

NAPRĘŻENIA DYNAMICZNE W CIENKIEJ TARCZY KOŁOWEJ,  
WYWOŁANE DZIAŁANIEM NIEUSTALONYCH ŹRÓDEŁ CIEPŁA

STANISŁAW WOELKE (POZNAŃ)

Oznaczenia

- $a$  promień tarczy,  
 $ber_p(\zeta)$ ,  
 $bei_p(\zeta)$  funkcje Kelvina rzędu  $p$ ,  
 $\alpha_T$  współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej,  
 $c$  prędkość fali podłużnej,  
 $c_w$  ciepło właściwe,  
 $\delta_{ij}$  symbol Kroneckera,  
 $\delta(\zeta)$  funkcja Diraca,  
 $\varepsilon_{ij}$  współrzędne tensora odkształcenia,  
 $\varepsilon_{ii}$  dylatacja,  
 $\eta(\zeta)$  funkcja Heaviside'a,  
 $G$  moduł odkształcenia postaciowego,  
 $I_p(\zeta)$  zmodyfikowana funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu  $p$ ,  
 $J_p(\zeta)$  funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu  $p$ ,  
 $\kappa$  współczynnik przewodzenia temperatury,  
 $K_p(\zeta)$  zmodyfikowana funkcja Bessela drugiego rodzaju rzędu  $p$ ,  
 $\nu$  współczynnik Poissona,  
 $\omega$  częstość kołowa,  
 $\nabla^2$  operator Laplace'a,  
 $r$  współrzędna promieniowa w układzie biegunowym,  
 $R, \zeta$  zmienne parametry,  
 $\rho$  gęstość,  
 $s$  parametr transformacji Laplace'a,  
 $\sigma_{ij}$  współrzędne tensora naprężenia,  
 $\sigma_{(rez)}$  naprężenie rezonansowe,  
 $t$  czas,  
 $T$  temperatura względna, odniesiona do temperatury stanu beznaprężeniowego,  
 $u$  przemieszczenie promieniowe,  
 $u_{rez}$  przemieszczenie rezonansowe,  
 $W$  wydajność źródła ciepła w jednostce czasu i jednostce objętości.

## 1. Sformułowanie zagadnienia

W pracy wyznaczono pola temperatury, przemieszczeń i naprężeń w cienkiej tarczy kołowej o promieniu  $a$ , w obszarze której działają źródła ciepła, opisane wzorami

$$(1.1) \quad \begin{aligned} Q &= Q_0 \frac{\delta(r-R)}{2\pi R} e^{i\omega t}, \\ Q &= Q_0 \frac{\delta(r-R)}{2\pi R} \eta(t), \\ Q &= Q_0 \eta(R-\zeta) e^{i\omega t}, \\ Q &= Q_0 \eta(R-\zeta) \eta(t). \end{aligned} \quad \begin{aligned} (R, r, \zeta) < a, \\ \\ Q_0 &= \frac{W}{\rho c_w}, \end{aligned}$$

Założono, że materiał tarczy jest izotropowy pod względem mechanicznym i termicznym, a jego własności nie zależą od temperatury. Przyjęto warunki termiczne zapewniające izolację płaszczyzn tarczy oraz doskonałą wymianę ciepła między jej obwodem i otoczeniem. Rozpatrzony problem należy do klasy niesprężonych zagadnień dynamicznych termosprężystości, których szeroki wachlarz jest ujęty w wielu pracach, np. [1, 9, 10] i innych. Jednakże jak dotąd niewiele jest prac, zawierających ilościową ocenę efektów inercji [5 i 12].

Badanie zjawisk dynamicznych w sformułowanym tutaj zagadnieniu prowadzi do ciekawych wniosków. Analiza rozwiązań, uzyskanych w przypadku ogrzania tarczy źródłami ciepła opisanymi wzorami (1.1)<sub>1</sub> i (1.1)<sub>3</sub> udzieliła odpowiedzi na pytanie, w jakich warunkach jest możliwe wystąpienie rezonansu mechanicznego, wywołanego wymuszeniem termicznym. Wydaje się, że tego rodzaju zagadnienie nie było dotąd stawiane ani publikowane.

W pierwszej kolejności wyznaczono funkcje Greena dla temperatury, przemieszczeń i naprężeń.

## 2. Funkcje Greena

Wszystkie rozwiązania uzyskano stosując metodę funkcji Greena. Obrany sposób nakazuje, aby jako podstawowe uważać rozwiązania, które otrzymuje się przy ogrzaniu tarczy źródłem ciepła

$$Q = Q_0 \frac{\delta(r-R)}{2\pi R} \delta(t).$$

Funkcją Greena dla temperatury przy  $Q_0 = 1$  jest rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego [6]

$$(2.1) \quad \nabla^2 T = \frac{\dot{T}}{\kappa} - \frac{Q_0}{\kappa} \frac{\delta(r-R)}{2\pi R} \delta(t), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}$$

z warunkiem początkowym

$$(2.2) \quad T(r, 0) = 0$$

oraz z warunkami brzegowymi

$$(2.3) \quad T(a, t) = 0, \quad T(0, t) < \infty.$$

Przy rozwiązywaniu równania (2.1) korzystano z transformacji Laplace'a [7] oraz z rozwinięcia funkcji Diraca w szereg funkcji Bessela [11]:

$$(2.4) \quad \delta(r - R) = \frac{2R}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n R) J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n a)},$$

przy czym wartości  $a_n$  wyznacza się z równania przestępnego

$$(2.5) \quad J_0(a_n a) = 0.$$

Rozwiązanie spełniające warunki (2.2) i (2.3) ma postać

$$(2.6) \quad T(r, t) = \frac{Q_0}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n R) J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n a)} e^{-\kappa a_n^2 t}.$$

Funkcję Greena dla przemieszczeń otrzymano przez rozwiązanie właściwego w przypadku płaskiego stanu naprężenia równania ruchu [8]

$$(2.7) \quad \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u - \frac{\ddot{u}}{c^2} = k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad k = a_T(1+\nu), \quad c^2 = \frac{2G}{\rho(1-\nu)}$$

z warunkami początkowymi

$$(2.8) \quad u(r, 0) = \dot{u}(r, 0) = 0$$

i brzegowymi

$$(2.9) \quad u(0, t) = \sigma_{rr}(a, t) = 0,$$

przy czym  $\sigma_{rr}$  jest naprężeniem radialnym.

Po zastosowaniu transformacji Laplace'a równanie (2.7) przyjmuje postać

$$(2.10) \quad \frac{d^2 u_L}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_L}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + p^2 \right) u_L = k \frac{dT_L}{dr}, \quad p = \frac{s}{c},$$

gdzie  $u_L = u_L(r, s)$  i  $T_L = T_L(r, s)$  są transformacjami odpowiednio przemieszczenia i temperatury.

Rozwiązania równania (2.10) poszukiwano w postaci sumy

$$u_L = u_{L1} + u_{L2}.$$

Tutaj  $u_{L1}$  jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$(2.11) \quad \frac{d^2 u_{L1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_{L1}}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + p^2 \right) u_{L1} = 0,$$

a  $u_{L2}$  jest całką szczególną równania

$$(2.12) \quad \frac{d^2 u_{L2}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_{L2}}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + p^2 \right) u_{L2} = - \frac{Q_0 k}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n J_0(a_n R) J_1(a_n r)}{(s + \kappa a_n^2) J_1^2(a_n a)}.$$

Rozwiązaniem równania (2.11), z uwagi na pierwszy warunek (2.9), jest funkcja

$$u_{L1} = BI_1(pr),$$

gdzie  $B$  jest stałą całkowania.

Całka szczególna równania (2.12) ma postać

$$u_{L2} = \frac{Q_0 k}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n J_0(\alpha_n R) J_1(\alpha_n r)}{(\alpha_n^2 + p^2)(s + \kappa \alpha_n^2) J_1^2(\alpha_n a)}.$$

Łącząc w sumę  $u_{L1}$  i  $u_{L2}$  i wyznaczając stałą  $B$  z drugiego warunku (2.9) otrzymano transformatę przemieszczenia

$$(2.13) \quad u_L = \frac{Q_0 k c^2}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n J_0(\alpha_n R)}{(s^2 + \alpha_n^2 c^2)(s + \kappa \alpha_n^2) J_1(\alpha_n a)} \times \left[ \frac{J_1(\alpha_n r)}{J_1(\alpha_n a)} + \frac{2GI_1\left(s \frac{r}{c}\right)}{\rho a c s I_0\left(s \frac{a}{c}\right) - 2GI_1\left(s \frac{a}{c}\right)} \right].$$

Całkę konturową odwrotnego przekształcenia Laplace'a [7]

$$u(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} u_L(r, s) e^{st} ds$$

obliczono metodą residuów. W tym celu określono bieguny funkcji podcałkowej. W płaszczyźnie zmiennej zespolonej funkcja ta ma nieskończony ciąg biegunów rzeczywistych ujemnych w punktach

$$s_{n1} = -\kappa \alpha_n^2,$$

oraz dwa nieskończone ciągi biegunów urojonych w punktach

$$s_{n2} = \pm i \alpha_n c, \quad s_m = \pm i \beta_m.$$

Tutaj wyrazy ciągu  $s_m$  spełniają równanie

$$(2.14) \quad \rho a c s_m I_0\left(s_m \frac{a}{c}\right) - 2GI_1\left(s_m \frac{a}{c}\right) = 0.$$

W pracy [1] podano dowód, że wszystkie pierwiastki tego równania są urojone i dlatego przyjęto je w postaci  $s_m = \pm i \beta_m$ . Tym samym równanie (2.14) można napisać w sposób następujący:

$$(2.15) \quad \rho a c \beta_m J_0\left(\beta_m \frac{a}{c}\right) - 2GJ_1\left(\beta_m \frac{a}{c}\right) = 0, \quad m = \pm(1, 2, \dots).$$

Pierwiastek  $s_0 = 0$  spełnia także równanie (2.14); nie jest on jednak biegunem transformaty (2.13). Obliczając granicę

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{I_1 \left( s \frac{r}{c} \right)}{\rho a c s I_0 \left( s \frac{a}{c} \right) - 2GI_1 \left( s \frac{a}{c} \right)}$$

stwierdzono, że ma ona skończoną wartość, a wobec tego  $s_0 = 0$  jest biegunem pozornym.

Z podsumowania rozważań wynika, że wszystkie bieguny transformaty (2.13) są jednokrotne. O obliczaniu reszduów w takich biegunach traktują szczegółowo monografie [2 i 3]. Suma reszduów jest poszukiwanym polem przemieszczeń:

$$(2.16) \quad u(r, t) = \frac{Q_0 kc^2}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n R)}{J_1(a_n a)} \times \left\{ \frac{\exp(-\kappa a_n^2 t)}{a_n (c^2 + \kappa^2 a_n^2)} \left[ \frac{J_1(a_n r)}{J_1(a_n a)} + \frac{2GI_1 \left( \kappa a_n^2 \frac{r}{c} \right)}{\rho a c \kappa a_n^2 I_0 \left( \kappa a_n^2 \frac{a}{c} \right) - 2GI_1 \left( \kappa a_n^2 \frac{a}{c} \right)} \right] + 4G \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_n \beta_m [\kappa a_n^2 \sin(\beta_m t) - \beta_m \cos(\beta_m t)] J_1 \left( \beta_m \frac{r}{c} \right)}{[\rho a^2 \beta_m^2 - 2G(1-\nu)] (a_n^2 c^2 - \beta_m^2) (\kappa^2 a_n^4 + \beta_m^2) J_1 \left( \beta_m \frac{a}{c} \right)} \right\}$$

Szereg podwójny, występujący we wzorze (2.16), sprowadzono do szeregu pojedynczego dzięki możliwości wykonania sumowania względem wskaźnika  $n$ . W oparciu o zamieszczone w Dodatku wzoły (D.10)<sub>1</sub> i (D.11) przekształcono wyrażenie (2.16) do postaci

$$(2.17) \quad u(r, t) = \frac{Q_0 kc^2}{\pi a^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n R) \exp(-\kappa a_n^2 t)}{a_n (c^2 + \kappa^2 a_n^2) J_1(a_n a)} \left[ \frac{J_1(a_n r)}{J_1(a_n a)} + \frac{2GI_1 \left( \kappa a_n^2 \frac{r}{c} \right)}{\rho a c \kappa a_n^2 I_0 \left( \kappa a_n^2 \frac{a}{c} \right) - 2GI_1 \left( \kappa a_n^2 \frac{a}{c} \right)} \right] + 2Ga \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1 \left( \beta_m \frac{r}{c} \right)}{(c^4 + \kappa^2 \beta_m^2) [\rho a^2 \beta_m^2 - 2G(1+\nu)] J_1 \left( \beta_m \frac{a}{c} \right)} \right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{M(\lambda_m R)}{M(\lambda_m a)} [c^2 \cos(\theta_m - \Phi_m - \beta_m t) + \kappa \beta_m \sin(\theta_m - \Phi_m - \beta_m t)] - \frac{J_0\left(\beta_m \frac{R}{c}\right)}{J_0\left(\beta_m \frac{a}{c}\right)} [c^2 \cos(\beta_m t) - \kappa \beta_m \sin(\beta_m t)] \right\}, \quad \lambda_m^2 = \frac{\beta_m}{\kappa},$$

przy czym funkcje Kelvina przedstawiono tutaj w postaci biegunowej [13]

$$(2.18) \quad M^2(\lambda_m R) = \text{ber}^2(\lambda_m R) + \text{bei}^2(\lambda_m R), \quad \Phi_m(\lambda_m R) = \text{arc tg} \frac{\text{bei}(\lambda_m R)}{\text{ber}(\lambda_m R)},$$

$$M^2(\lambda_m a) = \text{ber}^2(\lambda_m a) + \text{bei}^2(\lambda_m a), \quad \theta_m(\lambda_m a) = \text{arc tg} \frac{\text{bei}(\lambda_m a)}{\text{ber}(\lambda_m a)}.$$

Zastosowanie następujących zmiennych bezwymiarowych:

$$(2.19) \quad R_0 = \frac{R}{a}, \quad r_0 = \frac{r}{a}, \quad z_n = \alpha_n a, \quad z_m = \beta_m \frac{a}{c}, \quad x_m = \sqrt{\frac{z_m}{h}}, \quad \tau = \frac{ct}{a},$$

$$\varphi_m = \Phi_m(x_m R_0), \quad \vartheta_m = \theta_m(x_m), \quad h = \frac{\kappa}{ac}, \quad b = \frac{\rho c^2}{2G}, \quad d = 2 - \frac{1}{b}$$

umożliwiło napisanie wzoru (2.17) w postaci

$$(2.20) \quad u(r_0, \tau) \frac{\pi a}{Q_0 k} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m U_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n,$$

gdzie

$$(2.21) \quad A_m = \frac{1}{(1+h^2 z_m^2)(bz_m^2-d)J_1(z_m)} \left\{ \frac{M(x_m R_0)}{M(x_m)} \left[ \cos(\vartheta_m - \varphi_m - z_m \tau) + \right. \right. \\ \left. \left. + h z_m \sin(\vartheta_m - \varphi_m - z_m \tau) - \frac{J_0(z_m R_0)}{J_0(z_m)} (\cos z_m \tau - h z_m \sin z_m \tau) \right] \right\}.$$

$$A_n = \frac{J_0(z_n R_0) \exp(-h z_n^2 \tau)}{z_n (1+h^2 z_n^2) J_1(z_n)},$$

$$U_m = J_1(z_m r_0), \quad U_n = \frac{J_1(z_n r_0)}{J_1(z_n)} + \frac{I_1(h z_n^2 r_0)}{b h z_n^2 I_0(h z_n^2) - I_1(h z_n^2)}.$$

Związki fizyczne w przypadku płaskiego stanu naprężenia, wyrażone we współrzędnych biegunowych, mają następującą budowę [6]:

$$(2.22) \quad \sigma_{ij} = \frac{2G}{1-\nu} [(1-\nu) \varepsilon_{ij} + (\nu \varepsilon_{ll} - kT) \delta_{ij}], \quad i, j = r, \vartheta,$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{ll} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}.$$

Po podstawieniu w powyższe związki przemieszczenia (2.17) uzyskano naprężenia przedstawione w postaci bezwymiarowej

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} \frac{\pi a^2}{2GkQ_0} &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m M_m - \sum_{n=1}^{\infty} A_n N_n, \\ \sigma_{\theta\theta} \frac{\pi a^2}{2GkQ_0} &= \sum_{m=1}^{\infty} A_m N_m + \sum_{n=1}^{\infty} A_n N_n. \end{aligned}$$

We wzorach (2.23) wprowadzono oznaczenia

$$(2.24) \quad \begin{aligned} M_m &= bz_m J_0(z_m r_0) - \frac{1}{r_0} J_1(z_m r_0), \\ N_m &= (b-1) z_m J_0(z_m r_0) + \frac{1}{r_0} J_1(z_m r_0), \\ N_n &= \frac{1}{r_0 J_1(z_n)} [J_1(z_n r_0) + bh^2 r_0 z_n^3 J_0(z_n r_0)] - \\ &\quad - \frac{1}{r_0} \frac{bhr_0 z_n^2 I_0(hz_n^2 r_0) - I_1(hz_n^2 r_0)}{bh z_n^2 I_0(hz_n^2) - I_1(hz_n^2)}, \\ N_n &= \frac{1}{r_0 J_1(z_n)} [J_1(z_n r_0) - z_n r_0 (1 + bh^2 z_n^2) J_0(z_n r_0)] + \\ &\quad + \frac{1}{r_0} \frac{(b-1) hr_0 z_n^2 I_0(hz_n^2 r_0) + I_1(hz_n^2 r_0)}{bh z_n^2 I_0(hz_n^2) - I_1(hz_n^2)}. \end{aligned}$$

Wprowadzone wzory są poprawne również w przypadku, gdy  $R \rightarrow 0$  (lub w zmiennych bezwymiarowych  $R_0 \rightarrow 0$ ), a więc wówczas gdy chwilowe punktowe źródło ciepła jest przyłożone w środku tarczy. Pokazano to na przykładzie przemieszczenia określonego wzorem (2.20). Wiedząc, że

$$\lim_{R_0 \rightarrow 0} J_0(z_\mu R_0) = 1, \quad \lim_{R_0 \rightarrow 0} M(x_\mu R_0) = 1, \quad \mu = n, m$$

otrzymano wzór

$$(2.25) \quad \begin{aligned} u(r_0, \tau) \frac{\pi a}{Q_0 k} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{U_m}{(1+h^2 z_m^2)(bz_m^2-d)J_1(z_m)} \left\{ \frac{1}{M(x_m)} [\cos(\vartheta_m - \right. \\ &\quad \left. - z_m \tau) + h z_m \sin(\vartheta_m - z_m \tau)] - \frac{1}{J_0(z_m)} [\cos(z_m \tau) - h z_m \sin(z_m \tau)] \right\} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n \exp(-h z_n^2 \tau)}{z_n (1+h^2 z_n^2) J_1(z_n)}. \end{aligned}$$

W podobny sposób można znaleźć wzory opisujące stan naprężenia w przypadku, gdy  $R_0 \rightarrow 0$ .

Rozwiązania (2.6), (2.20) i (2.23), opisujące pole temperatury oraz stan przemieszczenia i naprężenia, są dla źródła ciepła  $Q_0 = 1$  funkcjami Greena dla każdej obrotowo-symetrycznej funkcji źródeł o dowolnym wydatku w czasie. Funkcje te mogą posłużyć do uzyskania nowych rozwiązań.

Gdy na okręgu o promieniu  $R$  będzie działać źródło  $Q(\xi)$  o znanej wydajności w czasie, wówczas pola temperatury, przemieszczeń i naprężeń oblicza się za pomocą całki Duhamela [7]:

$$(2.26) \quad \begin{cases} \tilde{T}(R, r, t) \\ \tilde{u}(R, r, t) \\ \tilde{\sigma}_{ii}(R, r, t) \end{cases} = \int_0^t Q(\xi) \begin{cases} T^*(R, r, t - \xi) \\ u^*(R, r, t - \xi) \\ \sigma_{ii}^*(R, r, t - \xi) \end{cases} d\xi, \quad i = r, \vartheta.$$

Jeśli w obszarze pierścienia kołowego o promieniach  $R_1$  i  $R_2$  jest znana, jako funkcja miejsca i czasu, wydajność źródła ciepła  $Q(\zeta, \xi)$ , to poszukiwane wielkości wyznacza się ze wzoru

$$(2.27) \quad \begin{cases} T(R_1, R_2, r, t) \\ u(R_1, R_2, r, t) \\ \sigma_{ii}(R_1, R_2, r, t) \end{cases} = 2\pi \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} Q(\zeta, \xi) \begin{cases} T^*(\zeta, r, t - \xi) \\ u^*(\zeta, r, t - \xi) \\ \sigma_{ii}^*(\zeta, r, t - \xi) \end{cases} \zeta d\xi d\zeta.$$

We wzorach (2.26) i (2.27)  $T^*$ ,  $u^*$  i  $\sigma_{ii}^*$  są dla zmiennych naturalnych  $R, r$  i  $t$  odpowiednio rozwiązaniami (2.6), (2.20) i (2.23), w których przyjęto  $Q_0 = 1$ .

Znajomość funkcji Greena pozwoliła na uzyskanie rozwiązań szczegółowych dla przypadków źródeł oznaczonych numerami od (1.1)<sub>1</sub> do (1.1)<sub>4</sub>.

### 3. Pola temperatury

W pierwszej kolejności wyznaczono pole temperatury, wywołane działaniem na okręgu o promieniu  $R$  źródła ciepła (1.1)<sub>1</sub> o harmonicznie zmiennej wydajności w czasie. Po scałkowaniu funkcji (2.6) według wzoru (2.26) otrzymano

$$(3.1) \quad \tilde{T}_\omega(r, t) = \frac{Q_0}{\pi a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n R) J_0(a_n r)}{(\kappa a_n^2 + i\omega) J_1^2(a_n a)} [e^{i\omega t} - \exp(-\kappa a_n^2 t)].$$

Przejście graniczne  $\omega \rightarrow 0$  wykonane w ostatnim wzorze pozwala na wyznaczenie funkcji temperatury w tarczy, do której na okręgu o promieniu  $R$  jest przyłożone źródło ciepła o stałej wydajności w czasie opisane wzorem (1.1)<sub>2</sub>. Funkcja ta ma postać

$$(3.2) \quad \tilde{T}_\eta(r, t) = \frac{Q_0}{\pi \kappa a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n R) J_0(a_n r)}{a_n^2 J_1^2(a_n a)} [1 - \exp(-\kappa a_n^2 t)].$$

Taki sam wynik można otrzymać wprost ze wzoru (2.26).



Rozwiązania (3.1) i (3.2) opisują niestacjonarne pola temperatury. Z takimi polami mamy do czynienia w procesie szybkiego nagrzewania tarczy, ale stan ten ma charakter procesu przejściowego. W miarę upływu czasu następuje ustalenie rozkładu temperatury w przypadku pola opisanego wzorem (3.2), natomiast pole (3.1) ulega w czasie zmianom okresowym, odniesionym do pewnego stanu ustalonego. Jest widoczne, że dla czasów dostatecznie dużych można pominąć funkcje, malejące wykładniczo w czasie. Wzór (D.5) zamieszczony w Dodatku umożliwia wówczas wykonanie sumowania szeregu (3.1). W ten sposób uzyskano funkcje

$$(3.3) \quad \tilde{T}_{\omega\infty}(R_0, r_0, t) \frac{2\pi\kappa}{Q_0} = \frac{e^{i\omega t}}{I_0(l\sqrt{i})} \left\{ \eta(R_0 - r_0) I_0(lr_0\sqrt{i}) \times \right. \\ \left. \times [K_0(IR_0\sqrt{i}) I_0(l\sqrt{i}) - K_0(l\sqrt{i}) I_0(IR_0\sqrt{i})] + \right. \\ \left. + \eta(r_0 - R_0) I_0(IR_0\sqrt{i}) [K_0(lr_0\sqrt{i}) I_0(l\sqrt{i}) - K_0(l\sqrt{i}) I_0(lr_0\sqrt{i})] \right\}, \quad l^2 = \frac{\omega a^2}{\kappa}.$$

Granica

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{T}_{\omega\infty}(R_0, r_0, t) = \tilde{T}_{\eta\infty}(R_0, r_0)$$

opisuje stacjonarny rozkład temperatury w przypadku działania na okręgu o promieniu  $R$  źródła ciepła o stałej wydajności w czasie. Obliczając ją otrzymano

$$(3.4) \quad \tilde{T}_{\eta\infty}(R_0, r_0) \frac{2\pi\kappa}{Q_0} = -\eta(R_0 - r_0) \ln R_0 - \eta(r_0 - R_0) \ln r_0.$$

Graficzną ilustracją wyniku (3.4) dla  $R_0 = 0,2$  i  $R_0 = 0,5$  jest rys. 1.

Z budowy wzoru (3.4) wynika, że gdy  $R_0 \rightarrow 0$ , tzn. wówczas gdy źródło ciepła jest przyłożone w środku tarczy, temperatura w miejscu działania źródła dąży do nieskończoności. Jako przypadek szczególnie otrzymano tutaj wynik zgodny z podanym przez E. MELANA i H. PARKUSA [4].

Źródło ciepła (1.1)<sub>3</sub> o zmiennej harmonicznie w czasie i jednocześnie stałej względem miejsca wydajności, działające na współśrodkowy z tarczą obszar kołowy o promieniu  $R$ , wywoła pole temperatury, które można wyznaczyć ze wzoru (2.27). Ze względu na obszar, objęty działaniem źródła, dokonano całkowania w granicach od 0 do  $R$ . Wynik całkowania jest poszukiwanym polem temperatury:

$$(3.5) \quad T_{\omega}(r, t) = \frac{2Q_0 R}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(a_n R) J_0(a_n r)}{a_n (\kappa a_n^2 + i\omega) J_1^2(a_n a)} [e^{i\omega t} - \exp(-\kappa a_n^2 t)].$$

Przechodząc we wzorze (3.5) z  $\omega \rightarrow 0$  łatwo wyznaczono rozkład temperatury w przypadku działania źródła ciepła (1.1)<sub>4</sub>, które zarówno względem czasu jak i względem miejsca ma stałą wydajność:

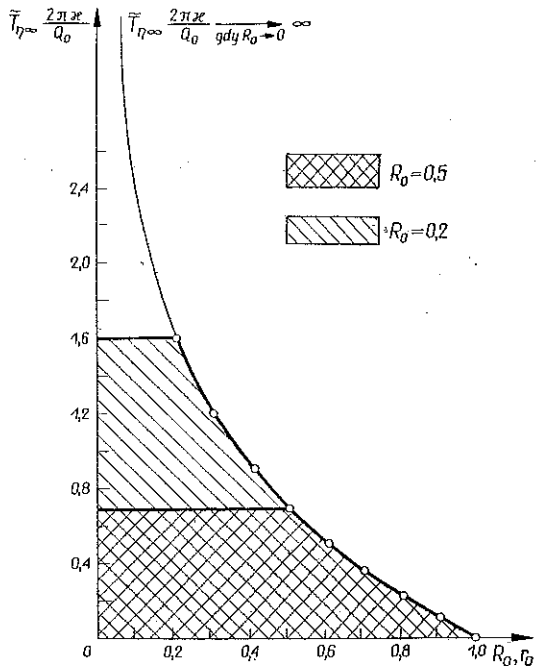
$$(3.6) \quad T_{\eta}(r, t) = \frac{2Q_0 R}{\kappa a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(a_n R) J_0(a_n r)}{a_n^3 J_1^2(a_n a)} [1 - \exp(-\kappa a_n^2 t)].$$

Po upływie dostatecznie dużego czasu we wzorach (3.5) i (3.6) można pominąć funkcje, malejące wykładniczo w czasie. Wzór (D.7) zamieszczony w Dodatku pozwala wówczas na zsumowanie szeregu (3.5). W rezultacie otrzymano

$$(3.7) \quad T_{\omega\infty}(R_0, r_0, t) \frac{\kappa}{Q_0 a^2} = \frac{R_0 e^{i\omega t}}{l\sqrt{i} I_0(l\sqrt{i})} \left[ \eta(R_0 - r_0) \left\{ \frac{I_0(l\sqrt{i})}{lR_0\sqrt{i}} - \right. \right. \\ \left. \left. - I_0(lr_0\sqrt{i}) [K_1(lR_0\sqrt{i}) I_0(l\sqrt{i}) + K_0(l\sqrt{i}) I_1(lR_0\sqrt{i})] \right\} + \right. \\ \left. + \eta(r_0 - R_0) I_1(lR_0\sqrt{i}) [K_0(lr_0\sqrt{i}) I_0(l\sqrt{i}) - K_0(l\sqrt{i}) I_0(lr_0\sqrt{i})] \right].$$

Obliczając granicę

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} T_{\omega\infty}(R_0, r_0, t) = T_{\eta\infty}(R_0, r_0),$$



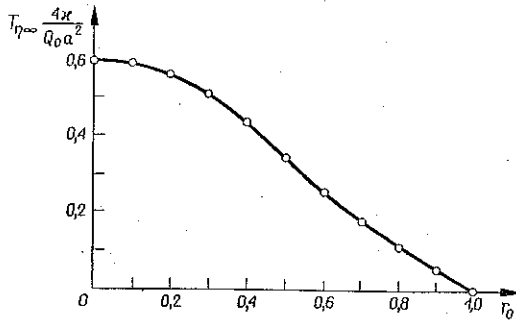
Rys. 1

otrzymano wzór, który opisuje stacjonarny rozkład temperatury w przypadku działania w obszarze kołowym źródła ciepła o stałej wydajności w czasie:

$$(3.8) \quad T_{\eta\infty}(R_0, r_0) \frac{4\kappa}{Q_0 a^2} = R_0^2 \left[ \eta(R_0 - r_0) \left( 1 - \ln R_0^2 - \frac{r_0^2}{R_0^2} \right) - \eta(r_0 - R_0) \ln r_0^2 \right].$$

Można wykazać, że rozwiązania (3.7) i (3.8) przedstawiają funkcje ciągłe i gładkie dla wszystkich wartości  $r_0$  i  $R_0$ .

Rozkład temperatury w tarczy, opisany wzorem (3.8) dla  $R_0 = 0,5$ , przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2

4. Stan przemieszczenia i naprężenia

Wyznaczenie stanu przemieszczenia i naprężenia w tarczy, wywołanego działaniem jednego ze źródeł (1.1) nie nastręcza żadnych trudności. Wystarczy funkcje Greena (2.20) i (2.23) podstawić do wzoru (2.26) w przypadku działania źródeł (1.1)<sub>1</sub> i (1.1)<sub>2</sub> lub do wzoru (2.27) w przypadku źródeł (1.1)<sub>3</sub> i (1.1)<sub>4</sub> i wykonać odpowiednie całkowanie.

W ten sposób dla źródła (1.1) otrzymano wyrażone w zmiennych bezwymiarowych wzory:

$$\begin{aligned}
 \check{u}_\omega(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi c}{Q_0 k} &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m A_m^{(\omega)} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n A_n^{(\omega)}, \\
 \check{\sigma}_{rr}^{(\omega)}(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi a c}{2GkQ_0} &= \sum_{m=1}^{\infty} M_m A_m^{(\omega)} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n A_n^{(\omega)}, \\
 \check{\sigma}_{\theta\theta}^{(\omega)}(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi a c}{2GkQ_0} &= \sum_{m=1}^{\infty} N_m A_m^{(\omega)} + \sum_{n=1}^{\infty} N_n A_n^{(\omega)},
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 A_m^{(\omega)} &= \frac{1}{(1+h^2 z_m^2)(z_m^2 - \delta^2)(bz_m^2 - d)J_1(z_m)} \left[ \frac{M(x_m R_0)}{M(x_m)} \{z_m(1+hi\delta) \times \right. \\
 &\quad \times [e^{i\delta\tau} \sin(\vartheta_m - \varphi_m) - \sin(\vartheta_m - \varphi_m - z_m \tau)] + \\
 &\quad \left. + (hz_m^2 - i\delta) [\cos(\vartheta_m - \varphi_m - z_m \tau) - e^{i\delta\tau} \cos(\vartheta_m - \varphi_m)] \right] - \\
 &\quad - \frac{J_0(z_m R_0)}{J_0(z_m)} \{z_m(1+hi\delta) \sin(z_m \tau) + (hz_m^2 - i\delta) [\cos(z_m \tau) - e^{i\delta\tau}]\}, \\
 A_n^{(\omega)} &= \frac{J_0(z_n R_0) [e^{i\delta\tau} - \exp(-hz_n^2 \tau)]}{z_n(1+h^2 z_n^2)(hz_n^2 + i\delta)J_1(z_n)}, \quad \delta = \frac{\omega a}{c}.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Źródło (1.1)<sub>2</sub> wywoła pola przemieszczeń i naprężeń, opisane funkcjami

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_r(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi c}{Q_0 k} &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m A_m^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n A_n^{(n)}, \\ \tilde{\sigma}_{rr}^{(n)}(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi a c}{2GkQ_0} &= \sum_{m=1}^{\infty} M_m A_m^{(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n A_n^{(n)}, \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(n)}(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi a c}{2GkQ_0} &= \sum_{m=1}^{\infty} N_m A_m^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} N_n A_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} A_m^{(n)} &= \frac{2 \sin\left(\frac{1}{2} z_m \tau\right)}{z_m (1+h^2 z_m^2) (bz_m^2 - d) J_1(z_m)} \left\{ \frac{M(x_m R_0)}{M(x_m)} \left[ \cos\left(\vartheta_m - \varphi_m - \right. \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{1}{2} z_m \tau\right) + h z_m \sin\left(\vartheta_m - \varphi_m - \frac{1}{2} z_m \tau\right) \right] - \frac{J_0(z_m R_0)}{J_0(z_m)} \left[ \cos\left(\frac{1}{2} z_m \tau\right) - \right. \\ &\left. \left. \left. - h z_m \sin\left(\frac{1}{2} z_m \tau\right) \right] \right\}, \\ A_n^{(n)} &= \frac{J_0(z_n R_0) [1 - \exp(-h z_n^2 \tau)]}{h z_n^3 (1+h^2 z_n^2) J_1(z_n)}. \end{aligned}$$

W przypadku działania źródła ciepła (1.1)<sub>3</sub> wzory na przemieszczenia i naprężenia mają postać

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u_w(R_0, r_0, \tau) K &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m F_m^{(\omega)} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n F_n^{(\omega)}, \\ \sigma_{rr}^{(\omega)}(R_0, r_0, \tau) S &= \sum_{m=1}^{\infty} M_m F_m^{(\omega)} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n F_n^{(\omega)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(\omega)}(R_0, r_0, \tau) S &= \sum_{m=1}^{\infty} N_m F_m^{(\omega)} + \sum_{n=1}^{\infty} N_n F_n^{(\omega)}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(4.6) \quad \begin{aligned} F_m^{(\omega)} &= \frac{R_0}{(1+h^2 z_m^2) (z_m^2 - \delta^2) (bz_m^2 - d) J_1(z_m)} \left( \frac{M_1(x_m R_0)}{x_m M(x_m)} \left\{ z_m (1+hi\delta) \times \right. \right. \\ &\times \left[ e^{i\delta\tau} \cos\left(\gamma_m - \vartheta_m - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\gamma_m - \vartheta_m + z_m \tau - \frac{\pi}{4}\right) \right] + (h z_m^2 - i\delta) \times \\ &\times \left[ \sin\left(\gamma_m - \vartheta_m + z_m \tau - \frac{\pi}{4}\right) - e^{i\delta\tau} \sin\left(\gamma_m - \vartheta_m - \frac{\pi}{4}\right) \right] \left. \right\} - b \frac{J_1(z_m R_0)}{J_1(z_m)} \times \\ &\times \left\{ z_m (1+hi\delta) \sin(z_m \tau) + (h z_m^2 - i\delta) [\cos(z_m \tau) - e^{i\delta\tau}] \right\}, \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \text{c.d.} \quad F_n^{(\omega)} = \frac{R_0 J_1(z_n R_0) [e^{i\delta\tau} - \exp(-hz_n^2 \tau)]}{z_n^2 (1+h^2 z_n^2) (hz_n^2 + i\delta) J_1(z_n)},$$

$$K = \frac{c}{2kQ_0 a^2}, \quad S = \frac{c}{4GkaQ_0};$$

$$M_1^2(x_m R_0) = \text{ber}_1^2(x_m R_0) + \text{bei}_1^2(x_m R_0), \quad \gamma_m = \arctg \frac{\text{bei}_1(x_m R_0)}{\text{ber}_1(x_m R_0)}.$$

Dla źródła ciepła (1.1)<sub>4</sub> otrzymano wzory

$$(4.7) \quad u_r(R_0, r_0, \tau) K = \sum_{m=1}^{\infty} U_m F_m^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n F_n^{(n)},$$

$$\sigma_{rr}^{(n)}(R_0, r_0, \tau) S = \sum_{m=1}^{\infty} M_m F_m^{(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n F_n^{(n)},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(n)}(R_0, r_0, \tau) S = \sum_{m=1}^{\infty} N_m F_m^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} N_n F_n^{(n)},$$

w których

$$(4.8) \quad F_m^{(n)} = \frac{2R_0 \sin\left(\frac{1}{2} z_m \tau\right)}{z_m (1+h^2 z_m^2) (bz_m^2 - d) J_1(z_m)} \left\{ \frac{M_1(x_m R_0)}{x_m M(x_m)} \left[ \sin\left(\gamma_m - \vartheta_m + \frac{1}{2} z_m \tau - \frac{\pi}{4}\right) + hz_m \cos\left(\gamma_m - \vartheta_m + \frac{1}{2} z_m \tau - \frac{\pi}{4}\right) \right] - b \frac{J_1(z_m R_0)}{J_1(z_m)} \left[ \cos\left(\frac{1}{2} z_m \tau\right) - hz_m \sin\left(\frac{1}{2} z_m \tau\right) \right] \right\},$$

$$F_n^{(n)} = \frac{R_0 J_1(z_n R_0) [1 - \exp(-hz_n^2 \tau)]}{hz_n^4 (1+h^2 z_n^2) J_1(z_n)}.$$

Przedstawione tutaj rozwiązania dla źródeł ciepła o stałej wydajności względem miejsca, działających w obszarze kołowym, nie wyczerpują wszystkich możliwych do uzyskania rozwiązań. Znajomość funkcji Greena pozwala na wyznaczenie stanu przemieszczenia i naprężenia w przypadku, gdy w obszarze koła lub pierścienia kołowego działają źródła o dowolnym, obrotowo-symetrycznym rozkładzie wydajności.

### 5. Rezonans

Dokładniejszej analizie poddano rozwiązania (4.1) i (4.5), uzyskane dla przypadków działania źródeł ciepła (1.1)<sub>1</sub> i (1.1)<sub>3</sub> o okresowo zmiennej wydajności w czasie. Jest widoczne, że przy  $\delta \rightarrow z_m$  wyrazy z numerem porządkowym  $m$  pierwszych szeregów są nieokreślone, a tym samym wzory (4.1) i (4.5) tracą sens. Nieokreślony charakter tych rozwiązań jest więc ściśle związany z wartościami  $z_m$ , które są rozwiązaniami równania (2.15), przekształconego do postaci bezwymiarowej

$$(5.1) \quad bz_m J_0(z_m) - J_1(z_m) = 0.$$

To równanie przestępne ma nieskończenie wiele pierwiastków. Wynika stąd, że rozwiązania (4.1) i (4.5) są nieokreślone dla nieskończenie wielu częstości źródła ciepła.

Wskaźnik  $m$ , dla którego zachodzi równość  $\delta = z_m$ , zastąpiono wskaźnikiem  $r$ , a odpowiadającą mu częstość zmian źródła oznaczono dalej przez  $\delta_r$ .

Poprawne wzory w przypadku, gdy  $\delta = z_m$ , uzyskano obliczając granice wyrażań (4.1) i (4.5):

$$(5.2) \quad \lim_{\delta_r \rightarrow z_r} (\tilde{u}_\omega, \tilde{\sigma}_{rr}^{(\omega)}, \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(\omega)}, u_\omega, \sigma_{rr}^{(\omega)}, \sigma_{\theta\theta}^{(\omega)}) = (\tilde{u}_{rez}, \tilde{\sigma}_{rr}^{(rez)}, \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(rez)}, u_{rez}, \sigma_{rr}^{(rez)}, \sigma_{\theta\theta}^{(rez)}).$$

Ze wzorów (4.1) otrzymano

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_{rez}(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi c}{Q_0 k} &= C_r U_r + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^{\infty} U_m A_m^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n A_n^{(r)}, \\ \tilde{\sigma}_{rr}^{(rez)}(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi ac}{2GkQ_0} &= C_r M_r + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^{\infty} M_m A_m^{(r)} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n A_n^{(r)}, \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(rez)}(R_0, r_0, \tau) \frac{\pi ac}{2GkQ_0} &= C_r N_r + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^{\infty} N_m A_m^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} N_n A_n^{(r)}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.4) \quad \begin{aligned} U_r &= U_m(\delta_r), \quad M_r = M_m(\delta_r), \quad N_r = N_m(\delta_r), \quad A_m^{(r)} = A_m^{(\omega)}(\delta_r), \quad A_n^{(r)} = A_n^{(\omega)}(\delta_r), \\ C_r &= \frac{1}{2\delta_r(1+h^2\delta_r^2)(b\delta_r^2-d)J_1(\delta_r)} \left\{ \frac{M(x_r R_0)}{M(x_r)} [(1-hi\delta_r) \times \right. \\ &\quad \times e^{i(\theta_r-\varphi_r)} \sin(\delta_r \tau) + \delta_r \tau (1+hi\delta_r) e^{i(\delta_r \tau - \theta_r + \varphi_r)}] - \\ &\quad \left. - \frac{J_0(\delta_r R_0)}{J_0(\delta_r)} [(1-hi\delta_r) \sin(\delta_r \tau) + \delta_r \tau (1+hi\delta_r) e^{i\delta_r \tau}] \right\}. \end{aligned}$$

Wzory (4.5) po obliczeniu granic (5.2) przybrały postać

$$(5.5) \quad \begin{aligned} u_{rez}(R_0, r_0, \tau) K &= H_r U_r + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^{\infty} U_m F_m^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n F_n^{(r)}, \\ \sigma_{rr}^{(rez)}(R_0, r_0, \tau) S &= H_r M_r + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^{\infty} M_m F_m^{(r)} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n F_n^{(r)}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(rez)}(R_0, r_0, \tau) S &= H_r N_r + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq r}}^{\infty} N_m F_m^{(r)} + \sum_{n=1}^{\infty} N_n F_n^{(r)}. \end{aligned}$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia:

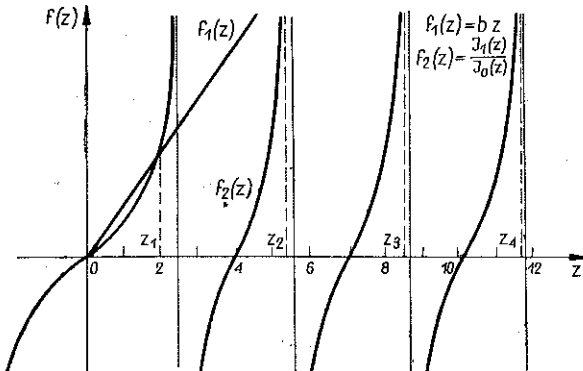
$$F_m^{(r)} = F_m^{(\omega)}(\delta_r), \quad F_n^{(r)} = F_n^{(\omega)}(\delta_r),$$

$$(5.6) \quad H_r = \frac{R_0}{2\delta_r(1+h^2\delta_r^2)(b\delta_r^2-d)J_1(\delta_r)} \left\{ \frac{M_1(x_r R_0)}{x_r M(x_r)} [(h\delta_r+i)e^{-i\left(\gamma_r-\delta_r-\frac{\pi}{4}\right)} \times \right. \\ \times \sin(\delta_r \tau) + \delta_r \tau (h\delta_r-i)e^{i\left(\gamma_r+\delta_r\tau-\delta_r-\frac{\pi}{4}\right)}] - \\ \left. - b \frac{J_1(\delta_r R_0)}{J_1(\delta_r)} [(1-hi\delta_r)\sin(\delta_r \tau) + \delta_r \tau (1+hi\delta_r)e^{i\delta_r \tau}] \right\}.$$

W rozwiązaniach (5.3) i (5.5), w zależności od budowy wyrażień, które są funkcjami czasu, można wyróżnić:

- 1) funkcje malejące ze wzrostem czasu,
- 2) funkcje okresowo proste,
- 3) funkcje okresowe o amplitudzie liniowo zależnej od czasu.

Funkcje wymienione w punktach 1 i 2 wchodzą w skład szeregów, z których składają się rozwiązania (5.3) i (5.5). Ograniczone dla dowolnie dużego czasu sumy tych szeregów opisują skończone naprężenia. Dla odpowiednio dobranych stałych materiałowych naprężenia te nie przekroczą granicy sprężystości.



Rys. 3

Funkcje ujęte w p. 3 mają tę właściwość, że w zależności od wyboru chwili czasu mogą przyjmować dowolnie duże wartości. Do tej grupy funkcji należą pierwsze składniki wzorów (5.3) i (5.5). Opisują one zjawisko rezonansu mechanicznego, wywołanego wymuszeniem termicznym. Dwie pierwsze grupy funkcji stanowią tło drgań rezonansowych tarczy.

Ponieważ zjawisko rezonansu występuje wówczas, gdy charakteryzująca wymuszenie bezwymiarowa częstość zmian źródła ciepła \$\delta\_r\$ jest równa dowolnemu pierwiastkowi \$z\_m\$ równania (5.1), przeto rozwiązania tego równania są bezwymiarowymi częstościami drgań własnych tarczy. Rozmieszczenie zer równania (5.1) ilustruje rys. 3.

Dziesięć pierwszych pierwiastków wyznaczono metodą kolejnych przybliżeń i zamieszczono w tablicy 1. Przyjęto stałą  $b = 1,43$ , co odpowiada liczbie Poissona  $\nu = 0,3$ . Tym samym częstości drgań własnych podane w tablicy 1 odnoszą się do większości metali.

Pomiędzy naturalnymi i bezwymiarowymi częstościami zmian źródła ciepła zachodzi w przypadku rezonansu zależność

$$(5.7) \quad \omega_r = \frac{\delta_r c}{a}.$$

Jest widoczne, że naturalne częstości rezonansowe są proporcjonalne do prędkości fali podłużnej  $c$  i odwrotnie proporcjonalne do promienia tarczy  $a$ .

Tablica 1

$m-r$	$Z_m$	$m-r$	$Z_m$
1	2,0492	6	18,0334
2	5,3897	7	21,1768
3	8,5721	8	24,3248
4	11,7348	9	27,4721
5	14,8838	10	30,6148

Obecność składników rezonansowych we wzorach (5.3) i (5.5) pozwala przewidzieć, że przy dowolnie małych wartościach amplitudy źródła ciepła  $Q_0$  po upływie odpowiednio długiego czasu naprężenia osiągną granicę sprężystości. Dalsze utrzymywanie tarczy w stanie drgań rezonansowych musi doprowadzić do zniszczenia struktury materiału, z którego będzie tarcza wykonana. Łatwo dostrzec analogię np. z wymuszonymi drganiami masy o jednym stopniu swobody, zamocowanej sprężysto.

Dalsza część pracy jest poświęcona omówieniu przykładów liczbowych w przypadku wystąpienia rezonansu wywołanego działaniem źródła (1.1)<sub>3</sub> i analizie wyników. Punktem wyjścia będą wzory (5.5).

#### 6. Przykłady liczbowe i analiza wyników w przypadku rezonansu

Opisująca zjawisko rezonansu złożona postać rozwiązania (5.5) sprawiła, że obliczenie przykładów liczbowych według uzyskanych wzorów byłoby w dużej mierze utrudnione. Nasuwa się myśl, aby zrezygnować z pełnej ścisłości obliczeń rachunkowych i zadowolić się przybliżonym opisem zjawiska. W celu zwiększenia przejrzystości działania, które w końcowym efekcie przyczyniło się do uproszczenia wzorów (5.5), szczegółowe obliczenia zamieszczono w Dodatku. Uproszczeń dokonano w przypadku drgań przy najmniejszej częstości rezonansowej, tzn. przy  $\delta_r = \delta_1 = 2,0492$ , (tablica 1). Przyjęto stałą  $h = 2,23 \cdot 10^{-8}$  [por. oznaczenie (2.19)]. Wartość ta odpowiada tarczy stalowej o promieniu  $a = 10$  cm.



W trakcie dokonywania uproszczeń z wyników zespolonych wyodrębniono-  
 części rzeczywiste. Taka operacja rachunkowa odpowiada działaniu źródła ciepła,  
 które można napisać jako funkcję zmiennych bezwymiarowych w postaci

$$Q = Q_0 \eta (R_0 - \zeta_0) \cos (\delta_1 \tau).$$

Kolejno wypisano otrzymane w Dodatku wyrażenia przybliżone, które wchodzą  
 w skład uproszczonego rozwiązania (5.5).

Składnik rezonansowy  $H_1$  określony wzorem (D.14) ma postać

$$(6.1) \quad H_1 \approx - \frac{bR_0 J_1 (\delta_1 R_0)}{2\delta_1 (b\delta_1^2 - d) J_1^2 (\delta_1)} [\sin (\delta_1 \tau) + \delta_1 \tau \cos (\delta_1 \tau)],$$

z błędem nie przekraczającym

$$\varepsilon_1 < 0,0071 \%$$

Części rzeczywiste szeregów (5.5), sumowanych względem wskaźników  $n$ , na  
 podstawie wzorów (D.25) są w przybliżeniu równe

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_n F_n^{(r)} \right\} &\approx \frac{\sin (\delta_1 \tau)}{4\delta_1} \left[ \eta (R_0 - r_0) r_0 + \eta (r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0} + \frac{r_0 R_0^2}{2b - 1} \right], \\ \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M_n F_n^{(r)} \right\} &\approx \frac{\sin (\delta_1 \tau)}{4\delta_1} \left[ [\eta (R_0 - r_0) + \eta (r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0} - R_0^2] \right], \\ \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} N_n F_n^{(r)} \right\} &\approx \frac{\sin (\delta_1 \tau)}{4\delta_1} \left[ R_0^2 - \eta (R_0 - r_0) + \eta (r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0} \right], \end{aligned}$$

przy czym błąd wynikły z przybliżenia  $\varepsilon_2 < 0,0416 \%$ .

Podobnie dla szeregów sumowanych względem wskaźników  $m$  otrzymano  
 w oparciu o wzór (D.18) zastępcze wyrażenia przybliżone:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} U_m F_m^{(r)} \right\} &\approx bR_0 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{J_1 (z_m r_0) J_1 (z_m R_0)}{(z_m^2 - \delta_1^2) (bz_m^2 - d) J_1^2 (z_m)} \times \\ &\quad \times [\delta_1 \sin (\delta_1 \tau) - z_m \sin (z_m \tau)], \\ \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} M_m F_m^{(r)} \right\} &\approx b \frac{R_0}{r_0} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{J_1 (z_m R_0) [br_0 z_m J_0 (z_m r_0) - J_1 (z_m r_0)]}{(z_m^2 - \delta_1^2) (bz_m^2 - d) J_1^2 (z_m)} \times \\ &\quad \times [\delta_1 \sin (\delta_1 \tau) - z_m \sin (z_m \tau)], \\ \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} N_m F_m^{(r)} \right\} &\approx b \frac{R_0}{r_0} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{J_1 (z_m R_0) [(b - 1) z_m r_0 J_0 (z_m r_0) + J_1 (z_m r_0)]}{(z_m^2 - \delta_1^2) (bz_m^2 - d) J_1^2 (z_m)} \times \\ &\quad \times [\delta_1 \sin (\delta_1 \tau) - z_m \sin (z_m \tau)]. \end{aligned}$$

Dla sum skończonych złożonych z dziewięciu wyrazów szeregów (6.3) błąd  
 nie przekracza wartości  $\varepsilon_3 < 0,0418 \%$ .

Przybliżoną postać wzorów (5.5) uzyskano łącząc odpowiednio składniki (5.4) oraz od (9.1) do (9.3). Wzory te mają budowę

$$\begin{aligned}
 u_{rez}(R_0, r_0, \tau) K &\approx \frac{\sin \delta_1 \tau}{4\delta_1} \left[ \eta(R_0 - r_0) r_0 + \eta(r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0} + \frac{r_0 R_0^2}{2b - 1} \right] - \\
 &\quad - P(R_0, r_0, \tau) r_0 J_1(\delta_1 r_0) + r_0 \sum_{m=2}^{\infty} P_m(R_0, r_0, \tau) J_1(z_m r_0), \\
 \sigma_{rr}^{(rez)}(R_0, r_0, \tau) S &\approx \frac{\sin \delta_1 \tau}{4\delta_1} \left[ R_0^2 - \eta(R_0 - r_0) - \eta(r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0^2} \right] - \\
 &\quad - P(R_0, r_0, \tau) [b\delta_1 r_0 J_0(\delta_1 r_0) - J_1(\delta_1 r_0)] + \\
 &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} P_m(R_0, r_0, \tau) [br_0 z_m J_0(z_m r_0) - J_1(z_m r_0)], \\
 (6.4) \quad \sigma_{\theta\theta}^{(rez)}(R_0, r_0, \tau) S &\approx \frac{\sin \delta_1 \tau}{4\delta_1} \left[ R_0^2 - \eta(R_0 - r_0) + \eta(r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0^2} \right] - \\
 &\quad - P(R_0, r_0, \tau) [(b - 1) \delta_1 r_0 J_0(\delta_1 r_0) + J_1(\delta_1 r_0)] + \\
 &\quad + \sum_{m=2}^{\infty} P_m(R_0, r_0, \tau) [(b - 1) z_m r_0 J_0(z_m r_0) + J_1(z_m r_0)], \\
 P(R_0, r_0, \tau) &= bR_0 J_1(\delta_1 R_0) \frac{\sin(\delta_1 \tau) + \delta_1 \tau \cos(\delta_1 \tau)}{2\delta_1 r_0 (b\delta_1^2 - d) J_1^2(\delta_1)}, \\
 P_m(R_0, r_0, \tau) &= bR_0 J_1(z_m R_0) \frac{\delta_1 \sin(\delta_1 \tau) - z_m \sin(z_m \tau)}{r_0 (z_m^2 - \delta_1^2) (bz_m^2 - d) J_1^2(z_m)}.
 \end{aligned}$$

Funkcje (6.4), jako ostateczny rezultat zastosowanych uproszczeń, okazały się odpowiednimi granicami funkcji (5.5), w których  $h \rightarrow 0$ . Wydaje się jednak, że formalne wyznaczenie tych granic uniemożliwiłoby dokonanie oceny przybliżenia, podczas gdy oszacowania zamieszczone w Dodatku dają pogląd na wprowadzone uproszczenia. Fakt, że przyjęcie w rozwiązaniach (5.5)  $h = 0$  tylko nieznacznie zmienia wartości liczbowe rozwiązań, ma swoją interpretację fizyczną.

W związkach (2.19)  $h = \kappa/ac$ .

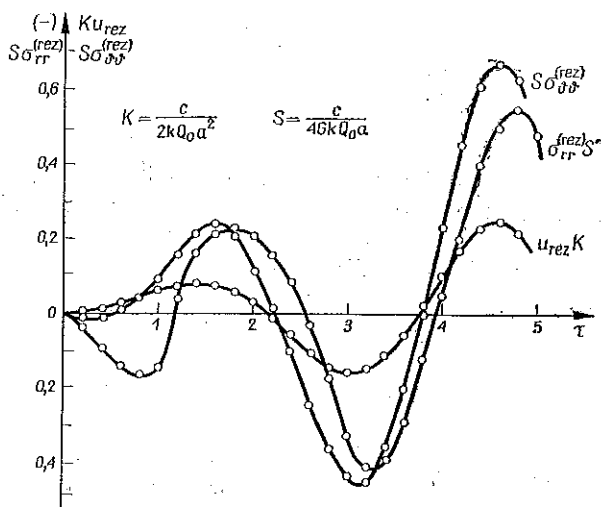
Z powyższego wynika, że w zagadnieniu dynamicznym wpływ współczynnika przewodzenia temperatury  $\kappa$  na pole przemieszczeń i naprężeń jest pomijalnie mały. Należy sobie jednocześnie zdawać sprawę z tego, że chodzi tutaj jedynie o wpływ pośredni, bowiem zmienne w czasie pole przemieszczeń i naprężeń jest wywołane zmiennym w czasie polem temperatury, które z kolei zależy od współczynnika  $\kappa$ . Jednakże w rozpatrywanym przypadku zmiany przemieszczeń i naprężeń są bardzo szybkie i zachodzą w tak małych przedziałach czasu, w ciągu których pole temperatury praktycznie nie ulega większym zmianom. W tym sensie pominięcie wpływu współczynnika  $\kappa$  na pole przemieszczeń i naprężeń wydaje się uzasadnione.

Należy dodać, że uproszczenie takie będzie słuszne tylko wówczas, gdy równocześnie iloczyn  $ac$  będzie dostatecznie duży. Prędkość fali  $c$  zależy od rodzaju

materiału tarczy, natomiast promień tarczy  $a$  może przyjmować dowolne wartości. W przypadku gdy promień ten będzie bardzo mały, wówczas przyjęcie  $h = 0$  w rozwiązaniu (5.5) może spowodować znaczne zniekształcenie opisu zjawiska.

Wzory (6.4) posłużyły do obliczenia przykładów liczbowych. Bezwymiarowy promień koła, objętego działaniem źródła, przyjęto  $R_0 = 0,5$ . Przy tej wartości  $R_0$  zadowalająca zbieżność szeregów pozwoliła na zastąpienie ich sumami skończonymi złożonymi z dziewięciu wyrazów.

Wykres przemieszczeń i naprężeń przy ustalonym promieniu  $r_0 = 0,6$  dla  $\tau = 0; 0,2; \dots; 4,8$  podano na rys. 4. Już dla małych wartości czasu ujawniają się tendencje do wzrostu kolejnych amplitud wszystkich przedstawionych na tym wykresie wielkości.

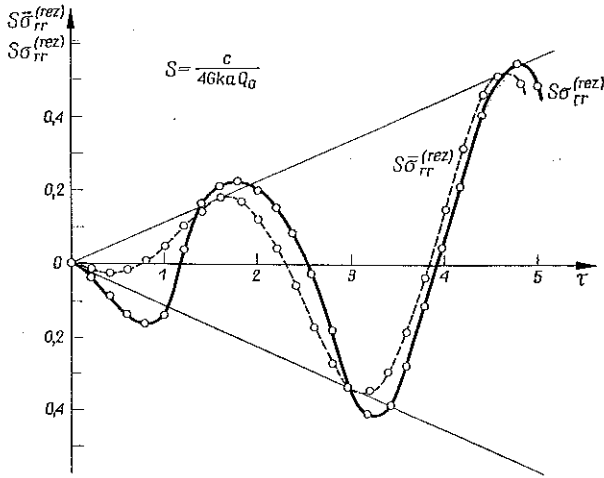


Rys. 4

Na rys. 5 podano porównawczy wykres naprężeń promieniowych  $\sigma_{rr}^{(rez)}$  — z uwzględnieniem wpływu tła oraz  $\bar{\sigma}_{rr}^{(rez)}$  z pominięciem wpływu tła. Jest widoczne, że dla naprężenia  $\sigma_{rr}^{(rez)}$  obwiednie nie są prostymi. Z wykresu wynika również, że w miarę upływu czasu maleje wpływ tła i wskutek tego następuje zrównanie faz i amplitud dla naprężeń  $\sigma_{rr}^{(rez)}$  i  $\bar{\sigma}_{rr}^{(rez)}$ . Dla małych czasów zakłócenia w zgodności przebiegu naprężeń są wynikiem stosunkowo dużego wpływu tła na zjawisko rezonansu.

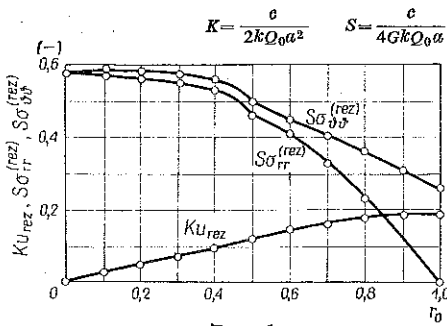
Podobny charakter mają wykresy porównawcze dla przemieszczenia i naprężenia obwodowego.

Rysunek 6 ilustruje rozkład przemieszczeń i naprężeń w zależności od promienia  $r_0$  dla  $r_0 = 0; 0,1; 0,2; \dots; 1,0$  przy ustalonym czasie  $\tau = 3,2$ . Jest widoczny nieregularny przebieg naprężeń na granicy obszaru objętego działaniem źródła. Wykresy naprężeń mają przy  $R_0 = r_0$  ostrza, a przemieszczenie ma mało widoczny punkt przegięcia.



Rys. 5

Obliczenia, których graficzną ilustracją jest rys. 5, wskazują, że w zakresie  $\tau < 2$  wszystkie składniki wzorów (6.4), a więc zarówno składniki opisujące rezonans, jak i tło rezonansu, w równej mierze decydują o wartości przemieszczeń i naprężeń. Ze wzrostem czasu dominujący wpływ osiąga składnik rezonansowy  $P(R_0, r_0, \tau)$  określony wzorem (6.4). Ponieważ pozostałe składniki są ograniczone dla dowolnego czasu, przeto można przyjąć, że dla  $\tau > 2000$  stan przemieszczenia i naprężenia w tarczy będzie z błędem 0,1% opisany wzorami



Rys. 6

z błędem 0,1% opisany wzorami

$$u_{rez}(R_0, r_0) K_1(\tau) \approx P_1(R_0, r_0) r_0 J_1(\delta_1 r_0),$$

$$(6.5) \quad \sigma_{rr}^{(rez)}(R_0, r_0) S_1(\tau) \approx P_1(R_0, r_0) [b \delta_1 r_0 J_0(\delta_1 r_0) - J_1(\delta_1 r_0)],$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(rez)}(R_0, r_0) S_1(\tau) \approx P_1(R_0, r_0) [(b-1) \delta_1 r_0 J_0(\delta_1 r_0) + J_1(\delta_1 r_0)],$$

gdzie

$$(6.6) \quad K_1(\tau) = \frac{c}{2kQ_0 a^2 \tau \cos(\delta_1 \tau)}, \quad S_1(\tau) = \frac{c}{4GkaQ_0 \tau \cos(\delta_1 \tau)},$$

$$P_1(R_0, r_0) = -\frac{bR_0 J_1(\delta_1 R_0)}{2r_0 (b\delta_1^2 - d) J_1^2(\delta_1)}, \quad \tau > 2000.$$

Na podstawie wzorów (6.5) obliczono przemieszczenia i naprężenia jako funkcje promienia  $r_0$  ( $r_0 = 0; 0,1; \dots; 1,0$ ). Graficzną ilustracją wyników jest rys. 7. Jako funkcje czasu wielkości przedstawione na rys. 7 ulegają okresowym zmianom,

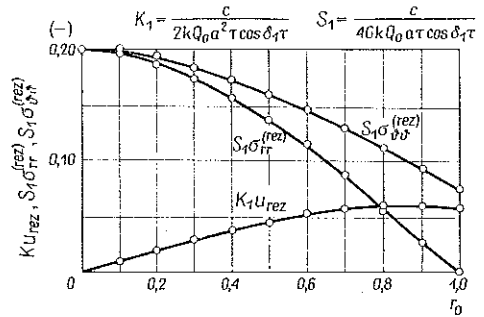
przy czym ich amplituda wzrasta liniowo. Bezwymiarowy okres drgań równy  $T_0 = 2\pi/\delta_1 = 3,067$ . Wzory (6.5) mogą posłużyć do dalszej oceny ilościowej stanu przemieszczenia i naprężenia w tarczy. Jeśli przyjąć, że jest ona wykonana ze stali, to współczynnik rozszerzalności termicznej i stałe sprężystości wynoszą

$$\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}, \quad \nu = 0,3,$$

$$G = 8,1 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2,$$

$$c = 5,38 \cdot 10 \text{ cm/s}.$$

Jeżeli promień tarczy przyjąć  $a=10 \text{ cm}$ , a amplitudę źródła ciepła  $Q_0 = 10^\circ\text{C/s}$ , to dla  $\tau = 2000$  największe naprężenia (w środku tarczy) są równe  $\sigma_{rr}^{(rez)} = \sigma_{\theta\theta}^{(rez)} = 3,7 \text{ kG/cm}^2$ . Wynik ten pozwala na wyciągnięcie wniosku, że do niezbyt dużych amplitud źródła ciepła w całym zakresie naprężeń porównywalnych z granicą sprężystości odnoszą się stosunkowo proste wzory (6.5).



Rys. 7

### 7. Wnioski końcowe

Rozpatrzone w pracy drgania rezonansowe tarczy pozwalają na wyciągnięcie następujących wniosków.

1. Zjawisko rezonansu występuje dla nieskończenie wielu częstości zmian źródła ciepła.

2. Naturalne częstości rezonansowe  $\omega_r$  są proporcjonalne do prędkości fali podłużnej  $c$  i odwrotnie proporcjonalne do promienia tarczy  $a$ . Częstości te są bardzo duże. Najniższa częstość dla tarczy stalowej wynosi  $\omega_1 = 1,103 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ .

3. Bezwymiarowe częstości drgań własnych zależą jedynie od współczynnika Poissona  $\nu$ .

4. Przy dostatecznie dużej wartości iloczynu  $ac$  wpływ współczynnika przewodzenia temperatury  $\kappa$  na pole przemieszczeń i naprężeń można pominąć.

5. Uzyskane rozwiązanie składa się z dwóch części. Jedna z nich opisuje zjawisko rezonansu, druga stanowi tło tego zjawiska. Wpływ tła na pole przemieszczeń i naprężeń szybko zanika ze wzrostem czasu.

6. Analiza zjawiska rezonansu ma raczej charakter formalny. Jest możliwe, że dla wyliczonych dużych częstości nie będą spełnione niektóre z przyjętych założeń, jak np. prawo przepływu ciepła.

W zakończeniu należy stwierdzić, że ze względu na duże częstości przypadkowe wystąpienia rezonansu wydaje się wątpliwe. Częstości spotykane w technice są znacznie niższe i nie przekraczają  $100 \text{ s}^{-1}$ . Tak więc rozpatrzony rezonans nie zagraża konstrukcjom maszynowym.

Być może prądy o dużej częstości, zastosowane w odpowiednio dobranym układzie elektroniczno-termicznym, mogłyby potwierdzić przewidywania teoretyczne.

## 8. Dodatek

Postać rozwiązań (5.5), opisujących zjawisko rezonansu, w dużej mierze utrudnia obliczenie przykładów liczbowych. Treść Dodatku jest poświęcona uzyskaniu w oparciu o rozwiązania (5.5) wzorów, które zjawisko rezonansu opiszą w sposób przybliżony. Równocześnie dokonano oceny błędów wynikłych z zastosowanych uproszczeń.

W uzyskaniu wzorów przybliżonych doniosłą rolę odegrała znajomość sum pewnych szeregów funkcji Bessela. To zagadnienie, potraktowane tutaj jako zadanie o charakterze pomocniczym, rozpatrzono w pierwszej kolejności.

Punktem wyjścia jest rozwinięcie funkcji Diraca w przedziale  $[0, a]$  w szereg funkcji Bessela [11]

$$(D.1) \quad \delta(r - R) = \frac{2R}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(a_n R) J_0(a_n r)}{J_1^2(a_n a)},$$

przy czym wartości  $a_n$  określa się z równania przestępnego  $J_0(a_n a) = 0$ .

Własności funkcji Diraca

$$\delta(x) = k\delta(kx) \quad \cdot k \neq 0$$

oraz

$$x\delta(x - t) = t\delta(t - x)$$

pozwalają na napisanie szeregu (D.1) w dogodniejszej postaci

$$(D.2) \quad \delta(R_0 - r_0) = 2r_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(z_n R_0) J_0(z_n r_0)}{J_1^2(z_n)}, \quad J_0(z_n) = 0,$$

gdzie

$$R_0 = \frac{R}{a} \quad \text{i} \quad r_0 = \frac{r}{a}$$

są zmiennymi bezwymiarowymi.

Obie strony równości (D.2) pomnożono przez  $R_0 I_0(bR_0)$ , przy czym  $b$  jest stałą dowolną, a następnie scałkowano [13] w granicach od 0 do  $R_0$ . Wykorzystanie własności filtrujących  $\delta$  funkcji [7] prowadzi do wyniku, który przedstawiono w postaci równania różniczkowego

$$(D.3) \quad bI_1(bR_0) S(R_0, r_0) - I_0(bR_0) \frac{\partial}{\partial R_0} S(R_0, r_0) = \frac{I_0(br_0)}{2R_0}, \quad 1 \geq R_0 > r_0 \geq 0,$$

przy czym

$$(D.4) \quad S(R_0, r_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(z_n R_0) J_0(z_n r_0)}{(z_n^2 + b^2) J_1^2(z_n)}.$$

Rozwiązaniem równania (D.3) jest funkcja

$$S(R_0, r_0) = AI_0(bR_0) + \frac{1}{2} I_0(br_0) K_0(bR_0),$$

gdzie  $A$  jest stałą całkowania, którą wyznaczono z warunku brzegowego  $S(1, r_0) = 0$ . Znajomość stałej  $A$  pozwoliła na przedstawienie szeregu (D.4) w postaci

$$(D.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(z_n R_0) J_0(z_n r_0)}{(z_n^2 + b^2) J_1^2(z_n)} = \frac{1}{2I_0(b)} \{ \eta(R_0 - r_0) I_0(br_0) [K_0(bR_0) I_0(b) - K_0(b) I_0(bR_0)] + \eta(r_0 - R_0) I_0(bR_0) [K_0(br_0) I_0(b) - K_0(b) I_0(br_0)] \}.$$

Wartość sumy dla  $R_0 < r_0$  wynika z symetrii między zmiennymi  $R_0$  i  $r_0$ . Różniczkując otrzymany związek względem  $R_0$  otrzymano

$$(D.6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n J_1(z_n R_0) J_0(z_n r_0)}{(z_n^2 + b^2) J_1^2(z_n)} = \frac{b}{2I_0(b)} \{ \eta(R_0 - r_0) I_0(br_0) [K_1(bR_0) I_0(b) + K_0(b) I_1(bR_0)] + \eta(r_0 - R_0) I_1(bR_0) [K_0(b) I_0(br_0) - K_0(br_0) I_0(b)] \}.$$

Z kolei pomnożono obie strony zależności (D.5) przez  $R_0$  i scałkowano w następujących granicach:

$$0, R_0, \text{ gdy } R_0 < r_0;$$

$$R_0, 1, \text{ gdy } R_0 > r_0.$$

Rezultat omówionych całkowań ujęto wzorem

$$(D.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(z_n R_0) J_0(z_n r_0)}{z_n (z_n^2 + b^2) J_1^2(z_n)} = \frac{1}{2R_0 b^2 I_0(b)} [ \eta(R_0 - r_0) \{ I_0(b) - R_0 b I_0(br_0) \} \times \\ \times [K_1(bR_0) I_0(b) + K_0(b) I_1(bR_0)] + \\ + \eta(r_0 - R_0) R_0 b I_1(bR_0) [K_0(br_0) I_0(b) - K_0(b) I_0(br_0)] ].$$

Za pomocą zróżniczkowania względem  $r_0$  związku (D.7) wyznaczono sumę następnego szeregu:

$$(D.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(z_n R_0) J_1(z_n r_0)}{(z_n^2 + b^2) J_1^2(z_n)} = \frac{1}{2I_0(b)} \{ \eta(R_0 - r_0) I_1(br_0) [K_1(bR_0) I_0(b) + K_0(b) I_1(bR_0)] + \eta(r_0 - R_0) I_1(bR_0) [K_1(br_0) I_0(b) + K_0(b) I_1(br_0)] \}.$$

W pracy znalazły również zastosowanie pewne przypadki szczególnie wzorów (D.5)–(D.8). Przejście graniczne  $b \rightarrow 0$ , wykonane w zależnościach (D.6) i (D.8), daje kolejno wyniki

$$(D.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(z_n R_0) J_0(z_n r_0)}{z_n J_1^2(z_n)} = \eta(R_0 - r_0) \frac{1}{2R_0}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(z_n R_0) J_1(z_n r_0)}{z_n^2 J_1^2(z_n)} = \frac{1}{4} \left[ \eta(R_0 - r_0) \frac{r_0}{R_0} + \eta(r_0 - R_0) \frac{R_0}{r_0} \right].$$

Przyjęcie we wzorach (D.6), (D.8) i (D.9)<sub>2</sub>  $R_0 = 1$  pozwala odpowiednio napisać

$$(D.10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n J_0(z_n r_0)}{(z_n^2 + b^2) J_1(z_n)} = \frac{I_0(br_0)}{2I_0(b)}, \quad r_0 < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(z_n r_0)}{(z_n^2 + b^2) J_1(z_n)} = \frac{I_1(br_0)}{2bI_0(b)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(z_n r_0)}{z_n^2 J_1(z_n)} = \frac{r_0}{4}.$$

Jeżeli we wzorze (D.10)<sub>1</sub> zamiast  $b$  napisać  $ib$ , to otrzymuje się wzór

$$(D.11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n J_0(z_n r_0)}{(z_n^2 - b^2) J_1(z_n)} = \frac{J_0(br_0)}{2J_0(b)}, \quad r_0 < 1.$$

Wzory (D.9)<sub>1</sub>, (D.10) i (D.11) są często spotykane w literaturze [3, 6, 8 i 13].

Z kolei rozpatrzono możliwości uproszczenia rozwiązań (5.5). Uproszczenia dokonano dla  $\delta_r = \delta_1 = 2,0492$  (tablica 1). Przyjęto stałą  $h = 2,23 \cdot 10^{-8}$ . Stanowiący podstawę do obliczenia przykładów liczbowych przypadek źródła ciepła

$$Q = Q_0 \eta (R_0 - \zeta_0) \cos(\delta_1 \tau),$$

sugeruje, aby z wyników zespolonych wyodrębnić części rzeczywiste.

Zrezygnowano z równoczesnego przekształcania całych wzorów, gdyż wszystkie uproszczenia byłyby wówczas wyjątkowo nieprzejrzyste. Dlatego też kolejno oszacowano odpowiednio pogrupowane składniki wzorów (5.5).

Rozpoczęto od wyrażenia  $H_r$  (por. (5.6)), które występuje w wolnych wyrazach wszystkich wzorów (5.5). W celu zwiększenia przejrzystości oszacowań przepisano je tutaj jeszcze raz przyjmując zgodnie z zapowiedzią  $\delta_r = \delta_1$  (i wobec tego  $r = 1$ ):

$$(D.12) \quad H_1 = \frac{R_0}{2\delta_1 (1 + h^2 \delta_1^2) (b\delta_1^2 - d) J_1(\delta_1)} \left\{ \frac{M_1(x_1 R_0)}{x_1 M(x_1)} [(h\delta_1 + i) e^{-i(\gamma_1 - \vartheta_1 - \frac{\pi}{4})} + \right. \\ \left. + \delta_1 \tau (h\delta_1 - i) e^{i(\gamma_1 - \delta_1 \tau - \vartheta_1 - \frac{\pi}{4})}] - b \frac{J_1(\delta_1 R_0)}{J_1(\delta_1)} [(1 - \right. \\ \left. - hi\delta_1) \sin(\delta_1 \tau) + \delta_1 \tau (1 + hi\delta_1) e^{i\delta_1 \tau}] \right\}.$$

Jest widoczne, że wszystkie funkcje czasu są tutaj zgrupowane obok dwóch funkcji miejsca:

$$F_1(R_0) = b \frac{J_1(\delta_1 R_0)}{J_1(\delta_1)} \quad \text{oraz} \quad F_2(R_0) = \frac{M_1(x_1 R_0)}{x_1 M(x_1)}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{\delta_1}{h}}.$$



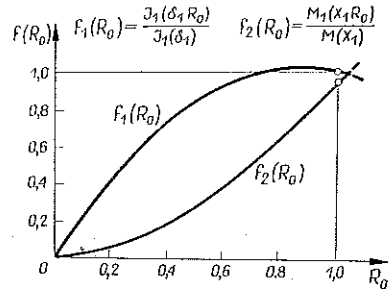
Ten sam rząd wielkości funkcji czasu występujących przy wyrażeniach  $F_1(R_0)$  i  $F_2(R_0)$  prowadzi do wniosku, że o wartości całego wyrażenia (D.12) decydują funkcje miejsca. Na rys. 8 przedstawiono wykres funkcji

$$f_1(R_0) = \frac{J_1(\delta_1 R_0)}{J_1(\delta_1)}, \quad f_2(R_0) = \frac{M_1(x_1 R_0)}{M(x_1)}$$

w zależności od  $R_0$ .

Z nierówności  $f_1(R_0) > f_2(R_0)$  wynika, że dla przyjętych wartości  $b, h$  i  $\delta_1$  funkcja  $F_2(R_0)$  jest znacznie mniejsza od  $F_1(R_0)$ , przy czym błąd  $\varepsilon_1^{(1)}$  wynikły z pominięcia funkcji  $F_2(R_0)$  jest mniejszy od

$$\frac{1}{bx_1} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{h}{\delta_1}} = 7,3 \cdot 10^{-5}.$$



Rys. 8

Dokonanie tego uproszczenia pozwala na napisanie części rzeczywistej wyrażenia (D.12) w postaci

$$(D.13) \quad \text{Re} [H_1] \approx - \frac{bR_0 J_1(\delta_1 R_0)}{2\delta_1 (1+h^2 \delta_1^2) (b\delta_1^2 - d) J_1^2(\delta_1)} \times \\ \times (\sin \delta_1 \tau + \delta_1 \tau \cos \delta_1 \tau - h\delta_1 \sin \delta_1 \tau).$$

Przyjęto w (D.13)  $h = 0$ , co pociąga za sobą błąd

$$\varepsilon_1^{(2)} < h\delta_1 (1 - h^2 \delta_1^2) = 4,57 \cdot 10^{-8};$$

ostatecznie otrzymano

$$(D.14) \quad \text{Re} [H_1] \approx - \frac{bR_0 J_1(\delta_1 R_0)}{2\delta_1 (b\delta_1^2 - d) J_1^2(\delta_1)} [\sin(\delta_1 \tau) + \delta_1 \tau \cos(\delta_1 \tau)].$$

Ogólny błąd względny dla przybliżonego wyrażenia (D.14) nie przekracza wartości

$$\varepsilon_1 < (\varepsilon_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(2)}) \cdot 100\% = 0,0071\%.$$

Z kolei uproszczono wyrażenie  $F_m^{(1)}$  (por. (5.6) i (4.6)), które występuje we wzorach (5.5) w szeregach sumowanych względem wskaźników  $m$ . Przepiszmy je tutaj powtórnie:

$$(D.15) \quad F_m^{(1)} = \frac{R_0}{(1+h^2 z_m^2) (z_m^2 - \delta_1^2) (bz_m^2 - d) J_1(z_m)} \left( \frac{M_1(x_m R_0)}{x_m M(x_m)} \left\{ z_m (1+hi \delta_1) \times \right. \right. \\ \times \left[ e^{i\delta_1 \tau} \cos \left( \gamma_m - \vartheta_m - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left( \gamma_m - \vartheta_m + z_m \tau - \frac{\pi}{4} \right) \right] + (hz_m^2 - i\delta_1) \times \\ \times \left[ \sin \left( \gamma_m - \vartheta_m + z_m \tau - \frac{\pi}{4} \right) - e^{i\delta_1 \tau} \sin \left( \gamma_m - \vartheta_m - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left. \right\} - \\ - b \frac{J_1(z_m R_0)}{J_1(z_m)} \left\{ z_m (1+hi\delta_1) \sin(z_m \tau) + (hz_m^2 - i\delta_1) [\cos(z_m \tau) - e^{i\delta_1 \tau}] \right\}.$$

Podobieństwo wyrażeń (D.15) i (D.12) zadecydowało o zbliżonym sposobie postępowania.

Ponieważ funkcja

$$(D.16) \quad \frac{J_1(z_m R_0)}{J_1(z_m)}$$

dla  $m \geq 2$  oscyluje około wartości zerowej; wobec tego nierówność

$$\frac{J_1(z_m R_0)}{J_1(z_m)} > \frac{M_1(x_m R_0)}{M(x_m)}, \quad x_m = \sqrt{\frac{z_m}{h}}$$

nie jest spełniona dla każdego  $R_0$ . Jednakże zawsze ma miejsce nierówność

$$\max \left| \frac{J_1(z_m R_0)}{J_1(z_m)} \right| > \frac{M_1(x_m R_0)}{M(x_m)},$$

przy czym lewa strona tej nierówności jest największą wartością funkcji (D.16) w przedziale  $0 \leq R_0 \leq 1$ . Stąd wynika, że z dwóch funkcji

$$b \left| \frac{J_1(z_m R_0)}{J_1(z_m)} \right|, \quad \frac{M_1(x_m R_0)}{x_m M(x_m)},$$

druga jest znacznie mniejsza od pierwszej. Pominięcie drugiej funkcji obarcza pierwszy wyraz szeregu (w którym teraz sumowanie rozpoczyna się od wskaźnika  $m = 2$ ) błędem

$$\varepsilon_2^{(1)} < \frac{1}{bx_2} = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{h}{z_2}} = 4,5 \cdot 10^{-5},$$

przy czym  $z_2$  wzięto z tablicy 1. Błąd dla dalszych wyrazów szeregu jest jeszcze mniejszy.

Część rzeczywistą wyrażenia (D.15) można teraz przedstawić za pomocą wzoru

$$(D.17) \quad \operatorname{Re} [F_m^{(1)}] \cong - \frac{bR_0 J_1(z_m R_0)}{(1+h^2 z_m^2)(z_m^2 - \delta_1^2)(bz_m^2 - d)J_1^2(z_m)} \{z_m \sin(z_m \tau) - \delta_1 \sin(\delta_1 \tau) + hz_m^2 [\cos(z_m \tau) - \cos(\delta_1 \tau)]\}.$$

Przyjmując z kolei  $h = 0$  można napisać

$$(D.18) \quad \operatorname{Re} [F_m^{(1)}] \cong \frac{bR_0 J_1(z_m R_0)}{(z_m^2 - \delta_1^2)(bz_m^2 - d)J_1^2(z_m)} [\delta_1 \sin(\delta_1 \tau) - z_m \sin(z_m \tau)].$$

Konsekwencją ostatniego uproszczenia jest dla dziewiątego wyrazu szeregu błąd nie większy od

$$\varepsilon_2^{(2)} \leq \frac{2hz_{10}}{1+h^2 z_{10}^2} = 1,364 \cdot 10^{-6}.$$

Dla początkowych wyrazów szeregów błąd ten jest jeszcze mniejszy. Możliwy do popełnienia błąd  $\varepsilon_2$  powstały w wyniku zsumowania dziewięciu wyrazów (D.18), będzie mniejszy od

$$9(\varepsilon_2^{(1)} + \varepsilon_2^{(2)}) \cdot 100\% = 0,0416\%.$$

Z kolei dokonano uproszczeń we wzorach (5.5) szeregów sumowanych względem wskaźników  $n$ . Przez  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  oznaczono części rzeczywiste szeregów, występujących odpowiednio we wzorach na przemieszczenie, naprężenie radialne i naprężenie obwodowe. Szeregi te przepisano w pełnej postaci:

$$\begin{aligned}
 X(R_0, r_0, \tau) &= r_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ \frac{J_1(z_n r_0)}{J_1(z_n)} + \frac{I_1(hz_n^2 r_0)}{bh z_n^2 I_0(hz_n^2) - I_1(hz_n^2)} \right], \\
 Y(R_0, r_0, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \frac{1}{J_1(z_n)} [br_0 h^2 z_n^3 J_0(z_n r_0) + J_1(z_n r_0)] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{bhr_0 z_n^2 I_0(hz_n^2 r_0) - I_1(hz_n^2 r_0)}{bh z_n^2 I_0(hz_n^2) - I_1(hz_n^2)} \right\}, \\
 Z(R_0, r_0, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \frac{1}{J_1(z_n)} [J_1(z_n r_0) - z_n r_0 (1 + bh^2 z_n^2) J_0(z_n r_0)] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(b-1) h z_n^2 r_0 I_0(hz_n^2 r_0) + I_1(hz_n^2 r_0)}{bh z_n^2 I_0(hz_n^2) - I_1(hz_n^2)} \right\}, \\
 B_n &= R_0 J_1(z_n R_0) \frac{\delta_1 \sin(\delta_1 \tau) + h z_n^2 [\cos(\delta_1 \tau) - \exp(-h z_n^2 \tau)]}{r_0 z_n^2 (1 + h^2 z_n^2) (h^2 z_n^4 + \delta_1^2) J_1(z_n)}.
 \end{aligned}
 \tag{D.19}$$

W pierwszej kolejności uproszczono we wzorach (D.19) wszystkie wyrażenia, na które składają się zmodyfikowane funkcje Bessela. Jest widoczne, że ze względu na występowanie w argumentach tych funkcji stałej  $h$  dla początkowych wyrazów szeregu argumenty te będą małe. Dziesiąte wyrazy szeregów (D.22) wykazują dla  $h = 0$  błąd

$$\varepsilon_3^{(1)} < 1,381 \cdot 10^{-10}.$$

Wykonanie przejść granicznych

$$\lim_{h \rightarrow 0} I_\nu(hx), \quad \nu = 0, 1$$

w zmodyfikowanych funkcjach Bessela pozwoliło na napisanie wzorów (D.19) w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 X(R_0, r_0, \tau) &\approx r_0 \left\{ \delta_1 \left( S_1 + \frac{r_0 S_4}{2b-1} \right) \sin(\delta_1 \tau) + \left( S_2 + \frac{r_0 S_5}{2b-1} \right) \cos(\delta_1 \tau) - \right. \\
 &\quad \left. - \left( S_3 + \frac{r_0 S_6}{2b-1} \right) \right\}, \\
 Y(R_0, r_0, \tau) &\approx \{ \delta_1 (S_1 - r_0 S_4 + bh S_8) \sin(\delta_1 \tau) + (S_2 - r_0 S_5 + \\
 &\quad + S_{10}) \cos(\delta_1 \tau) - (S_3 - r_0 S_6 + S_{11}) \}, \\
 Z(R_0, r_0, \tau) &\approx \{ \delta_1 (S_1 + r_0 S_4 - S_7 - bh S_8) \sin(\delta_1 \tau) + (S_2 + r_0 S_5 - \\
 &\quad - S_8 - S_{10}) \cos(\delta_1 \tau) - (S_3 + r_0 S_6 - S_9 - S_{11}) \},
 \end{aligned}
 \tag{D.20}$$

przy czym

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_1(z_n r_0), & S_2 &= h \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n^2 J_1(z_n r_0), \\
 S_3 &= h \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n^2 J_1(z_n r_0) \exp(-hz_n^2 \tau), \\
 S_4 &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_1(z_n), & S_5 &= h \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n^2 J_1(z_n), \\
 S_6 &= h \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n^2 J_1(z_n) \exp(-hz_n^2 \tau), \\
 (D.21) \quad S_7 &= r_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n J_0(z_n r_0), & S_8 &= hr_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n^3 J_0(z_n r_0), \\
 S_9 &= hr_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n^3 J_0(z_n r_0) \exp(-hz_n^2 \tau), \\
 S_{10} &= bh^3 r_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n^5 J_0(z_n r_0), \\
 S_{11} &= bh^3 r_0 \sum_{n=1}^{\infty} D_n z_n^5 J_0(z_n r_0) \exp(-hz_n^2 \tau), \\
 D_n &= \frac{R_0 J_1(z_n R_0)}{r_0 z_n^2 (1+h^2 z_n^2) (h^2 z_n^4 + \delta_1^2) J_1^2(z_n)}.
 \end{aligned}$$

Wszystkie szeregi (D.21), które nie zależą od czasu, można zsumować opierając się na wzorach (D.6), (D.8), (D.9) i (D.10).

Oto ich sumy:

$$\begin{aligned}
 (D.22) \quad S_1 &= \frac{R_0}{4r_0 \delta_1} \left\{ \eta(\xi_2 - \xi_1) \frac{\xi_1}{\xi_2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\alpha_k \mu_k}{I_0(\mu_k) (\delta_1^2 + \mu_k^2)} \eta(\xi_2 - \xi_1) \times \right. \\
 &\quad \left. \times I_1(\mu_k \xi_1) [K_1(\mu_k \xi_2) I_0(\mu_k) + K_0(\mu_k) I_0(\mu_k \xi_2)] \right\}.
 \end{aligned}$$

We wzorze (D.22) i w następnych w celu skrócenia zapisu wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \eta(R_0 - r_0) r_0 + \eta(r_0 - R_0) R_0, \\
 \xi_2 &= \eta(R_0 - r_0) R_0 + \eta(r_0 - R_0) r_0, \\
 \mu_1 &= \frac{1}{h}, & \mu_2 &= \sqrt{\frac{i\delta_1}{h}}, & \mu_3 &= i \sqrt{\frac{i\delta_1}{h}}, \\
 (D.23) \quad \alpha_1 &= 2\delta_1^2 h^2, & \alpha_2 &= 1, & \alpha_3 &= 1,
 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = 2, \quad \beta_2 = -1, \quad \beta_3 = -1,$$

$$S_2 = \frac{R_0}{4r_0 h} \sum_{k=1}^3 \frac{\beta_k}{I_0(\mu_k) (\delta_1^2 + \mu_k^2)} \eta(\xi_2 - \xi_1) I_1(\mu_k \xi_1) \times$$

$$\times [K_1(\mu_k \xi_2) I_0(\mu_k) + K_0(\mu_k) I_1(\mu_k \xi_2)],$$

$$S_4 = \frac{R_0}{4r_0 \delta_1^2} \left[ R_0 - \sum_{k=1}^3 \frac{\alpha_k \mu_k I_1(\mu_k R_0)}{I_0(\mu_k) (\delta_1^2 + \mu_k^2)} \right],$$

(D.23)

$$S_5 = \frac{R_0}{4hr_0} \sum_{k=1}^3 \frac{\beta_k I_1(\mu_k R_0)}{I_0(\mu_k) (\delta_1^2 + \mu_k^2)},$$

c.d.

$$S_7 = \frac{R_0}{4\delta_1^2} \left[ 2\eta(R_0 - r_0) \frac{1}{R_0} - \sum_{k=1}^3 \frac{\alpha_k \mu_k^3}{I_0(\mu_k) (\delta_1^2 + \mu_k^2)} \{ \eta(R_0 - r_0) I_0(\mu_k r_0) \times \right.$$

$$\times [K_1(\mu_k R_0) I_0(\mu_k) + K_0(\mu_k) I_1(\mu_k R_0)] +$$

$$\left. + \eta(r_0 - R_0) I_1(\mu_k R_0) [K_0(\mu_k) I_0(\mu_k r_0) - K_0(\mu_k r_0) I_0(\mu_k)] \right],$$

$$S_8 = \frac{R_0}{4h} \sum_{k=1}^3 \frac{\beta_k \mu_k}{I_0(\mu_k) (\delta_1^2 + \mu_k^2)} \{ \eta(R_0 - r_0) I_0(\mu_k r_0) [K_1(\mu_k R_0) I_0(\mu_k) +$$

$$+ K_0(\mu_k) I_1(\mu_k R_0)] + \eta(r_0 - R_0) \times$$

$$\times I_1(\mu_k R_0) [K_0(\mu_k) I_0(\mu_k r_0) - K_0(\mu_k r_0) I_0(\mu_k)] \},$$

$$S_{10} = - \frac{bhR_0}{4} \sum_{k=1}^3 \frac{\beta_k \mu_k}{I_0(\mu_k) (\delta_1^2 + \mu_k^2)} \{ \eta(R_0 - r_0) I_0(\mu_k r_0) \times$$

$$\times [K_1(\mu_k R_0) I_0(\mu_k) + K_0(\mu_k) I_1(\mu_k R_0)] + \eta(r_0 - R_0) I_1(\mu_k R_0) \times$$

$$\times [K_0(\mu_k) I_0(\mu_k r_0) - K_0(\mu_k r_0) I_0(\mu_k)] \}.$$

Wykorzystanie rozwinięć asymptotycznych dla zmodyfikowanych funkcji Bessela pozwala stwierdzić, że o wartości wyrażen (D.20) decydują pierwsze składniki wzorów (D.22) i (D.23).

Oto wspomniane składniki:

$$S_1 \approx \frac{R_0}{4r_0 \delta_1^2} \left[ \eta(R_0 - r_0) \frac{r_0}{R_0} + \eta(r_0 - R_0) \frac{R_0}{r_0} \right],$$

$$S_4 \approx \frac{R_0^2}{4r_0 \delta_1^2},$$

$$S_7 \approx \frac{1}{2\delta_1^2} \eta(R_0 - r_0).$$

Pominięcie pozostałych składników w związkach (D.22) i (D.23) jest przyczyną błędu

$$(D.24) \quad \varepsilon_3^{(2)} < 2 \sqrt{\frac{h}{\delta_1}} = 2,09 \cdot 10^{-4}$$

W grupie wzorów (D.21) szeregi  $S_2, S_5, S_8$  i  $S_{10}$  są majorantami odpowiednio szeregów  $S_3, S_6, S_9$  i  $S_{11}$ . Tym samym nierówność (D.24), dotycząca błędu, jest prawdziwa w odniesieniu do wszystkich szeregów (D.21).

Przeprowadzone oszacowania pozwalają na przedstawienie wyrażeń (D.20) w następującej postaci przybliżonej:

$$(D.25) \quad \begin{aligned} X(R_0, r_0, \tau) &\approx \frac{\sin(\delta_1 \tau)}{4\delta_1} \left[ \eta(R_0 - r_0) r_0 + \eta(r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0} + \frac{r_0 R_0^2}{2b - 1} \right] \\ Y(R_0, r_0, \tau) &\approx \frac{\sin(\delta_1 \tau)}{4\delta_1} \left[ \eta(R_0 - r_0) + \eta(r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0^2} - R_0^2 \right] \\ Z(R_0, r_0, \tau) &\approx \frac{\sin(\delta_1 \tau)}{4\delta_1} \left[ R_0^2 - \eta(R_0 - r_0) + \eta(r_0 - R_0) \frac{R_0^2}{r_0^2} \right] \end{aligned}$$

przy czym błąd  $\varepsilon_3$  nie przekracza wartości

$$(10\varepsilon_3^{(1)} + 2\varepsilon_3^{(2)}) \cdot 100\% = 0,0418\%$$

Uproszczone wzory (D.14), (D.18) i (D.25) zostały wykorzystane do przybliżonego opisu stanu przemieszczenia i naprężenia w tarczy, a tym samym w dużej mierze ułatwiły obliczenie przykładów liczbowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. DERSKI, *A dynamic problem of thermoelasticity concerning a thin circular plate*, Arch. Mech. Stos., 2, 13 (1961).
2. F. LEJA, *Teoria funkcji analitycznych*, PWN, Warszawa 1957.
3. N. W. McLACHLAN, *Complex Variable Theory and Transform Calculus*, University Press, Cambridge 1963.
4. E. MELAN, H. PARCUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder* (tłum. ros.), Moskwa 1958.
5. W. NOWACKI, *A dynamical problem of thermoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 3, 9 (1957).
6. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
7. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
8. H. PARKUS, *Instationäre Wärmespannungen*, Springer-Verlag, Wien 1959.
9. W. PIECHOCKI, *Axisymmetric dynamic problem of thermoelasticity for a solid sphere*, Arch. Mech. Stos., 4, 12 (1960).
10. A. SINGH, P. PURI, *Dynamic thermal stress in an infinite slab*, Arch. Mech. Stos., 1, 15 (1963).
11. M. SOKOŁOWSKI, *The axially symmetric thermoelastic problem of the infinite cylinder*, Arch. Mech. Stos., 6, 10 (1958).
12. E. STERNBERG and J. G. CHAKRAVORTY, *Thermal shock in an elastic body with a spherical cavity*, Quart. Appl. Math., 2, 17 (1959).
13. G. N. WATSON, *Theory of Bessel Functions*, University Press, Cambridge 1962.

## Резюме

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОМ КРУГОВОМ ДИСКЕ,  
ВЫЗВАННОЕ ДЕЙСТВИЕ, НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА

В работе определяются: температурные поля, перемещений и динамические напряжения в тонком круговом диске, вызванные действием источников тепла с периодически переменной и постоянной производительностью во времени. Рассматриваются случаи действия источников, расположенных на круге и в кривой области. Анализ решений, полученных для источников тепла с периодически переменной производительности во времени, дал возможность сформулировать и показать наглядно, что термическое вынуждение этого рода может быть причиной, вызывающей резонансные механические колебания диска. Представляется процесс перемещений и напряжений в случае возникновения резонанса. Большие резонансные частоты обеспечивают, что этого типа механический резонанс не угрожает машинным конструкциям.

## Summary

DYNAMIC STRESSES IN A THIN CIRCULAR DISK CAUSED BY THE ACTION  
OF TRANSIENT HEAT SOURCES

In the paper the fields have been determined of temperature, displacements and dynamic stresses in a thin circular disk, caused by the action of heat sources of periodically varying and of constant output with time. The cases have been considered of the action of sources placed in a circle and within a circular region. The analysis of solutions obtained for heat sources with periodically varying output with time enabled to formulate the view that this kind of thermal forcing might be the cause of mechanical resonance vibration of the disk. The high resonance frequencies ensure that this type of mechanical resonance does not endanger machine constructions.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
KATEDRA MECHANIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1969 r.*