

NIKTÓRE PRZYPADKI KSZTAŁTOWANIA TRÓJWARSTWOWYCH PŁYT
SWOBODNIE PODPARTYCH O RÓWNOMIERNEJ WYTRZYMAŁOŚCI

WOJCIECH DZIENISZEWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Płyty wielowarstwowe (zwane też płytami sandwiczowymi) znajdują obecnie szerokie zastosowania w konstrukcjach inżynierskich. Są one najczęściej zbudowane z trzech warstw: dwóch zewnętrznych o małej grubości t oraz z warstwy środkowej o większej grubości h . Warstwy zewnętrzne są utworzone z materiału sprężystego o dużej wytrzymałości. Warstwa środkowa natomiast jest albo konstrukcją ażurową wykonaną z tego samego materiału co warstwy zewnętrzne, albo stanowi jednolitą warstwę z innego materiału o niższej wytrzymałości. W tym drugim przypadku przyjęto nazywać warstwę środkową wypełniaczem. Grubość h warstwy środkowej tych płyt jest wielokrotnie większa od grubości t warstw zewnętrznych.

W niniejszej pracy zajmować się będziemy płytami trójwarstwowymi, które przy stałej grubości h warstwy środkowej są płytami o równomiernej wytrzymałości, tj. takimi, w których wyężenia materiału w każdym punkcie warstw zewnętrznych o zmiennej grubości t są stałe i równe wartości dopuszczalnej σ_0 .

Celem rozważań będzie więc wyznaczenie zmiennej grubości t warstw zewnętrznych tych płyt znajdujących się pod działaniem obciążeń p prostopadłych do płyty.

2. Sformułowanie zagadnienia

Zgodnie z teorią deformacji płyt trójwarstwowych o małych ugięciach, opracowaną przez Libove'a i Batdorfa a przedstawioną np. w monografii [1], warstwy zewnętrzne ($k = 1, 2$) przenoszą naprężenia membranowe $\sigma_{\alpha\beta}^{(k)} = (-1)^k \sigma_{\alpha\beta}$, α, β , $k = 1, 2$, natomiast warstwa środkowa ($k = 3$) — jedynie pionowe naprężenia styczne $\sigma_{\alpha\beta}^{(3)}$, $\alpha = 1, 2$. Numerację k warstw płyty oraz oznaczenia naprężeń przedstawiono na rys. 1. Wyężenia F w materiale warstw zewnętrznych, określone na podstawie energetycznych hipotez wytrzymałościowych, są funkcją naprężeń $\sigma_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ o następującej postaci:

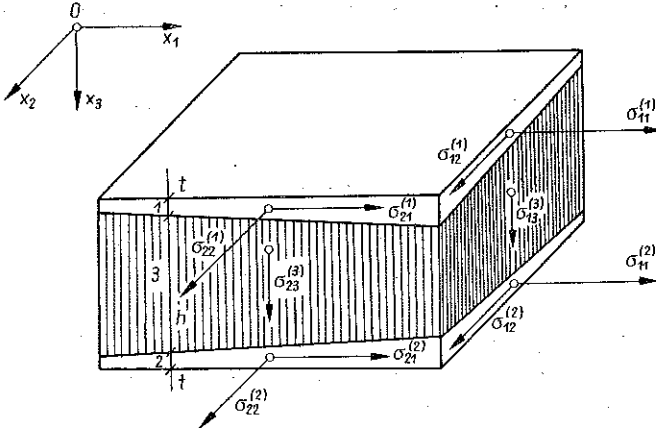
$$(2.1) \quad F(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}) = (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + \frac{6(1+\nu)}{(1-2\nu)\theta + 2(1+\nu)} (\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}).$$

Wyężenia (2.1) są proporcjonalne do jednostkowej energii odkształcenia (hipoteza Beltramiego) lub też do jednostkowej energii odkształceń postaciowych (hipoteza

Hubera-Misesa-Hencky'ego) w zależności od wartości liczbowej współczynnika θ równej 1 lub 0.

W płytach o równomiernej wytrzymałości określone powyżej wyężenia w materiale warstw zewnętrznych spełniają w każdym ich punkcie następujący warunek kształtowania:

$$F(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}) = \sigma_0.$$



Rys. 1

Warunek ten przedstawić możemy również w innej postaci wyrażając naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$ przez ugięcia płyty trójwarstwowej za pomocą ogólnie znanych wzorów [1]

$$\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} [(1-\nu) w_{,\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \nu \Delta w], \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

w których $\delta_{\alpha\beta}$ jest symbolem Kroneckera. Stąd po przekształceniach znajdziemy

$$(2.2) \quad (\Delta w)^2 + \lambda(\theta, \nu) L(w, w) = \frac{4\sigma_0^2}{3E^2 h^2} \kappa(\theta, \nu),$$

gdzie

$$\lambda(\theta, \nu) = \frac{3(1-\nu)^2}{\theta(1-2\nu)(1+\nu) - 6\nu + 2(1+\nu)^2},$$

$$\kappa(\theta, \nu) = (1+\nu) [(1-2\nu)\theta + 2(1+\nu)] \lambda(\theta, \nu);$$

natomiast symbole Δ i L oznaczają następujące operatory:

$$\Delta w = w_{,11} + w_{,22},$$

$$L(w, w) = 2(w_{,12}^2 - w_{,11} w_{,22}).$$

W ten sposób na podstawie warunku kształtowania doszliśmy do równania (2.2) na ugięcia płyt trójwarstwowych o równomiernej wytrzymałości. Równanie to jest nieliniowym równaniem drugiego rzędu o pochodnych cząstkowych. Opisuje ono ugięcia wywołane dowolnym obciążeniem $p(x_1, x_2)$.

Ugięcia płyty swobodnie podpartej są określone przez rozwiązanie tego równania przy warunku brzegowym $w = 0$ na konturze podporowym. Jednakże mogą być one wywołane dowolnym obciążeniem $p(x_1, x_2)$ tylko wówczas, gdy płyta ma warstwy zewnętrzne o określonej zmiennej grubości t . Grubość ta wynika z warunków równowagi płyty pod działaniem obciążeń $p(x_1, x_2)$, w sposób następujący.

Podstawiając do równania równowagi płyty

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 M_{\alpha\beta, \alpha\beta} = -p(x_1, x_2)$$

oraz do warunku brzegowego $M_n = 0$ (na znikanie momentów normalnych płyty wzdłuż konturu podporowego) następujące momenty sił wewnętrznych płyt trójwarstwowych [1];

$$M_{\alpha\beta} = - \sum_{k=1}^3 \int_{-h/2+t}^{h/2+t} \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} x_3 dx_3 = \frac{Eh^2 t}{2(1-\nu^2)} [(1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \nu \Delta w], \alpha\beta = 1, 2$$

otrzymamy równanie

$$(2.3) \quad [t(w_{,11} + \nu w_{,22})]_{,11} + 2(1-\nu)(tw_{,12})_{,12} + [t(w_{,22} + \nu w_{,11})]_{,22} = \frac{2(1-\nu^2)}{Eh^2} p,$$

i warunek brzegowy

$$t(w_{,nn} - \nu w_{,ss}) = 0$$

na konturze płyty.

Otrzymane równanie (2.3) wraz z warunkiem brzegowym określa zmienną grubość warstw zewnętrznych płyt trójwarstwowych swobodnie podpartych o równomiernej wytrzymałości. Ponieważ jednak występujące w tym równaniu współczynniki funkcyjne $w_{,\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2$ są pochodnymi ugięć płyty, przeto rozwiązanie tego równania jest możliwe, jeśli znane są ugięcia płyty wynikające z (2.2).

Rozwiązanie równań (2.2) i (2.3) jest w ogólnym przypadku trudnym problemem matematycznym. W następnym punkcie niniejszej pracy przedstawimy rozwiązania tych równań dla płyty eliptycznej obciążonej równomiernie oraz dla pewnych szczególnych rodzajów płyt prostokątnych. Rozwiązania te będą mogły znaleźć również zastosowania przy konstruowaniu metod przybliżonych i numerycznych rozwiązań innych konkretnych przypadków płyt.

3. Niektóre przypadki rozwiązań

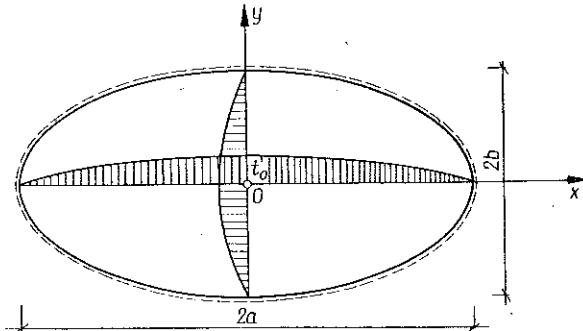
Rozwiązanie równań (2.2) i (2.3) dla płyty eliptycznej (rys. 2) obciążonej równomiernie nie przedstawia większych trudności. Jak nietrudno sprawdzić wykonując proste przekształcenia, ugięcia tej płyty oraz zmienna grubość warstw zewnętrznych mogą być wyrażone po wprowadzeniu zmiennych niezależnych $x_1 = x$ i $x_2 = y$ za pomocą następujących wzorów:

$$(3.1) \quad w = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad t = t_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

gdzie

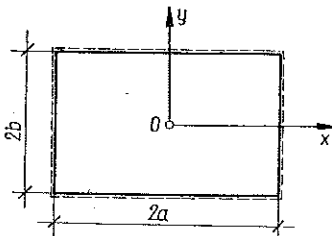
$$w_0 = \frac{\sigma_0 a^2 b^2}{\sqrt{3Eh}} \sqrt{\frac{\kappa}{(a^2+b^2)^2 - 2\lambda a^2 b^2}},$$

$$t_0 = \frac{(1-\nu^2) a^4 b^4 p}{2Eh^2 w_0 (a^4 + 2\nu a^2 b^2 + b^4)}.$$



Rys. 2

Znacznie bardziej skomplikowane staje się rozwiązanie równań (2.2) i (2.3) dla płyt prostokątnych, mających jednakże duże zastosowanie w praktyce inżynierskiej. Dlatego też w dalszym ciągu naszych rozważań przejdziemy do rozpatrzenia płyty prostokątnej o wymiarach wskazanych na rys. 3, przyjmując jednocześnie zmienne $x_1 = x$ i $x_2 = y$.



Rys. 3

Założmy na wstępie, że płyta ta ma wytrzymałość równomierną dla obciążenia $p(x, y)$ nie zmieniającego znaku w rozpatrywanym obszarze. Ugięcia płyty wywołane tym obciążeniem określić możemy rozwiązując równanie (2.3),

$$(w_{,xx} + w_{,yy})^2 + 2\lambda(\theta, \nu)(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy}) = \frac{4\sigma_0^2 \kappa(\theta, \nu)}{3E^2 h^2},$$

przy następujących warunkach brzegowych:

$$[w]_{x=-a} = [w]_{x=a} = [w]_{y=-b} = [w]_{y=b} = 0$$

na krawędziach płyty.

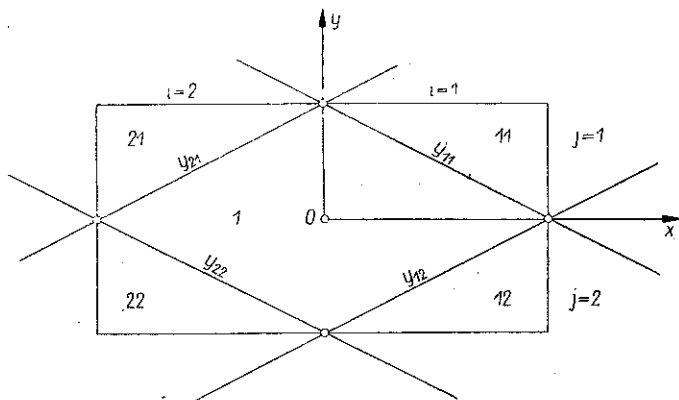
Rozwiązania tego problemu brzegowego poszukiwać będziemy w klasie wielomianów drugiego stopnia dwóch zmiennych o postaci

$$A + A_1 x + B_1 y + A_2 x^2 + B_2 y^2 + Cxy$$

[mogą one być rozwiązaniem szczególnym równania (2.3)].

W celu uzyskania rozwiązania zagadnienia w tej klasie wielomianów podzielimy obszar płyty liniami prostymi na podobszary w sposób wskazany na rys. 4. Oznaczmy cyfrą 1 rombową część środkową obszaru, powstałą wskutek tego podziału, natomiast pozostałe w narożach płyty trójkątne części — wskaźnikiem dwucyfrowym ij , $i, j = 1, 2$ (rys. 4). Przy tych oznaczeniach linie dzielące obszar płyty na podobszary są wyrażone za pomocą równań

$$y_{ij} = -(-1)^j b \left[1 + (-1)^i \frac{x}{a} \right], \quad i, j = 1, 2,$$



Rys. 4

Przyjmijmy następnie, że rozwiązaniem w podobszarze 1 jest rozwiązaniem dla płyty eliptycznej (3.1)₁

$$w_1 = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

gdzie

$$w_0 = \frac{\sigma_0 a^2 b^2}{\sqrt{3} E h} \sqrt{\frac{\kappa}{(a^2 + b^2)^2 - 2\lambda a^2 b^2}};$$

natomiast w podobszarach ij niechaj rozwiązaniami szczególnymi równania (2.3) będą funkcje

$$(3.2) \quad w_{ij} = 2w_0 \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)^2}{2\lambda a^2 b^2} - 1} \left[1 + (-1)^i \frac{x}{a} \right] \left[1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right], \quad i, j = 1, 2,$$

spełniające także warunki brzegowe naszego zagadnienia na krawędziach płyty.

Funkcje w_1 i w_{ij} będą stanowiły rozwiązanie problemu brzegowego w klasie funkcji C_1 dla płyty prostokątnej, jeżeli wzdłuż linii y_{ij} są spełnione następujące warunki ciągłości funkcji ugięć płyty oraz jej pierwszych pochodnych:

$$[w_1]_{y_{ij}} = [w_{ij}]_{y_{ij}}, \quad [w_1, x]_{y_{ij}} = [w_{ij}, x]_{y_{ij}} \quad \text{lub} \quad [w_1, y]_{y_{ij}} = [w_{ij}, y]_{y_{ij}}.$$

Jak nietrudno sprawdzić (wykonując proste obliczenia) warunki te są spełnione w przypadku, gdy zachodzi następujący związek:

$$(3.3) \quad \lambda(\theta, \nu) = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2}.$$

Stąd więc otrzymane w powyższy sposób rozwiązanie zagadnienia (2.3) dla płyty prostokątnej, po wprowadzeniu funkcji Heaviside'a

$$H\left[(-1)^j \frac{y}{b} + 1 + (-1)^i \frac{x}{a}\right] = \begin{cases} 1, & \text{gdy } (-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy } (-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} = 0, \\ 0, & \text{gdy } (-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} < 0, \end{cases}$$

$$H\left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b}\right] = 1 - H\left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b}\right],$$

przedstawić możemy również w następującej postaci:

$$(3.4) \quad w = w_1 \sum_{i,j=1}^2 H\left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b}\right] + \sum_{i,j=1}^2 w_{1j} H\left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b}\right],$$

jeżeli zachodzi równość (3.3).

Rozwiązanie (3.4) wobec warunku (3.3) dotyczy jedynie pewnych przypadków szczególnych płyt prostokątnych. Rozpatrzmy te przypadki.

Przyjmując wyteżenia w materiale według hipotezy Beltramiego mamy

$$\lambda(1, \nu) = 1 - \nu.$$

Stąd z warunku (3.2) otrzymamy równanie

$$1 - \nu = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4a^2 b^2}.$$

Może ono być spełnione jedynie dla płyty kwadratowej, tj. dla $a = b$, oraz gdy jednocześnie współczynnik Poissona $\nu = 0$. Jeżeli natomiast przyjmiemy wyteżenia w materiale według hipotezy Hubera—Misesa—Hencky'ego przyjmując $\theta = 0$, to warunek (3.3) przybierze postać

$$\frac{3(1-\nu)^2}{-6\nu+2(1+\nu)^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2 b^2}.$$

Równanie to jest spełnione, gdy stosunek m długości boków płyty $2a$ do $2b$ wynosi

$$m = \frac{2a}{2b} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\nu+\nu^2)}} [\sqrt{6}(1-\nu) + \sqrt{2(1-4\nu+\nu^2)}],$$

przy założeniu $a \geq b$. Wartości współczynnika ν są zawarte w przedziale $[0, 2 - \sqrt{3}]$. W przypadku szczególnym, gdy $\nu = 0$, mamy $m = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 1,932\dots$, natomiast dla $\nu = 2 - \sqrt{3} = 0,268\dots$, mamy $m = 1$.

Można wskazać również inne rodzaje płyt prostokątnych o równomiernej wytrzymałości, których ugięcia są proporcjonalne do funkcji w_1 i w_{ij} . Mianowicie są to płyty ze skokowo zmienną grubością h warstwy środkowej. Grubość ta jest równa h_1 w podobszarze 1, natomiast w podobszarach ij wynosi h_2 . Skok grubości $h_1 - h_2$ nie jest dowolny i wynika z warunków ciągłości ugięć płyty.

Przejdziemy teraz do określenia zmiennej grubości t warstw zewnętrznych płyt prostokątnych o równomiernej wytrzymałości, ograniczając się przy tym do powyżej wskazanych przypadków szczególnych tych płyt. Ponieważ znamy funkcję (3.4) opisującą ich ugięcia, a zatem zmienną grubość t określić możemy rozwiązując równanie (2.3):

$$[t(w_{,xx} + \nu w_{,yy})]_{,xx} + 2(1-\nu)(tw_{,xy})_{,xy} + [t(w_{,yy} + \nu w_{,xx})]_{,yy} = \frac{2(1-\nu^2)}{Eh^2} p,$$

przy następujących warunkach brzegowych:

$$[(tw_{,xx})]_{x=-a} = [(tw_{,xx})]_{x=a} = [(tw_{,yy})]_{y=-b} = [(tw_{,xx})]_{y=b} = 0$$

na krawędziach płyty. Występujące w tych równaniach wyrażenia $w_{,ij}$ ($i = x, j = y$) określające pochodne funkcji ugięć płyty wyznaczymy różniczkując wzory (3.4) przy uwzględnieniu (3.1)₁, (3.2) i (3.3). Stąd po wykorzystaniu następujących wzorów:

$$\frac{\partial}{\partial y} H[y+f(x)] = \delta[y+f(x)],$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H[y+f(x)] = \delta[y+f(x)]f(x)_{,x},$$

wynikających z definicji funkcji Heaviside'a i Diraca [2, 3]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{y+f(x)}{\varepsilon} \right) = H[y+f(x)],$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi [(y+f(x))^2 + \varepsilon^2]} = \delta[y+f(x)],$$

znajdziemy

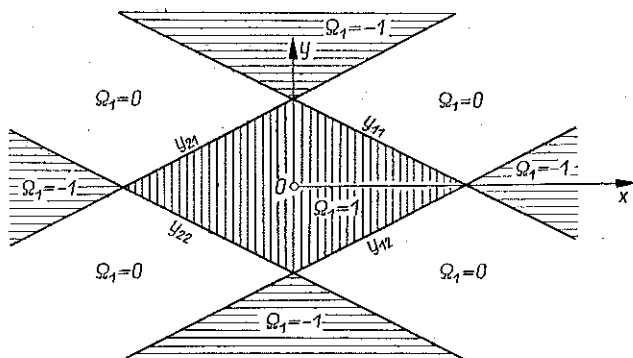
$$(3.5) \quad w_{,xx} = -\frac{2w_0}{a^2} \Omega_1, \quad w_{,yy} = -\frac{2w_0}{b^2} \Omega_1, \quad w_{,xy} = \frac{2w_0}{ab} \Omega_2,$$

gdzie

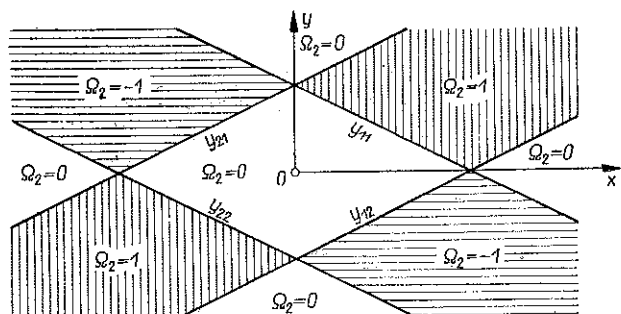
$$\Omega_1 = \sum_{i,j=1}^2 H \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right],$$

$$\Omega_2 = \sum_{i,j=1}^2 (-1)^i (-1)^j H \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b} \right].$$

Wykresy funkcji obszarowych Ω_1 i Ω_2 przedstawiono na rys. 5 i 6.



Rys. 5



Rys. 6

Równanie (2.3) po wykorzystaniu wzorów (3.5) przybiera przeto postać

$$(3.6) \quad (b^2 + va^2) (t\Omega_1)_{,xx} - 2(1-v) ab (t\Omega_2)_{,xy} + (a^2 + vb^2) (t\Omega_1)_{,yy} = - \frac{(1-v^2) a^2 b^2}{Eh^2 w_0} p.$$

Spostrzegamy również po uwzględnieniu wzorów (3.5) oraz wobec zachodzących równości

$$[\Omega_1]_{x=-a} = [\Omega_1]_{x=a} = [\Omega_1]_{y=-b} = [\Omega_1]_{y=b} = 0,$$

że warunki brzegowe zagadnienia zostają tożsamościowo spełnione.

Tak więc zmienną grubość t płyt rozpatrywanych opisuje jedynie równanie (3.6) bez dodatkowych warunków na konturze płyty. Jest to równanie liniowe drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach. Współczynniki te są wyrażone przez funkcje Heaviside'a oraz jej pochodne pierwszego i drugiego rzędu.

Równanie (3.6) przekształcimy sprowadzając je do układu równań, z których każde opisywać będzie funkcję t w odpowiednim podobzdarze 1 oraz ij płyty.

W tym celu przyjmijmy jego rozwiązanie w postaci następującej:

$$(3.7) \quad t = t_1 \Omega_1 + \sum_{i,j=1}^2 t_{ij} H \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b} \right],$$

gdzie t_1 jest grubością warstw zewnętrznych płyty w podobzdarze 1, natomiast t_{ij} , $i, j = 1, 2$ oznacza grubość tych warstw w podobzdarach ij płyty. Również założymy, że wzdłuż linii y_{ij} dzielących obszar płyty na podobzdarzy nie działają liniowe obciążenia pionowe. Przy tym założeniu obciążenia płyty przedstawić możemy w następującej postaci:

$$p = p_1 \Omega_1 + \sum_{i,j=1}^2 p_{ij} H \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b} \right].$$

Oznaczenia p_1 oraz p_{ij} , $i, j = 1, 2$ określają obciążenia płyty w poszczególnych podobzdarach.

Podstawiając powyższe funkcje do równania (3.6) oraz uwzględniając następujące równości wynikające z definicji funkcji Heaviside'a:

$$t \Omega_1 = t_1 \Omega_1,$$

$$t \Omega_2 = \sum_{i,j=1}^2 (-1)^i (-1)^j t_{ij} H \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b} \right],$$

znajdziemy

$$(b^2 + \nu a^2) (t_1 \Omega_1)_{,xx} - 2(1 - \nu) ab \left\{ \sum_{i,j=1}^2 (-1)^i (-1)^j t_{ij} H \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b} \right] \right\}_{,xy} + (a^2 + \nu b^2) (\Omega_1 t_1)_{,yy} = - \frac{(1 - \nu^2) a^2 b^2}{Eh^2 w_0} \times \\ \times \left\{ p_1 \Omega_1 + \sum_{i,j=1,2} p_{ij} H \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{a} \right] \right\}.$$

Stąd po wykonaniu różniczkowania i wykorzystaniu następujących wzorów (por. [2] str. 263):

$$f(x, y) \delta \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right] = f|_{y=y_j} \delta \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right], \\ \delta \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right] = \delta \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b} \right], \\ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \delta \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right] \right\} = -(-1)^i \frac{1}{a} \delta' \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right], \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \delta \left[(-1)^i \frac{y}{b} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right] \right\} = -(-1)^j \frac{1}{b} \delta' \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right],$$

gdzie

$$\delta' \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right] = \frac{\delta \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right]}{(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b}},$$

otrzymamy

$$(3.8) \quad \left[(b^2 + va^2) t_{1,xx} + (a^2 + vb^2) t_{1,yy} + \frac{(1-v^2) a^2 b^2}{Eh^2 w_0} p_1 \right] \Omega_1 + \\ + \sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{(1-v^2) a^2 b^2}{Eh^2 w_0} p_{ij} - 2(1-v) ab (-1)^i (-1)^j t_{ij,xy} \right] \times \\ \times H \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b} \right] + \left[\sum_{i,j=1}^2 \left[\frac{1}{a} (-1)^i (b^2 + va^2) t_{1,x} \right]_{y_{ij}} + \right. \\ \left. + 2[(1-v) a (-1)^i t_{ij,x}]_{y_{ij}} + \left[\frac{1}{b} (-1)^j (a^2 + vb^2) t_{1,y} \right]_{x_{ij}} \right] \times \\ \times \delta \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right] - \left[\sum_{i,j=1}^2 \left\{ \left[\frac{1}{a^2 b^2} (b^4 + 2va^2 b^2 + a^4) t_1 \right]_{y_{ij}} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2[(1-v) t_{ij}]_{y_{ij}} \right\} \delta' \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right] \right] = 0.$$

Ponieważ równanie (3.8) powinno być spełnione w każdym z podobszarów 1 i ij , $i, j = 1, 2$ obszaru płyty oraz wzdłuż linii y_{ij} , $i, j = 1, 2$, zatem występujące w nim wyrażenia przy funkcjach

$$\Omega_1, H \left[-(-1)^i \frac{x}{a} - 1 - (-1)^j \frac{y}{b} \right], \quad i, j = 1, 2$$

oraz przy funkcjach

$$\delta \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right], \quad \delta' \left[(-1)^i \frac{x}{a} + 1 + (-1)^j \frac{y}{b} \right], \quad i, j = 1, 2$$

powinny zniknąć. Stąd otrzymujemy następujące równanie na zmienną grubość t_1 warstw zewnętrznych płyty w podobszarze 1:

$$(3.9) \quad (b^2 + va^2) t_{1,xx} + (a^2 + vb^2) t_{1,yy} = - \frac{(1-v^2) a^2 b^2}{Eh^2 w_0} p_1$$

oraz równania opisujące zmienną grubość t_{ij} , $i, j = 1, 2$, warstw zewnętrznych płyty w podobszarach ij o postaciach

$$(3.10) \quad t_{ij,xy} = (-1)^i (-1)^j \frac{(1+v) ab}{2Eh^2 w_0} p_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

Natomiast wzdłuż linii y_{ij} podziału obszaru płyty na podobszary 1 i ij mamy następujące równania:

$$\begin{aligned}
 & [(a^4 + 2va^2 b^2 + b^4) t_1]_{y_{ij}} + 2[(1 - \nu) a^2 b^2 t_{ij}]_{y_{ij}} = 0, \\
 (3.11) \quad & \left[\frac{1}{a} (b^2 + va^2) (-1)^i t_{1,x} \right]_{y_{ij}} + 2[(1 - \nu) a (-1)^i t_{ij,x}]_{y_{ij}} + \\
 & \quad + \left[\frac{1}{b} (a^2 + \nu b^2) (-1)^j t_{1,y} \right]_{y_{ij}} = 0, \quad i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Ponieważ funkcje t_1 i t_{ij} przybierają jedynie wartości dodatnie, zatem równania (3.11)₁ mogą być spełnione tylko wówczas, gdy

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad & [t_1]_{y_{ij}} = 0, \\
 & [t_{ij}]_{y_{ij}} = 0, \quad i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Wobec znikania t_1 na liniach y_{ij} mamy też

$$[t_{1,x}]_{y_{ij}} = [t_{1,x}]_{y_{ij}} \sin a_{ij} - [t_{1,y}]_{y_{ij}} \cos a_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2,$$

gdzie zgodnie z oznaczeniami wskazanymi na rys. 5

$$\begin{aligned}
 \sin a_{ij} &= -(-1)^j \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\
 \cos a_{ij} &= -(-1)^i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad i, j = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Stąd znajdziemy

$$[t_{1,y}]_{y_{ij}} = \operatorname{tg} a_{ij} [t_{1,x}]_{y_{ij}}.$$

Uwzględniając powyższy wzór równania (3.11)₂ przedstawić możemy również w postaci następującej:

$$(3.13) \quad 2(1 - \nu) a^2 b^2 [t_{ij,x}]_{y_{ij}} + (a^4 + 2va^2 b^2 + b^4) [t_1]_{y_{ij}} = 0.$$

Równania (3.12) i (3.13), określone na liniach y_{ij} , stanowią w odniesieniu do równań (3.9) i (3.10) warunki dodatkowe; mianowicie (3.12)₁ są warunkami brzegowymi dla równania (3.9), natomiast (3.12)₂ i (3.13) określają warunki początkowe dla równań (3.10).

Wyjaśnimy jeszcze sens mechaniczny warunków (3.12) i (3.13). W tym celu oznaczymy przez $[M_n]_{y_{ij}-0}$, $[M_n]_{y_{ij}+0}$ i $[Q_n]_{y_{ij}-0}$, $[Q_n]_{y_{ij}+0}$ momenty zginające i siły poprzeczne płyty, występujące na liniach y_{ij} o normalnych n (rys. 5), działające odpowiednio od wewnętrznej i zewnętrznej strony obszaru 1. Ponieważ zgodnie z przyjętym założeniem wzdłuż linii y_{ij} nie działają obciążenia momentowe ani też siły pionowe, przeto momenty M_n oraz siły poprzeczne Q_n są funkcjami ciągłymi. Warunkami ciągłości tych funkcji są następujące równości

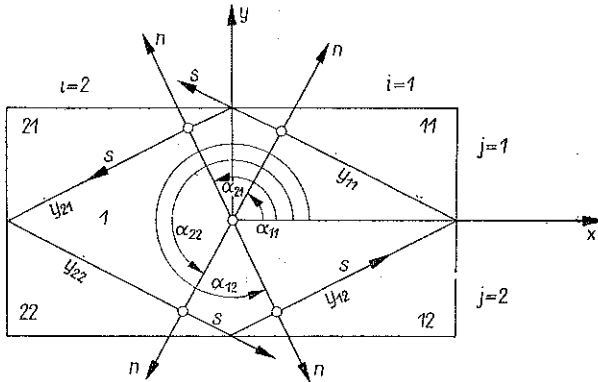
$$\begin{aligned}
 [M_n]_{y_{ij}-0} &= [M_n]_{y_{ij}+0}, \\
 [Q_n]_{y_{ij}-0} &= [Q_n]_{y_{ij}+0}.
 \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów na momenty sił wewnętrznych płyty trójwarstwowej [1] oraz wzorów (3.5) i związków trygonometrycznych wynikających z rys. 7 mamy

$$\begin{aligned} [M_n]_{y_{ij}-0} &= [M_{xx}]_{y_{ij}-0} \cos^2 \alpha_{ij} + [M_{yy}]_{y_{ij}-0} \sin^2 \alpha_{ij} = \\ &= \frac{Ew_0(a^4 + 2va^2b^2 + b^4)}{a^2b^2(a^2 + b^2)(1 - \nu^2)} [t_{11}]_{y_{ij}}, \end{aligned}$$

$$[M_n]_{y_{ij}+0} = [M_{xy}]_{y_{ij}+0} \sin 2\alpha_{ij} = -\frac{2w_0 h^2 E}{(a^2 + b^2)(1 + \nu)} [t_{1j}]_{y_{ij}}, \quad i, j = 1, 2.$$

Przyrównując stronami te równania otrzymamy (3.11)₁, skąd wynikają też warunki (3.12).



Rys. 7

W podobny sposób na podstawie wzorów na siły poprzeczne płyt trójwarstwowych [1] oraz po uwzględnieniu wzorów (3.5) i (3.12) otrzymamy po przekształceniach

$$\begin{aligned} [Q_n]_{y_{ij}-0} &= [Q_x]_{y_{ij}-0} \cos \alpha_{ij} + [Q_y]_{y_{ij}-0} \sin \alpha_{ij} = \\ &= [M_{xx,x}]_{y_{ij}-0} \cos \alpha_{ij} + [M_{yy,y}]_{y_{ij}-0} \sin \alpha_{ij} = \\ &= (-1)^i \frac{w_0 E h^2}{(1 - \nu^2) a^2 b^3 \sqrt{a^2 + b^2}} (b^4 + 2va^2 b^2 + a^4) [t_{1,x}]_{y_{ij}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Q_n]_{y_{ij}+0} &= [Q_x]_{y_{ij}+0} \cos \alpha_{ij} + [Q_y]_{y_{ij}+0} \sin \alpha_{ij} = \\ &= [M_{xy,y}]_{y_{ij}+0} \cos \alpha_{ij} + [M_{xy,x}]_{y_{ij}+0} \sin \alpha_{ij} = \\ &= (-1)^i \frac{2w_0 E h^2}{b(1 + \nu) \sqrt{a^2 + b^2}} [t_{1j,x}]_{y_{ij}}, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Po przyrównaniu powyższych równań stronami dostaniemy warunki (3.13). W ten sposób dochodzimy do wniosku, że warunki (3.12) i (3.13) stanowią warunki ciągłości sił wewnętrznych płyty na liniach y_{ij} wynikające z zachowania równowagi.

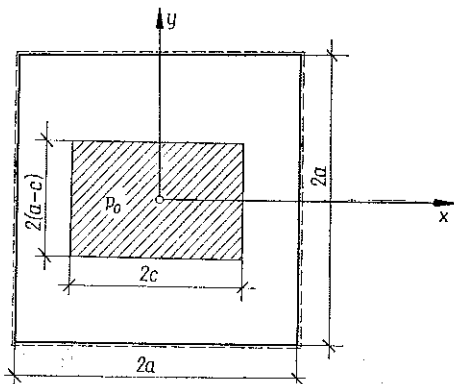
Na podstawie przeprowadzonych rozważań nad równaniem (3.6) wnioskujemy, że aby otrzymać jego rozwiązanie, należy postąpić w sposób następujący.

Najpierw trzeba określić funkcję $t_1 = t$ w podobszarze I rozwiązując równanie (3.9) przy warunkach brzegowych (3.12)₁ na konturze rombówym, utworzonym przez linie y_{ij} , $i, j = 1, 2$. Następnie znając t_1 możemy wyznaczyć funkcje $t_{ij} = t$ w podobszarach ij , $i, j = 1, 2$, rozwiązując równania (3.10) przy warunkach początkowych (3.12)₁ i (3.13). Podstawiając w ten sposób wyznaczone funkcje t_1 i t_{ij} do (3.7) otrzymamy wzór na zmienną grubość warstw zewnętrznych płyt rozpatrywanych.

Ogólne rozwiązanie równań (3.9) i (3.10) można otrzymać stosując metodę skończonej transformacji sinusowej Fouriera. W ten sposób otrzymane rozwiązania będą miały postać nieskończonych szeregów trygonometrycznych. Jednakże w ogólnym przypadku na współczynniki tych szeregów dostaniemy nieskończony układ liniowych równań algebraicznych.

W niniejszej pracy nie będziemy zajmowali się rozwiązywaniem równań (3.9) i (3.10) dla ogólnego przypadku płyty prostokątnej i obciążeń, lecz przedstawimy jedynie pewne ich rozwiązanie w postaci zamkniętej dla płyty kwadratowej o bokach $2a$.

Załóżmy więc, że płyta kwadratowa jest pod obciążeniem p_0 równomiernie rozmieszczonym na prostokącie współśrodkowym o wymiarach wskazanych na rys. 8. Obciążenie to wyrazimy w obszarze $x [0, a]$, $y [0, a]$ ćwiartki płyty za pomocą funkcji



Rys. 8

$$p = p_0 \left[1 - H\left(\frac{x}{c} - 1\right) - H\left(\frac{y}{a} - 1 + \frac{c}{a}\right) \right].$$

Przyjmujemy również wyteżenia materiału warstw zewnętrznych płyty zgodnie z hipotezą Hubera-Misesa-Hencky'ego, tj. założymy $\theta = 0$. Stąd z warunku (3.3) otrzymamy na współczynnik Poissona wartość $\nu = 2 - \sqrt{3}$. Na podstawie wzorów (2.2)₂, (2.2)₃ i (3.1)₃ mamy także

$$\kappa(0, 2 - \sqrt{3}) = 2(3 - \sqrt{3})^2 \lambda(0, 2 - \sqrt{3}), \quad w_0 = \frac{(3 - \sqrt{3}) \sigma_0 a^2}{\sqrt{3} E h}.$$

Wobec symetrii płyty i obciążenia względem osi x i y również zmienna grubość warstw zewnętrznych będzie funkcją symetryczną względem argumentów x i y . Dlatego też w dalszych rozważaniach wszystkie zależności będą rozpatrywane dla ćwiartki płyty określonej obszarem $\{x : [0, a], y : [0, a]\}$.

Uwzględniając poczynione powyżej założenia równanie (3.9) przepiszemy w postaci

$$\Delta t_1 = - \frac{p_0}{h \sigma_0} \left[1 - H\left(\frac{x}{c} - 1\right) - H\left(\frac{y}{a} - 1 + \frac{c}{a}\right) \right].$$

Natomiast warunki brzegowe dla tego równania, wynikające z (3.12)₁ i z symetrii zagadnienia, są następujące:

$$[t_{11}]_{y_{11}=a-x} = 0, \quad [t_{1,x}]_{y=0} = [t_{1,y}]_{x=0} = 0.$$

Rozwiązując to zagadnienie brzegowe metodą analogiczną do metody nakładania ugięć walcowych płyty opisanej w monografii [4] znajdziemy dla rozpatrywanego obszaru

$$(3.14) \quad t_1 = t_0 \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{ca} - \frac{ay^2}{(a-c)a^2} \right) \left[1 - H\left(\frac{x}{c} - 1\right) - H\left(\frac{y}{a} - 1 + \frac{c}{a}\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{a}{c} \left[\left(\frac{y}{a} - 1\right)^2 - \frac{x^2}{a^2} \right] H\left(\frac{y}{a} - 1 + \frac{c}{a}\right) + \right. \\ \left. + \frac{a}{a-c} \left[-\frac{y^2}{a^2} + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \right] H\left(\frac{x}{c} - 1\right) \right\},$$

gdzie

$$t_0 = \frac{p_0 c(a-c)}{2\sigma_0 h}.$$

Stąd obliczymy

$$(3.15) \quad [t_{1,x}]_{y_{11}=a-x} = 2t_0 \left[-\frac{x}{ca} + \frac{x-c}{c(a-c)} H(x-c) \right].$$

Przejdziemy z kolei do wyznaczenia t_{11} . Przyjmując w równaniach (3.10), (3.12)₂ i (3.13), $i = 1$, $j = 1$ oraz $p_{11} = 0$, po uwzględnieniu wzoru (3.15), otrzymamy

$$t_{11,x y} = 0,$$

dla

$$[t_{11}]_{y_{11}=a-x} = 0, \\ [t_{11,x}]_{y_{11}=a-x} = -2\sqrt{3} t_0 \left[-\frac{x}{ca} + \frac{x-c}{c(a-c)} H(x-c) \right].$$

Rozwiązanie tego zagadnienia daje na wartości początkowe t_{11} następujące wyrażenie:

$$(3.16) \quad t_{11} = 2\sqrt{3} \left[\frac{x^2}{2ca} - \frac{(x-c)^2}{2c(a-c)} H(x-c) - \frac{(a-y)^2}{2ca} + \right. \\ \left. + \frac{(a-y-c)^2}{2c(a-c)} H(a-y-c) \right].$$

Funkcję określającą w rozpatrywanym obszarze zmienną grubość warstw zewnętrznych płyty otrzymamy podstawiając (3.14) i (3.16) do wzoru

$$t = t_1 H\left(-\frac{y}{a} + 1 - \frac{x}{a}\right) + t_{11} H\left(\frac{y}{a} - 1 + \frac{x}{a}\right),$$

który wynika z (3.7).

Rozpatrzmy szczegółowo przypadek, gdy obciążenie p_0 jest rozmieszczone na powierzchni kwadratowej. Przyjmując we wzorach (3.14) i (3.16) $c = a/2$ mamy

$$(3.17) \quad \begin{aligned} t_{11} = t_0 & \left\{ \left(1 - 2 \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{y^2}{a^2} \right) \left[1 - H \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) - H \left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\ & \left. + 2 \left[\left(\frac{y}{a} - 1 \right)^2 - \frac{x^2}{a^2} \right] H \left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) + 2 \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 - \frac{y^2}{a^2} \right] H \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ t_{11} = 2\sqrt{3} t_0 & \left[-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - 2 \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right)^2 H \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$t_0 = \frac{p_0 a^2}{8\sigma_0 h}.$$

Stąd znajdziemy grubość warstw zewnętrznych w przekrojach $x = a$, $x = a/2$, $y = x$ i $y = 0$. Jest ona wyrażona za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{aligned} [t]_{x=0} &= t_0 \left[\left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2} \right) H \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right) + 2 \left(\frac{y}{a} - 1 \right)^2 H \left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) \right], \\ [t]_{x=a/2} &= t_0 \left[\frac{1}{2} \left(1 - 4 \frac{y^2}{a^2} \right) H \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right) + \right. \\ & \quad \left. + 2\sqrt{3} \left(-\frac{3}{4} + 2 \frac{y}{a} - \frac{y^2}{a^2} \right) H \left(\frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) \right], \\ [t]_{y=x} &= t_0 \left[\left(1 - 4 \frac{x^2}{a^2} \right) H \left(1 - 2 \frac{x}{a} \right) + \right. \\ & \quad \left. + 2\sqrt{3} \left(-\frac{3}{2} - 2 \frac{x^2}{a^2} + 4 \frac{x}{a} \right) H \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) \right], \\ [t]_{y=a} &= 2\sqrt{3} t_0 \left[\frac{x^2}{a^2} H \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{a} \right) + H \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{x^2}{a^2} + 2 \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

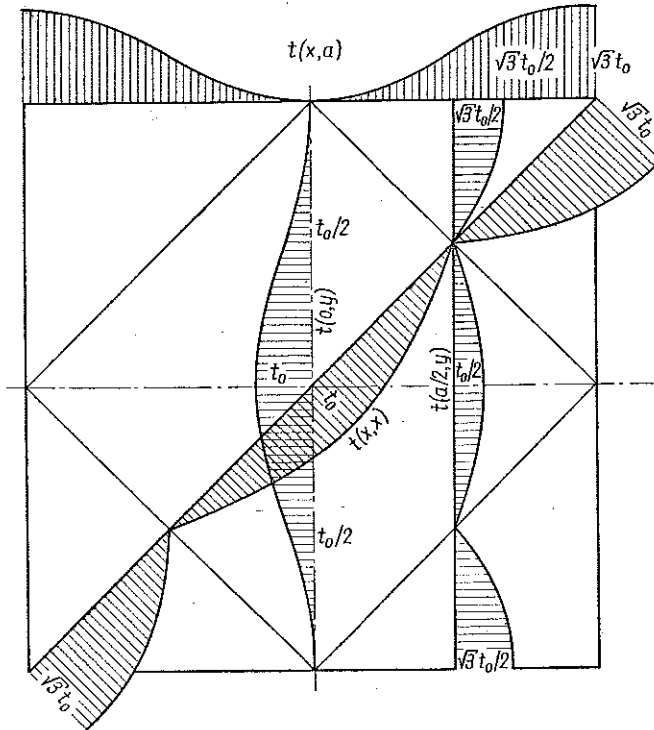
Wykresy tych funkcji przedstawiono na rys. 9.

4. Uwagi końcowe

W zakończeniu naszych rozważań porównamy objętość warstw zewnętrznych o zmiennej grubości w płytach o równomiernej wytrzymałości z objętością warstw zewnętrznych o stałej grubości w płytach o nierównomiernej wytrzymałości. W obu tych przypadkach warstwy zewnętrzne są wykonane z tego samego materiału. Wymiary warstw środkowych są jednakowe. Również płyty znajdują się pod działaniem tych samych obciążeń zewnętrznych.

Maksymalne wyężenie w materiale warstw zewnętrznych o stałej grubości w płycie o nierównomiernej wytrzymałości jest równe wartości dopuszczalnej σ_0 . Natomiast w płycie o równomiernej wytrzymałości wyężenia w materiale warstw zewnętrznych są oczywiście stałe w obszarze płyty i wynoszą również σ_0 .

Rozważania nasze dotyczyć będą płyty kwadratowej rozpatrzonej w poprzednim punkcie pracy oraz płyty kołowej pod obciążeniem równomiernym.



Rys. 9

Wpierw zajmiemy się płytą kwadratową. Objętość warstwy zewnętrznej płyty o równomiernej wytrzymałości na podstawie wzorów (3.17) wynosi

$$\begin{aligned}
 V_{\text{opt}} &= 4 \int_0^a \int_0^a t(x, y) dx dy = 4(1+\sqrt{3}) \int_0^a dx \int_0^a t_1(x, y) dy = \\
 &= 4(1+\sqrt{3}) \left\{ \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \left(1 - 2\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{y^2}{a^2} \right) dx dy + 4 \int_0^{a/2} dx \int_0^{a-x} \left[\left(\frac{y}{a} - 1 \right)^2 - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{x^2}{a^2} \right] dy \right\} = \frac{5(1+\sqrt{3})}{6} t_0 a^2 = \frac{5(1+\sqrt{3})}{48} \frac{p_0 a^4}{\sigma_0 h} \approx 0,285 \frac{p_0 a^4}{\sigma_0 h}.
 \end{aligned}$$

W przypadku gdy warstwy zewnętrzne tej płyty mają stałą grubość t największe wyężenia w materiale tych warstw powstaną w punktach środkowych płyty $x = 0$, $y = 0$. Na podstawie zestawienia w pracy [5] momentów płyty M_{xx} i M_{yy} mamy

dla naszego przypadku obciążenia i przy współczynniku Poissona $\nu = 2 - \sqrt{3} \sim 0,268$

$$[M_{xx}]_{x=0} = [M_{yy}]_{x=0} = 0,116 \frac{1-0,3}{\sqrt{3}-1} p_0 a^2 \sim 0,111 p_0 a^2,$$

$$[M_{xy}]_{x=0} = 0.$$

Stąd po uwzględnieniu wzorów na naprężenia w warstwach zewnętrznych płyty trójwarstwowej [1]

$$\sigma_{ij}^{(\gamma)} = (-1)^\gamma \frac{M_{ij}}{ht'}, \quad i, j = x, y, \quad \gamma = 1, 2,$$

na podstawie (2.1) znajdziemy

$$F_{\max} \approx \left(\frac{0,111 a_0}{ht'} \right)^2.$$

Przyrównując F_{\max} do wartości dopuszczalnej σ_0 określimy

$$t' \sim 0,111 \frac{p_0 a^2}{\sigma_0 h},$$

a zatem znajdziemy objętość warstw zewnętrznych:

$$V' \approx 4a^2 t' \sim 0,444 \frac{p_0 a^2}{\sigma_0 h}.$$

Porównując tę objętość z objętością V_{opt} spostrzegamy, że

$$V' \approx 1,55 V_{\text{opt}}.$$

Wynika stąd, że objętość materiału w warstwach zewnętrznych w kwadratowej płycie optymalnej jest 1,5-krotnie mniejsza niż w płycie o stałej grubości warstw zewnętrznych.

Jeszcze większa różnica w objętościach warstw zewnętrznych wystąpi w przypadku płyty kołowej obciążonej równomiernie. Objętość warstw zewnętrznych w płycie optymalnej na podstawie wzorów (3.1) wynosi

$$V_{\text{opt}} = \frac{\pi a^2 t_0}{2} = \frac{\pi(1-\nu)\sqrt{3}pa^4}{4h\sigma_0} \sqrt{\frac{2(2-\lambda)}{\lambda}}.$$

Postępując w podobny sposób jak w przypadku płyty kwadratowej, po uwzględnieniu wzorów na momenty w środku płyty kołowej o stałej sztywności [5]

$$M_{xx} = M_{yy} = \frac{3+\nu}{16} pa^2, \quad M_{xy} = 0,$$

znajdziemy następujący wzór na stałą grubość t' warstw zewnętrznych:

$$t' = \frac{(3+\nu)pa^2}{16h\sigma_0} \sqrt{4 - \frac{6(1+\nu)}{(1-2\nu)\theta + 2(1+\nu)}}$$

Objętość V' tych warstw wynosi więc

$$V' = \pi a^2 t' = \frac{\pi(3+\nu)pa^2}{16h\sigma_0} \sqrt{4 - \frac{6(1+\nu)}{(1-2\nu)\theta + 2(1+\nu)}}$$

Porównując V' z objętością V_{opt} po uwzględnieniu (2.2)₂ i (2.2)₃ oraz po przekształceniach znajdziemy

$$V' = \frac{3+\nu}{\sqrt{2}} V_{\text{opt}} > 2V_{\text{opt}}$$

Przedstawione porównania wskazują w jakim stopniu możemy zmniejszyć zużycie materiałów konstrukcyjnych na wykonanie płyty trójwarstwowej poprzez optymalizację.

Literatura cytowana w tekście

1. L. F. J. PLANTEMA, *Sandwich Construction — The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates and Shells*, John Wiley & Sons, Amsterdam 1966.
2. И. М. Гельдаанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Госуд. Издат. Физ.-мат. литературы, Москва 1959.
3. В. В. Новицкий, *Дельта функция и ее применение в строительной механике*, Расчет Пространственных конструкций, 8, Москва 1962, 207 — 244.
4. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty, obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
5. S. TIMOSHENKO, S. WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells*, tłumacz. z ang., Arkady, Warszawa 1962.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМЫ ТРЕХСЛОЙНЫХ, СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИНОК РАВНОМЕРНОЙ ПРОЧНОСТИ

В работе, формулируются задачи по определению переменной толщины внешних слоев, трехслойных пластинок равномерной прочности. Принимается при этом, что толщина срединного слоя — постоянна. Материал внешних слоев — упругий. Натяжения возникающее в нем, вследствие поперечного нагружения пластинки, определяется по энергетическим гипотезам.

Поставленный выше вопрос, приводит к проблеме решения двух уравнений с частными производными: нелинейного уравнения второго порядка, для прогиба пластинки равномерной прочности и линейного уравнения, также, второго порядка с функциональными коэффициентами, описывающего толщину внешних слоев равномерной прочности пластинки. В этом втором уравнении, переменными коэффициентами являются вторые производные функции прогиба пластинки.

Эти уравнения решены для эллиптической равномерно нагруженной пластинки и для некоторых случаев прямоугольных пластинок. Решение для квадратной пластинки иллюстрируется диаграммами переменной толщины внешних слоев.

Summary

SOME CASES OF THE FORMING OF FREELY SUPPORTED
THREE-LAYER PLATES WITH UNIFORM STRENGTH

In this paper is formulated the problem of determining the varying thickness of external layers in three-layer plates of uniform strength. It is assumed that the thickness of the central layer is constant. The material of the external layers of the plate is elastic. The stresses arising in it due to the transverse load of the plate are determined according to energy hypotheses.

The above problem leads to the problem of solving two equations containing partial derivatives: a nonlinear equation of the second order for the bending of the plate with uniform strength, and a linear equation of the second order with functional coefficients describing the thickness of the external plates with uniform strength. In the second equation the coefficients consist of the second derivatives of the bending function of the plate. These equations are solved for an elliptical plate uniformly loaded, and for some cases of rectangular plates. The solution for a square plate is illustrated by graphs of the varying thickness of the external layers.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 listopada 1968 r.
