m_{n+1} = k_{n+1} = 0.$$

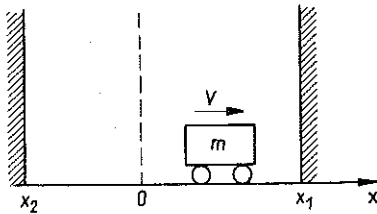
Wydaje się, że ostatni przykład w pełni ilustruje sposób układania równań ruchu z siłami uderzeniowymi.

Uważna analiza przytoczonych tu równań prowadzi do wniosku, iż charakter sił uderzeniowych jest istotnie nieliniowy, stąd też w rozwiązaniach tych równań należy się spodziewać silnego występowania zjawisk typowych dla klasycznych układów nieliniowych.



Rys. 8

5. Rozwiązania podanych wyżej równań ruchu można poszukiwać w prostych przypadkach drogą całkowania w przedziale liniowości (między uderzeniami). Bardziej użyteczną wydaje się jednak metoda operatorowa, zwłaszcza że, jak wynika



Rys. 9

z analizy ruchu masy z ogranicznikiem, pozwala ona badać ruch w całym przedziale zmienności czasu t . Weźmy pod uwagę ruch w układzie masy z dwoma ogranicznikami (30) przy $x=x_1$ i $x=x_2$ (rys. 9). Przy braku siły wymuszającej ruch będzie okresowy, jeśli zderzenia będą doskonale sprężyste, $R=1$. Wobec tego zderzenia z ogranicznikiem prawym ($x=x_1$) będą zachodzić np. dla czasów $t=nT$, $n=0, 1, \dots$,

a z lewym przy $x=x_2$ dla $t=\frac{2n+1}{2}T$, gdzie T jest nieznanym okresem ruchu masy. Przy spełnieniu powyższych założeń równanie ruchu (3) wraz z warunkami początkowymi i granicznymi będzie miało postać

$$\ddot{x} + 2\dot{x} |\dot{x}| [\delta(x-x_1) + \delta(x-x_2)] = 0,$$

$$(36) \quad x(0) = x_1, \quad \dot{x}(0) = V_1, \quad x(nT) = x_1, \quad x\left(\frac{2n+1}{2}T\right) = x_2,$$

$$\dot{x}(nT) \equiv \dot{x}(T), \quad \dot{x}\left(\frac{2n+1}{2}T\right) \equiv \dot{x}\left(\frac{T}{2}\right),$$

gdzie prędkości $\dot{x}(T)$ i $\dot{x}(T/2)$ są niewiadome.

Wobec okresowości ruchu i zależności (19) występujące w równaniu dystrybucje jako okresowe można przekształcić następująco:

$$(37) \quad |\dot{x}| \delta(x-x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) \equiv \delta(T),$$

$$|\dot{x}| \delta(x-x_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(t - \frac{2n+1}{2}T\right) \equiv \delta\left(\frac{T}{2}\right),$$

w związku z czym równanie ruchu będzie miało postać

$$(38) \quad \ddot{x} + 2\dot{x} \left[\delta(T) + \delta\left(\frac{T}{2}\right) \right] = 0.$$

Uwzględniając warunki początkowe i podstawowe (37) po transformacji Laplace'a równania (38) znajdziemy

$$(39) \quad x(s) = \frac{(sx_1 + V_1)(1 - e^{-sT}) - 2\dot{x}(T) - 2\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right)e^{-s\frac{T}{2}}}{s^2(1 - e^{-sT})} = \frac{\Phi(s)}{1 - e^{-sT}}.$$

Ze względu na okresowość ruchu transformata $\Phi(s)$ powinna znikać poza przedziałem $(0, T)$. Korzystając z tego i warunków granicznych ruchu (36), otrzymamy

$$(40) \quad \dot{x}(T) = -\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) = V_1, \quad T = \frac{2(x_1 - x_2)}{V_1}.$$

Wstawiając obliczone prędkości do (39) po przekształceniach otrzymamy transformatę przemieszczenia i prędkości:

$$(41) \quad x(s) = \frac{x_1}{s^2} - \frac{V_1}{s^2} \operatorname{tgh} \frac{sT}{4}, \quad \dot{x}(s) = \frac{V_1}{s} \operatorname{tgh} \frac{sT}{4}.$$

Stąd przemieszczenie masy m i jej prędkość [4] są następujące:

$$x(t) = x_1 - V_1 t - 2V_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[t - \frac{n}{2} T \right] u\left(t - \frac{n}{2} T\right),$$

$$\dot{x}(t) = -V_1 - 2V_1 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u\left(t - \frac{n}{2} T\right), \quad T = \frac{2(x_1 - x_2)}{V_1}.$$

Jak łatwo się domyślić, przemieszczenie masy ma postać funkcji o wykresie w kształcie piły symetrycznej, a prędkość jest ciągiem impulsów prostokątnych, przy czym obydwie funkcje mają wspólny okres (40).

Z kolei weźmy pod uwagę ruch układu złożonego z masy sprężyny i ogranicznika przy $x = x_1$, (33), (rys. 6). Załóżmy, że ruch jest okresowy ($R = 1$) oraz że uderzenia zachodzą dla czasu $t = nT$, $n = 0, 1, \dots$. Wtedy równanie ruchu oraz warunki początkowe i graniczne przyjmą postać

$$(42) \quad \ddot{x} + \lambda^2 x + 2\dot{x} |\dot{x}| \delta(x - x_1) = 0, \quad \lambda^2 = \frac{k}{m},$$

$$x(0) = x_1, \quad \dot{x}(0) = V, \quad x(nT) = x_1, \quad \dot{x}(nT) \equiv \dot{x}(T).$$

Korzystając z przekształcenia (37) mamy

$$\ddot{x} + \lambda^2 x + 2\dot{x} \delta(T) = 0,$$

skaąd transformata przemieszczenia jest postaci

$$(43) \quad x(s) = \frac{(sx_1 + V)(1 - e^{-sT}) - 2\dot{x}(T)}{(s^2 + \lambda^2)(1 - e^{-sT})} = \frac{\Phi(s)}{1 - e^{-sT}}.$$

Biorąc pod uwagę warunek znikania funkcji $\Phi(t)$ poza przedziałem $(0, T)$ znajdziemy

$$(44) \quad \dot{x}(T) = V, \quad V = -\lambda x_1 \operatorname{tg} \frac{\lambda T}{2}, \quad T = \frac{2}{\lambda} \left[\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{V}{\lambda x_1} \right], \quad T > 0.$$

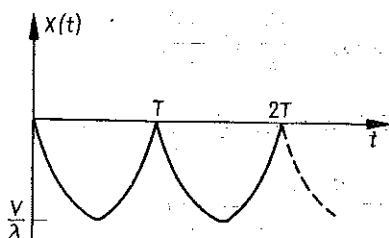
Podstawiając otrzymane rezultaty do (43) po przekształceniach otrzymamy transformatę przemieszczenia i prędkości:

$$(45) \quad x(s) = \frac{sx_1}{s^2 + \lambda^2} - \frac{V}{s^2 + \lambda^2} \operatorname{ctg} h \frac{sT}{2}, \quad \dot{x}(s) = \frac{-\lambda^2 x_1}{s^2 + \lambda^2} - \frac{sV}{s^2 + \lambda^2} \operatorname{ctg} h \frac{sT}{2}.$$

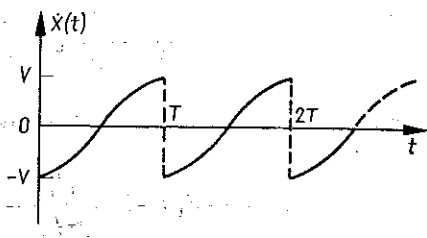
Transformaty te w przypadku $x_1 = 0$, tzn. gdy $T = \pi/\lambda$, dają łatwo poszukiwane funkcje:

$$(46) \quad x(t) = -\frac{V}{\lambda} |\sin \lambda t|, \quad \dot{x}(t) = -V \cos \lambda t \operatorname{sgn}(\sin \lambda t).$$

Wykresy funkcji przedstawiono na rys. 10 i 11.



Rys. 10



Rys. 11

W przypadku ogólnym, gdy $x_1 \neq 0$, przemieszczenia i prędkości są podobne, jednak ze względu na to, że $T \neq \pi/\lambda$, mają postać bardziej skomplikowaną:

$$(47) \quad x(t) = \frac{1}{\lambda} \sqrt{x_1^2 \lambda^2 + V^2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos [\lambda (t - nT) + \theta] \{u(t - nT) - u[t - (n+1)T]\},$$

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{x_1^2 \lambda^2 + V^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sin [\lambda (t - nT) + \theta] \{u(t - nT) - u[t - (n+1)T]\},$$

$$T = \frac{2}{\lambda} \left(\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{V}{\lambda x_1} \right), \quad \theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{V}{\lambda x_1}.$$

6. Reasumując powyższe rozważania należy stwierdzić, że przedstawienie zjawiska uderzenia za pomocą określonej tu siły uderzeniowej pozwala opisać ruch układu za pomocą równań różniczkowych, określonych w całym przedziale istnienia ruchu. Sposób wyprowadzania tych równań jest prosty, a postać sił uderzeniowych jest podobna do postaci sił typu sprężystego. Wydaje się, iż dogodną metodą rozwiązywania tych równań jest przekształcenie Laplace'a.

Literatura cytowana w tekście

1. А. Е. Кобринский, *Механизмы с упругими связями*, Наука, Москва 1964.
2. В. А. Остапенко, *Механические виброударные системы*, Наукова Думка, Киев 1966.
3. J. M. LIGHTHILL, *Wstęp do analizy Fouriera i teorii dystrybucji*, PWN, Warszawa 1963.
4. А. Агнот, *Математика для электро- и радиоинженеров*, Наука, Москва 1967.

Резюме

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С УДАРАМИ

В работе, предпринимается попытка учета явления удара в дифференциальном уравнении движения системы. Благодаря определению «ударной силы» на пути предельного перехода, получена наглядная форма уравнения движения. Оно является уравнением в обобщенных функциях.

Затем, представлен общий способ составления уравнения движения систем с ударами, а также получены их некоторые решения при помощи преобразования Лапласа для простых случаев.

Summary

THE EQUATION OF MOTION OF A SYSTEM WITH IMPACTS

This work is an attempt formulate the impact effect in a differential equation of motion of a system.

By means of limiting transition the impact force was defined and the simple form of differential equation was obtained. This equation is a distributive one.

Then the general manner of construction the equation of motion for impact system is shown. By means of Laplace transformation the solutions of these equations are obtained for uncomplicated cases.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 kwietnia 1969 r.
