

## LINEARYZACJA SIŁ SPRĘŻYSTYCH W UKŁADZIE WIBROUDERZENIOWYM

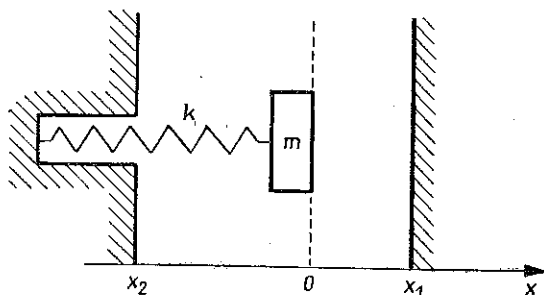
CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. Istotne dla układów wibrouderzeniowych charakterystyki uderzeniowe otrzymuje się zwykle stosując metodę zszywania rozwiązań. Jednak już przy badaniu drgań wymuszonych jej zastosowanie jest źródłem poważnych trudności obliczeniowych, wynikającej ze skokowej zmiany prędkości w chwili uderzenia. Zachodzi pytanie, czy da się zlinearyzować równanie ruchu układu wibrouderzeniowego w ten sposób, aby wszystkie cechy układu wyodrębnione metodą zszywania rozwiązań zostały zachowane w równaniu zlinearyzowanym. Niżej podjęto próbę linearyzacji równań ruchu przy założeniu, że uderzenia nie powodują strat energii w układzie, a jego położenie w czasie uderzenia nie ulega zmianie.

2. Rozważmy układ drgający przedstawiony na rys. 1 z dwoma ogranicznikami ruchu. Przy założeniu doskonale sprężystych zderzeń równanie ruchu układu można napisać w postaci

$$(1) \quad m\ddot{x} + kx + C [\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)] \operatorname{sgn} \dot{x} = 0,$$

gdzie  $C$  oznacza sztywność ograniczników, a  $\delta(x)$  — to funkcja Diraca. Rozwiązanie tego równania napotyka na szereg istotnych trudności, gdyż występują w nim



Rys. 1

dystrybucje zależne od poszukiwanej zmiennej zależnej  $x(t)$ . Funkcję opisującą ruch masy  $m$  można znaleźć na innej drodze rozważając równanie (1) w jego przedziale liniowości i uwzględniając związek między prędkością przed uderzeniem  $v^a$  i po uderzeniu, mianowicie  $v^p = -v^a$ .

Zajmijmy się najpierw przypadkiem drgań z jednostronnym uderzeniem o prawy ogranicznik, tzn. gdy  $|x_2| \gg |x_1|$ . Wtedy równanie ruchu w przedziale liniowości układu ma postać

$$(2) \quad m\ddot{x} + kx = 0, \quad x < x_1.$$

Przechodząc do bezwymiarowego czasu  $\tau = \lambda t$ ,  $\lambda^2 = k/m$ , mamy

$$(3) \quad x'' + x = 0, \quad x < x_1, \quad x'' = \frac{d^2 x}{d\tau^2}.$$

Przyjmijmy, że w czasie  $\tau = 0$  zaszło uderzenie o prawą ściankę z parametrami  $x(0) = x_1$ ,  $x'(0) = [x'(0)]^p = -W_1$ . Biorąc je jako warunki początkowe równania (3) po rozwiązaniu otrzymamy

$$(4) \quad \begin{aligned} x(\tau) &= x_1 \cos \tau - W_1 \sin \tau, \\ x'(\tau) &= -x_1 \sin \tau - W_1 \cos \tau, \end{aligned} \quad x(\tau) < x_1.$$

Po czasie  $\tau = \bar{\tau}$  nastąpi ponowne uderzenie o prawą ściankę z następującymi parametrami przed uderzeniem:  $x(\bar{\tau}) = x_1$ ,  $x'(\bar{\tau}) = [x'(\bar{\tau})]^q = W_1$ , ( $[x']^p = -[x']^q$ ). Uwzględniając powyższe mamy

$$(5) \quad x_1 = x_1 \cos \bar{\tau} - W_1 \sin \bar{\tau}, \quad W_1 = -x_1 \sin \bar{\tau} - W_1 \cos \bar{\tau}.$$

Zauważmy, że  $\bar{\tau}$  jest okresem drgań uderzeniowych analizowanego układu; wobec tego  $\bar{\tau} = \lambda T = 2\pi\lambda/\omega = 2\pi/\eta$ , gdzie  $\eta = \omega/\lambda$ , a  $\omega$  jest częstotliwością drgań uderzeniowych. Z uzyskanych zależności (5) i (4) można znaleźć prędkość uderzenia  $W_1$ , jako funkcję bezwymiarowej częstotliwości drgań  $\eta$ , oraz wartość maksymalnego wychylenia  $x_{\max}$ :

$$(6) \quad W_1 = -x_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta}, \quad x_{\max} = x_1 \sec \frac{\pi}{\eta}.$$

Wprowadźmy bezwymiarową prędkość uderzenia  $W = W_1/|x_1| > 0$ ; wtedy charakterystyka uderzeniowa (6) przyjmie postać

$$(7) \quad W = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta} \frac{x_1}{|x_1|}.$$

Powyższą zależność przedstawiono graficznie na rys. 2 dla przypadku luzu w układzie  $x_1 > 0$  i naciągu  $x_1 < 0$ .

Jak wynika z rysunku, charakterystyka uderzeniowa układu jest wieloznaczna. W przypadku luzu w układzie ( $x_1 > 0$ ) częstotliwość drgań  $\eta$  wzrasta ze wzrostem prędkości uderzenia  $W$ , natomiast w przypadku naciągu ( $x_1 < 0$ ) częstotliwość wzrasta przy zmniejszaniu się prędkości uderzeniowej  $W$ .

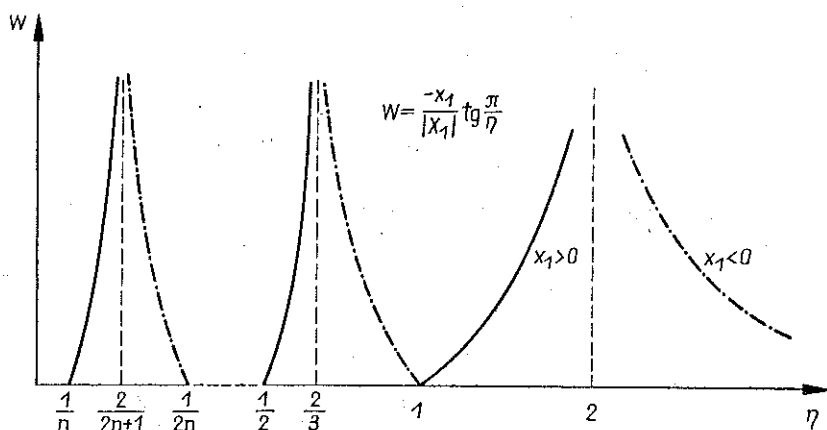
Z analizy drugiego ze wzorów (6) wynika, że bezwymiarowe wychylenie maksymalne może przyjmować wartości z przedziału  $\infty \geq |x_{\max}/x_1| \geq 1$ . Wobec tego dla pewnych wartości częstotliwości  $\eta$  nastąpi uderzenie o lewy ogranicznik i drgania masy  $m$  odbywać się będą przy uderzeniach dwustronnych. Przypadek ten wymaga oddzielnej analizy.

Równanie ruchu w jego przedziale liniowości jest tutaj analogiczne do (3):

$$(8) \quad x'' + x = 0, \quad x_2 < x < x_1.$$

Jeśli dla czasu  $\tau = 0$  zaszło uderzenie o prawy ogranicznik z parametrami po uderzeniu  $x(0) = x_1$ ,  $x'(0) = [x'(0)]^p = -[x'(0)]^a = -W_1$ , to ruch w stronę ujemnych wartości osi  $x$ -ów opisany będzie zależnościami

$$(9) \quad x = x_1 \cos \tau - W_1 \sin \tau, \quad x' = -x_1 \sin \tau - W_1 \cos \tau.$$



Rys. 2

Po czasie  $\tau = \tau_1$  nastąpi uderzenie o lewy ogranicznik z parametrami przed uderzeniem  $x(\tau_1) = x_2$ ,  $x'(\tau_1) = [x'(\tau_1)]^a = W_2$ ,  $W_2 < 0$ . Wtedy muszą być spełnione związki

$$(10) \quad x_2 = x_1 \cos \tau_1 - W_1 \sin \tau_1, \quad W_2 = -x_1 \sin \tau_1 - W_1 \cos \tau_1.$$

Po uderzeniu zacznie się ruch w stronę dodatnich  $x$ -ów z parametrami początkowymi:  $x(0) = x_2$ ,  $x'(0) = [x'(0)]^p = -[x'(0)]^a = -W_2$ , czyli

$$(11) \quad x = x_2 \cos \tau - W_2 \sin \tau, \quad x' = -x_2 \sin \tau - W_2 \cos \tau.$$

Dla  $\tau = \tau_2$  nastąpi ponowne uderzenie o prawy ogranicznik z parametrami przed uderzeniem:  $x(\tau_2) = x_1$ ,  $x'(\tau_2) = [x'(\tau_2)]^a = W_1$ . Wtedy z (11) będziemy mieli

$$(12) \quad x_1 = x_2 \cos \tau_2 - W_2 \sin \tau_2, \quad W_1 = -x_2 \sin \tau_2 - W_2 \cos \tau_2.$$

Można wykazać, że  $\tau_1 = \tau_2 = \tau/2 = \pi/\eta$ ; stąd interesujące nas związki (12) i (10) przyjmą postać

$$(13) \quad \begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \frac{\pi}{\eta} - W_1 \sin \frac{\pi}{\eta}, & W_2 &= -x_1 \sin \frac{\pi}{\eta} - W_1 \cos \frac{\pi}{\eta}; \\ x_1 &= x_2 \cos \frac{\pi}{\eta} - W_2 \sin \frac{\pi}{\eta}, & W_1 &= -x_2 \sin \frac{\pi}{\eta} - W_2 \cos \frac{\pi}{\eta}. \end{aligned}$$

Z otrzymanego układu równań (13) wyznaczmy prędkości uderzenia o prawy ogranicznik  $W_1$  i lewy  $W_2$  jako funkcję bezwymiarowej częstości drgań uderzeniowych  $\eta$ :

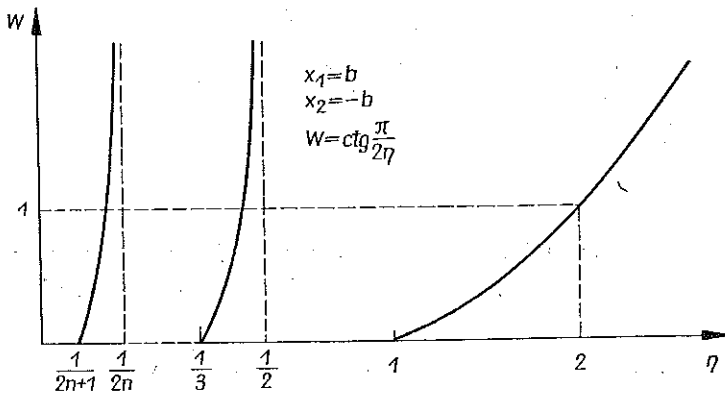
$$(14) \quad W_1 = -x_2 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{\eta} + x_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\eta}, \quad W_2 = -x_1 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{\eta} + x_2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\eta}.$$

Wprowadzając bezwymiarową prędkość uderzenia o prawy ogranicznik  $W = W_1/|x_1|$  ( $x_1 \neq 0$ ),  $W' = W_1/|x_2|$  ( $x_1 = 0$ ), otrzymamy charakterystyki uderzeniowe układu:

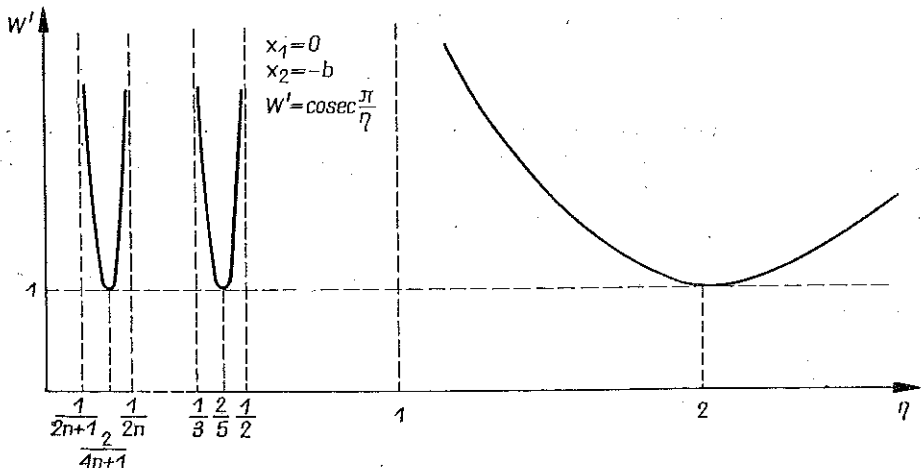
$$(15) \quad W = -\frac{x_2}{|x_1|} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{\eta} + \frac{x_1}{|x_1|} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\eta},$$

$$W' = -\frac{x_2}{|x_2|} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{\eta}, \quad W, W' > 0.$$

Graficzną ilustrację tych charakterystyk w trzech najważniejszych przypadkach przedstawiają rys. 3–5.

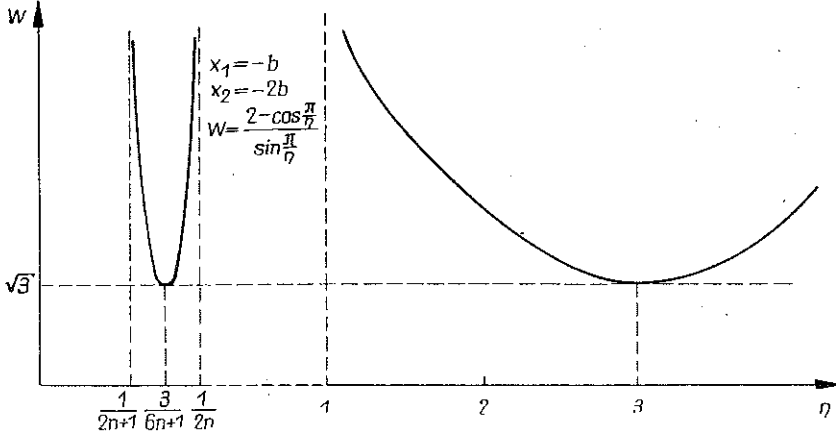


Rys. 3



Rys. 4

Z przytoczonych charakterystyk wynika, że we wszystkich trzech przypadkach są one wielowartościowe. W przypadku symetrycznym ( $x_2 = -x_1$ ), drgania swobodne są możliwe dla wszystkich wartości prędkości uderzenia  $W$ , a przy jej zmniejszaniu częstość drgań również się zmniejsza (rys. 3). W pozostałych przypadkach



Rys. 5

(rys. 6 i 7) charakterystyki uderzeniowe są wielowartościowe w każdym zakresie ich istnienia,  $1/(2n+1) < \eta < 1/2n$ , a drgania mogą istnieć tylko powyżej pewnej wartości prędkości. Wartości te oraz odpowiadające im częstości  $\eta$  obliczono z warunku  $W_2 = 0$ .

Z otrzymanych rezultatów tak w przypadku uderzeń jednostronnych jak i dwustronnych wynika, że analizowany układ jest silnie nieliniowy w ramach każdego z zakresów częstości, a drgania o tej samej prędkości uderzenia mogą odbywać się dla różnych częstości  $\eta$ . Poza tym nie dla każdej prędkości  $W$  drgania te mogą istnieć. Dlatego też wspomniana na wstępie linearyzacja układu powinna odzwierciedlać możliwie wszystkie wymienione tu cechy układu wibrouderzeniowego.

3. Charakterystyki sprężyste wyjściowego równania (1) można graficznie przedstawić tak, jak na rys. 6 i 7, gdzie linia ciągła oznacza przypadek luzu ( $x_1 > 0$ ), przerywana zaś przypadek naciągu ( $x_1 < 0$ ). Na rysunkach tych zaznaczono również aproksymację sztywności ograniczników prostymi o nachyleniu  $\text{tg } \alpha = C$ . Łatwo wykazać, że jeśli sztywność ograniczników dąży do nieskończoności ( $C \rightarrow \infty$ ), to czas przebywania układu na tym odcinku charakterystyki dąży do zera ( $t_i \rightarrow 0$ ). Wobec tego problem linearyzacji sprowadza się do obliczenia czasu przebywania układu na charakterystyce prostoliniowej przy pełnym ruchu w obie strony. Jeśli czas ruchu w jedną stronę oznaczymy przez  $t_k$ , to okres drgań  $T = 2t_k$ .

Równanie ruchu układu na tym odcinku ma postać

$$(16) \quad m\ddot{x} + kx = 0, \quad x_2 < x < x_1.$$

Przy ruchu układu od punktu  $x_1$  do  $x_2$  po pewnych przekształceniach otrzymamy

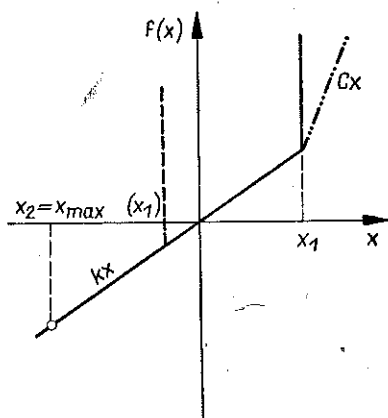
$$(17) \quad v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{v_1^2 + \frac{k}{m}(x_1^2 - x^2)},$$

skąd łatwo otrzymamy

$$(18) \quad t_k = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{v_1^2 + \frac{k}{m}(x_1^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{v_1^2}{\lambda^2} + x_1^2 - x^2}}.$$

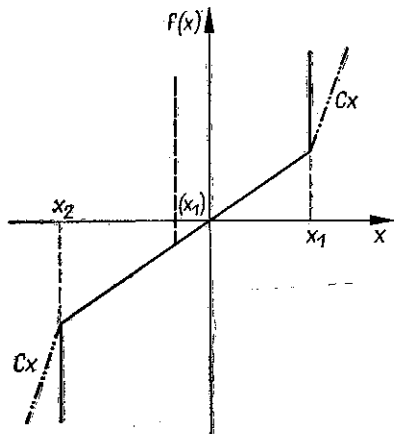
Wiedząc, że  $T = 2t_k$  z (18) będziemy mieli

$$(19) \quad T = 2 \sqrt{\frac{m}{k}} \left( \arcsin \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\lambda^2}}} - \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\lambda^2}}} \right).$$



Rys. 6

$$F(x) = kx + C\delta(x - x_1) \operatorname{sgn} \dot{x}$$



Rys. 7

$$f(x) = kx + C \operatorname{sgn} \dot{x} [\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)]$$

Wprowadźmy obecnie zlinearyzowaną sztywność układu wibrouderzeniowego  $c$  taką, że równanie (1) da się zastąpić równaniem

$$m\ddot{x} + cx = 0, \quad x_2 \leq x \leq x_1.$$

Wtedy częstość drgań uderzeniowych wynosi  $\omega^2 = c/m = (2\pi/T)^2$ . Przyjmując to z (19) znajdziemy

$$(20) \quad c = \left( \frac{\pi}{\arcsin \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\lambda^2}}} - \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\lambda^2}}}} \right)^2 k.$$

Zależność ta jest ogólną postacią zlinearyzowanego współczynnika sztywności układu wibrouderzeniowego.

Przejdźmy obecnie do rozpatrzonych poprzednio drgań z uderzeniami jednostronnymi i dwustronnymi. W przypadku pierwszym (rys. 6) współrzędna  $x_2$  wynosi

$x_2 = x_{\max} = -A$ . Wielkość tę obliczymy z zasady energii dla rozpatrywanego układu:

$$(21) \quad x_2 = -A = -\sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\lambda^2}}.$$

Wstawiając (21) do (20) i oznaczając zlinearyzowaną sztywność układu z uderzeniami jednostronnymi przez  $c_1$ , znajdziemy

$$(22) \quad c_1 = \left( \frac{\pi}{\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\lambda^2}}}} \right)^2 k.$$

Związek ten można przekształcić do postaci

$$(23) \quad c_1 = \left( \frac{\pi}{\arcsin \frac{-x_1 \lambda}{v_1}} \right)^2 k,$$

a ponieważ  $\sqrt{c_1/k} = \eta$  oraz  $v_1 = \dot{x}_1 = \lambda x_1' = \lambda W_1 = \lambda |x_1| W$ , przeto

$$(24) \quad \eta = \frac{\pi}{\arcsin \frac{-x_1}{W|x_1|}} \quad \text{lub} \quad W = -\frac{x_1}{|x_1|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\eta}.$$

Jak widać, drogą przekształceń zlinearyzowanej sztywności układu wibrouderzeniowego otrzymaliśmy jego charakterystykę uderzeniową identyczną ze znalezioną poprzednio (7) (rys. 2). Wynika stąd wniosek, że zastosowana metoda linearyzacji jest poprawna i pozwala wyodrębnić wszystkie cechy układu drgającego z jednostronnymi uderzeniami.

Przejdźmy obecnie do analizy układu z uderzeniami dwustronnymi, biorąc pod uwagę rozpatrywane poprzednio trzy przypadki:  $x_1 = b$ ,  $x_2 = -b$ ;  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -b$ ;  $x_1 = -b$ ,  $x_2 = -2b$ . Przyjmując w zależności (20)  $x_1 = b$ ,  $x_2 = -b$  po pewnych przeróbkach otrzymamy

$$c_2 = \left( \frac{\pi}{2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+W^2}}} \right)^2 k,$$

a przekształcając dalej jak w (24) otrzymamy ostatecznie

$$(25) \quad W = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2\eta}.$$

Otrzymany wynik jest identyczny z wynikiem otrzymanym metodą zszywania rozwiązań (rys. 3).

W przypadku drugim  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -b$  z zależności (20) mamy

$$c_2 = \left( \frac{\pi}{\arcsin \frac{1}{W'}} \right)^2 k,$$

co po przekształceniach daje charakterystykę uderzeniową

$$(26) \quad W' = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{\eta},$$

taką samą jak w punkcie drugim (rys. 4).

Jeśli do związku (20) podstawimy  $x_1 = -b$ ,  $x_2 = -2b$ , to po pewnych przeobrażeniach otrzymamy

$$(27) \quad c_2 = \left( \frac{\pi}{\arcsin \frac{2 + W\sqrt{W^2 - 3}}{1 + W^2}} \right)^2 k.$$

Otrzymanie charakterystyki z zależności (27) wymaga rozwiązania równania czwartego stopnia, lecz łatwo wykazać, że charakterystyka z rys. 5 spełnia tę zależność. Stąd również wniosek, iż współczynnik linearyzacji dla przypadku obustronnych uderzeń z naciąganiem obliczony jest poprawnie.

4. Porównując charakterystyki uderzeniowe rozpatrywanych układów i własności zlinearyzowanych współczynników sztywności można stwierdzić, że zaproponowana metoda linearyzacji jest dokładna i poprawnie odwzorowuje wieloznaczne charakterystyki układów wibrouderzeniowych. Metoda ta pozwala zastąpić silnie nieliniowe równanie ruchu równaniem zlinearyzowanym poprawnym w całym przedziale istnienia rozwiązania. Mianowicie równanie ruchu z uderzeniami jednostronnymi

$$m\ddot{x} + kx + C\delta(x - x_1) \operatorname{sgn} \dot{x} = 0,$$

pozwala zamienić równaniem liniowym

$$(28) \quad m\ddot{x} + k \left( \frac{\pi}{\arcsin \frac{-x_1 \lambda}{v_1}} \right)^2 x = 0, \quad x \leq x_1.$$

W przypadku uderzeń dwustronnych

$$m\ddot{x} + kx + C[\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)] \operatorname{sgn} \dot{x} = 0,$$

równaniem liniowym

$$(29) \quad m\ddot{x} + k \left( \frac{\pi}{\arcsin \frac{x_1 x_2 + \frac{v_1}{\lambda} \sqrt{x_1^2 - x_2^2 + \frac{v_1^2}{\lambda^2}}}{x_1^2 + \frac{v_1^2}{\lambda^2}}} \right)^2 x = 0, \quad x_2 \leq x \leq x_1.$$

Zlinearyzowane równania (28) i (29) mogą okazać się szczególnie dogodnie przy analizie drgań wymuszonych układów wibrouderzeniowych.



## Резюме

## ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УПРУГИХ СИЛ В ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЕ

В работе представлена попытка линеаризации упругих сил в колебательной системе с ударами. Полученные, этим путём, ударные характеристики сравниваются, с полученными методом приспособки. Таким образом, показано, что проведенная линеаризация виброударной системы правильна и точно отображает все особенности системы.

## Summary

LINEARIZATION OF THE ELASTIC FORCES  
IN VIBRO-PERCUSSION SYSTEM

This work is an attempt of the linearization of the elastic forces in vibration system with percussion. The percussion characteristics obtained in this way were compared with characteristics obtained by the method of adaptation of the equations. It was shown this way that the linearization of vibro-percussion system performed is correct and maps all its features exactly.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 grudnia 1968 r.*

---