

DRGANIA UKŁADU LINIOWEGO WYWOŁANE PROCESEM PRZYPADKOWYM  
O JEDNOSTAJNIE ZMIENNEJ CZĘSTOŚCI

ANDRZEJ TYLIKOWSKI (GLIWICE)

Drgania wymuszone siłą sinusoidalnie zmienną o jednostajnie zmiennej częstotliwości występują w wielu dziedzinach techniki, począwszy od rozruchu niewyważonych wałów, a skończywszy na drganiach związanych z rozruchem silników raketowych. Tematyce tej w aspekcie deterministycznym poświęcony jest szereg prac. F. M. LEWIS pierwszy [1] analizował ruch oscylatora harmonicznego, poddanego działaniu siły sinusoidalnie zmiennej o stałej amplitudzie i jednostajnie zmiennej częstotliwości. A. P. FILIPOW [2] przeanalizował oscylator harmoniczny z tłumieniem, poddany takiemu samemu wymuszeniu. Podał on również [3] szereg interesujących zastosowań z zakresu ciągłych układów sprężystych. Znacznie później W. J. STRONGE [4] rozwiązał analogiczne zagadnienie drgań wymuszonych kinematycznie występujących przy przesuwaniu się układu ze stałym przyspieszeniem po powierzchni falowej.

Potrzeba probabilistycznego potraktowania drgań wymuszonych procesami o jednostajnie zmiennej częstotliwości była niejednokrotnie wskazywana w literaturze. Wynika ona z przypadkowej natury zaburzeń występujących w technice, jak np. przypadkowe fluktuacje ciśnienia, wywołane pracą silników w lotnictwie i technice raketowej [5], czy przypadkowe nierówności podłoża w zagadnieniach transportowych [6].

Praca niniejsza poświęcona jest drganiom przypadkowym, wymuszonym siłą będącą procesem stochastycznym. Ze względu na fakt, że szeroka klasa procesów stochastycznych daje się przedstawić w postaci sumy harmonik o losowych amplitudach i fazach, przyjęto wymuszenie w tej postaci. Założono, że amplituda i faza siły są nieskorelowane. Do analizy przyjęto układ liniowy o jednym stopniu swobody z wiskotycznym tłumieniem. Z założenia jednostajnej zmienności częstotliwości wynika, że funkcja korelacyjna tak zdefiniowanego procesu ma charakter niestacjonarny. Zatem i proces «wyjściowy», przemieszczenie, jest niestacjonarnym procesem losowym. Problem rozwiązywany w ramach teorii korelacyjnej [7] polega na wyznaczeniu wariancji przemieszczenia jako funkcji czasu. Sprowadza się on do obliczenia dość trudnych całek, które jednak udaje się wyrazić przez funkcję prawdopodobieństwa zespolonego argumentu lub jej pokrewne, szeroko reprezentowane w tablicach matematycznych [8, 9, 10 i 11]. Wykonane obliczenia numeryczne pozwalają wykryć szereg ciekawych własności zmian wariancji w zależności od czasu. Najbar-

dziej charakterystyczną cechą krzywych przedstawiających zależność wariancji od czasu jest występowanie w układach oscylacyjnych ostrego «piku» dla czasu, w którym nastąpiło zrównanie się częstości wymuszającej z częstością własną. Tak samo jak w przypadku deterministycznym zwiększenie tłumienia powoduje gwałtowne zmniejszenie poziomu wariancji.

### 1. Sformułowanie zagadnienia

Ruch liniowego układu sprężystego o jednym stopniu swobody z lepkiem tłumieniem, spowodowany siłą zależną od czasu, opisany jest równaniem

$$(1.1) \quad \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = \frac{\delta(t)}{m},$$

gdzie  $m$  oznacza masę,  $n$  współczynnik tłumienia,  $k$  częstość drgań nietłumionych,  $q$  siłę,  $x$  przemieszczenie,  $t$  czas.

Rozwiązanie tego równania przy założeniu zerowych warunków początkowych przedstawia się następująco:

$$(1.2) \quad x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t h(t-\tau) q(\tau) d\tau,$$

gdzie  $h(t)$  jest impulsową funkcją przejścia, tj. reakcją układu na wymuszenie w postaci  $\delta(t)$ . Przy założeniu, że siła  $q(t)$  jest niestacjonarnym procesem o średniej  $m_q(t)$  i funkcji korelacyjnej  $K_{qq}(t_1, t_2)$ , średnią i wariancję przemieszczenia wyznaczyć można na podstawie zależności [5]:

$$(1.3) \quad m_x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t h(t-\tau) q(\tau) d\tau,$$

$$\sigma_x^2(t) = \frac{1}{m^2} \int_0^t \int_0^t h(t-\tau_1) h(t-\tau_2) K_{qq}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Do dalszej analizy przyjęto siłę jako proces stochastyczny w postaci

$$(1.4) \quad \delta(t) = \sum_{j=1}^N A_j \cos\left(\frac{\omega_j t^2}{2} + \varphi_j\right),$$

gdzie  $A_j$  i  $\varphi_j$  są nieskorelowanymi ze sobą zmiennymi losowymi. Założono, że znane są rozkłady prawdopodobieństwa  $g_j(A_j)$  amplitud  $A_j$ , a  $\varphi_j$  są zmiennymi losowymi równomiernie rozłożonymi na odcinku  $[0, 2\pi]$ , czyli o rozkładach gęstości prawdopodobieństwa w postaci

$$f_j(\varphi_j) = \frac{1}{2\pi} [H(\varphi_j) - H(\varphi_j - 2\pi)],$$

gdzie  $H(\varphi)$  jest funkcją Heaviside'a.

Srednią tak określonego procesu przy uwzględnieniu braku korelacji między harmonikami obliczono na podstawie zależności

$$(1.5) \quad m_a(t) = \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_j(A_j) f_j(\varphi_j) A_j \cos\left(\frac{\omega_j t^2}{2} + \varphi_j\right) dA_j d\varphi_j.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymano  $m_a(t) = 0$ .

Analogicznie wyznaczono funkcję korelacyjną; jest ona równa

$$(1.6) \quad K_{aa}(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^N B_j \cos \frac{\omega_j}{2} (t_1^2 - t_2^2),$$

gdzie  $B_j$  jest połową wariancji  $A_j$ , obliczoną z zależności

$$(1.7) \quad B_j = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A_j^2 g_j(A_j) dA_j.$$

Po podstawieniu (1.5) do (1.3) otrzymano

$$(1.8) \quad m_x(t) = 0.$$

Wariancję procesu wyznaczono na podstawie (1.3) po wykorzystaniu (1.6) oraz przyjęciu konkretnej postaci impulsowej funkcji przejścia  $h(t)$ . Najpierw rozpatrzono przypadek małego tłumienia, tzn.  $k > n$ . Stosując oznaczenie  $\bar{\omega} = \sqrt{k^2 - n^2}$  impulsową funkcję przejścia wyznaczono w postaci

$$(1.9) \quad h(t) = \frac{e^{-nt}}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} t.$$

Natomiast wariancja procesu

$$(1.10) \quad \sigma^2(t) = \frac{1}{m^2 \bar{\omega}^2} \sum_{j=1}^N B_j e^{-2nt} \int_0^t \int_0^t \sin \bar{\omega} (t - \tau_1) \times \\ \times \sin \bar{\omega} (t - \tau_2) \cos \frac{\omega_j}{2} (\tau_1^2 - \tau_2^2) d\tau_1 d\tau_2 e^{n(\tau_1 + \tau_2)}.$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(1.11) \quad \sigma_{xj}^2(t) = \frac{B_j e^{-2nt}}{m^2 \bar{\omega}^2} \int_0^t \int_0^t e^{n(\tau_1 + \tau_2)} \sin \bar{\omega} (t - \tau_1) \times \\ \times \sin \bar{\omega} (t - \tau_2) \cos \beta_j (\tau_1^2 - \tau_2^2) d\tau_1 d\tau_2,$$

można wyrażenie (1.10) napisać w postaci

$$(1.12) \quad \sigma_x^2(t) = \sum_{j=1}^N \sigma_{xj}^2(t).$$

## 2. Obliczenie wariancji przemieszczenia

Wyrażenie (1.11) po wykorzystaniu tożsamości  $\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x$  oraz  $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$  daje się przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad \sigma_{xj}^2(t) = -\frac{B_j}{4m^2\bar{\omega}^2} \operatorname{Re}(I_1 + I_2 - I_3 - I_4),$$

gdzie

$$(2.2) \quad \begin{aligned} I_1 &= e^{-2t(n-i\bar{\omega})} \int_0^t \int_0^t e^{i\beta_j \tau_1^2 + \tau_1(n-i\bar{\omega})} e^{-i\beta_j \tau_2^2 + \tau_2(n-i\bar{\omega})} d\tau_1 d\tau_2, \\ I_2 &= e^{-2t(n+i\bar{\omega})} \int_0^t \int_0^t e^{i\beta_j \tau_1^2 + \tau_1(n+i\bar{\omega})} e^{-i\beta_j \tau_2^2 + \tau_2(n+i\bar{\omega})} d\tau_1 d\tau_2, \\ I_3 &= e^{-2nt} \int_0^t \int_0^t e^{i\beta_j \tau_1^2 + \tau_1(n+i\bar{\omega})} e^{-i\beta_j \tau_2^2 + \tau_2(n-i\bar{\omega})} d\tau_1 d\tau_2, \\ I_4 &= e^{-2nt} \int_0^t \int_0^t e^{i\beta_j \tau_1^2 + \tau_1(n-i\bar{\omega})} e^{-i\beta_j \tau_2^2 + \tau_2(n+i\bar{\omega})} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Wykonując zmianę zmiennych w całkach (2.2) za pomocą podstawień

$$(2.3) \quad \begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2\sqrt{i\beta_j}} [n + i(2\beta_j \tau_1 - \bar{\omega})], & z_{10} &= \frac{n - i\bar{\omega}}{2\sqrt{i\beta_j}}, \\ z_2 &= \frac{1}{2\sqrt{-i\beta_j}} [n - i(2\beta_j \tau_2 + \bar{\omega})], & z_{20} &= \frac{n - i\bar{\omega}}{2\sqrt{-i\beta_j}}, \\ z_3 &= \frac{1}{2\sqrt{i\beta_j}} [n + i(2\beta_j \tau_1 + \bar{\omega})], & z_{30} &= \frac{n + i\bar{\omega}}{2\sqrt{i\beta_j}}, \\ z_4 &= \frac{1}{2\sqrt{-i\beta_j}} [n - i(2\beta_j \tau_2 - \bar{\omega})], & z_{40} &= \frac{n + i\bar{\omega}}{2\sqrt{-i\beta_j}}, \end{aligned}$$

otrzymano

$$(2.4) \quad \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\beta_j} [W(z_1) - e^{-z_1^2 + z_{10}^2} W(z_{10})] [W(z_2) - e^{-z_2^2 + z_{20}^2} W(z_{20})], \\ I_2 &= \frac{1}{\beta_j} [W(z_3) - e^{-z_3^2 + z_{30}^2} W(z_{30})] [W(z_4) - e^{-z_4^2 + z_{40}^2} W(z_{40})], \\ I_3 &= \frac{1}{\beta_j} [W(z_3) - e^{-z_3^2 + z_{30}^2} W(z_{30})] [W(z_2) - e^{-z_2^2 + z_{20}^2} W(z_{20})], \\ I_4 &= \frac{1}{\beta_j} [W(z_1) - e^{-z_1^2 + z_{10}^2} W(z_{10})] [W(z_4) - e^{-z_4^2 + z_{40}^2} W(z_{40})]. \end{aligned}$$

We wzorach (2.4)  $W(z)$  jest funkcją pokrewną całce prawdopodobieństwa zespolonego argumentu, określoną wzorem

$$(2.5) \quad W(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx.$$

Część rzeczywistą i urojoną funkcji  $W(z)$  oznaczono odpowiednio przez  $U(z)$  i  $V(z)$ . W dalszej części pracy korzysta się będzie z postaci wykładniczej  $z$  ze względu na fakt, że w tablicach funkcji  $W(z)$  [9] przyjęto układ biegunowy. Oczywiście nic nie stoi na przeszkodzie, aby posługiwać się postacią algebraiczną  $z$ . W tym celu należy wyrazić funkcję  $W(z)$  przez funkcję

$$W_1(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{t^2} dt \right)$$

za pomocą zależności

$$W(z) = i\sqrt{\pi} \frac{e^{-z^2} - W_1(z)}{2}$$

i skorzystać z tablic [8], w których przyjęty jest układ prostokątny. Funkcję  $W(z)$  można wyrazić również przez zespoloną całkę Fresnela:

$$R(r+is) + iI(r+is) = \int_0^{r+is} e^{i\frac{\pi}{2}t^2} dt$$

stabilizowaną w [11].

Przejście do współrzędnych biegunowych  $\varrho, \theta$  umożliwi znaczne uproszczenie wzorów (2.4) przy jednoczesnym wykorzystaniu następujących własności funkcji  $W(\varrho, \theta)$ :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} U(\varrho, -\theta) &= U(\varrho, \theta), & U(\varrho, \theta + \pi) &= -U(\varrho, \theta), \\ V(\varrho, -\theta) &= -V(\varrho, \theta), & V(\varrho, \theta + \pi) &= -V(\varrho, \theta). \end{aligned}$$

Podstawienia (2.3) we współrzędnych biegunowych  $\varrho, \theta$  wyrażają się następująco:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} z_1 &= \varrho_2 e^{i\theta_2}, & z_2 &= \varrho_1 e^{-i\theta_1}, \\ z_3 &= \varrho_1 e^{i\theta_1}, & z_4 &= \varrho_2 e^{-i\theta_2}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\beta_j t + \bar{\omega})^2 + n^2}{\beta_j}}, & \varrho_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\beta_j t - \bar{\omega})^2 + n^2}{\beta_j}}, \\ \theta_1 &= \arctg \frac{2\beta_j t + \bar{\omega}}{n} - \frac{\pi}{4}, & \theta_2 &= \arctg \frac{2\beta_j t - \bar{\omega}}{n} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Warto również zauważyć, że  $\varrho_{10} = \varrho_{20} = k/2\sqrt{\beta_j}$ .

Korzystając z własności (2.6) oraz (2.3)<sub>1</sub> można napisać następujące zależności:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} W(z_1) &= W(\varrho_2, \theta_2) = U(\varrho_2, \theta_2) + iV(\varrho_2, \theta_2), \\ W(z_2) &= W(\varrho_1, -\theta_1) = U(\varrho_1, \theta_1) - iV(\varrho_1, \theta_1), \\ W(z_3) &= W(\varrho_1, \theta_1) = U(\varrho_1, \theta_1) + iV(\varrho_1, \theta_1), \\ W(z_4) &= W(\varrho_2, -\theta_2) = U(\varrho_2, \theta_2) - iV(\varrho_2, \theta_2). \end{aligned}$$

Po podstawieniu (2.9) do (2.4), a następnie do (1.11) i wykonaniu zaznaczonych operacji otrzymuje się wzór określający  $j$ -tą składową wariacji przemieszczenia:

$$(2.10) \quad \sigma_{xj}^2(t) = \frac{B_j}{4m^2 \bar{\omega}^2 \beta_j} \left\{ \{U(\varrho_1, \theta_1) - U(\varrho_2, \theta_2) - e^{-nt} [U(\varrho_0, \theta_{10}) \times \right. \\ \times \cos(\beta_j t^2 + \bar{\omega}t) + V(\varrho_0, \theta_{10}) \sin(\beta_j t^2 + \bar{\omega}t) - U(\varrho_0, \theta_{20}) \cos(\beta_j t^2 - \bar{\omega}t) + \\ \left. - V(\varrho_0, \theta_{20}) \sin(\beta_j t^2 - \bar{\omega}t)]\}^2 + \{V(\varrho_1, \theta_1) - V(\varrho_2, \theta_2) - e^{-nt} [-U(\varrho_0, \theta_{10}) \times \right. \\ \times \sin(\beta_j t^2 + \bar{\omega}t) + V(\varrho_0, \theta_{10}) \cos(\beta_j t^2 + \bar{\omega}t) + U(\varrho_0, \theta_{20}) \sin(\beta_j t^2 - \bar{\omega}t) - \\ \left. - V(\varrho_0, \theta_{20}) \cos(\beta_j t^2 - \bar{\omega}t)]\}^2 \right\}$$

Analogicznie rozwiązuje się przypadek dużego tłumienia  $n > k$ . Oznaczając  $\bar{\omega} = \sqrt{n^2 - k^2}$ , funkcja impulsowa przedstawia się w następujący sposób:

$$(2.11) \quad h(t) = \frac{1}{\omega} e^{-nt} \operatorname{sh} \bar{\omega}t.$$

Stosując ten sam tok postępowania jak przy wyprowadzeniu zależności (2.10) całkę (1.11) z uwzględnieniem (2.11) sprowadzamy do postaci

$$(2.12) \quad \sigma_{xj}^2(t) = \frac{B_j}{4m^2 \bar{\omega}^2 \beta_j} \left\{ \{U(\varrho_1, \theta_1) - U(\varrho_2, \theta_2) - e^{-nt} [e^{-\bar{\omega}t} (U(\varrho_{10}, \theta_{10}) \times \right. \\ \times \cos \beta_j t^2 + V(\varrho_{10}, \theta_{10}) \sin \beta_j t^2) - e^{\bar{\omega}t} (U(\varrho_{20}, \theta_{20}) \cos \beta_j t^2 + V(\varrho_{20}, \theta_{20}) \sin \beta_j t^2)]\}^2 + \\ \left. + \{V(\varrho_1, \theta_1) - V(\varrho_2, \theta_2) - e^{-nt} [e^{-\bar{\omega}t} (V(\varrho_{10}, \theta_{10}) \cos \beta_j t^2 - U(\varrho_{10}, \theta_{10}) \sin \beta_j t^2) - \right. \\ \left. - e^{\bar{\omega}t} (V(\varrho_{20}, \theta_{20}) \cos \beta_j t^2 - U(\varrho_{20}, \theta_{20}) \sin \beta_j t^2)]\}^2 \right\},$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\beta_j^2 t^2 + (n + \bar{\omega})^2}{\beta_j}}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\beta_j^2 t^2 + (n - \bar{\omega})^2}{\beta_j}},$$

gdzie

$$(2.13) \quad \theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{2\beta_j t}{n + \bar{\omega}} - \frac{\pi}{4}, \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{2\beta_j t}{n - \bar{\omega}} - \frac{\pi}{4}.$$

Zależności (2.10) wraz z (2.8) w przypadku małego tłumienia, (2.12) i (2.13) przy dużym tłumieniu, przedstawiające zależności wariacji od czasu, stanowią rozwiązanie postawionego problemu.

## 3. Obliczenia numeryczne, Uwagi ogólne

Obliczenia numeryczne wykonano za pomocą maszyny cyfrowej. W celu uniknięcia przekazywania do pamięci maszyny tablic o dużej objętości oraz kłopotliwego interpolowania — posłużono się obliczaniem funkcji  $W(z)$  na podstawie znanych z analiz rozwinięć tej funkcji w szeregi i na ułamki nieskończone lub na podstawie odpowiednich równań różniczkowych. Metoda taka jest szybsza i dokładniejsza. W pracy do obliczeń wybrano rozwinięcie funkcji  $W(z)$  w szereg Taylora dla małych  $|z|$  oraz w szereg asymptotyczny dla dużych wartości  $|z|$ . Szeregi te przedstawiają się następująco:

dla  $\varrho < 2$

$$(3.1) \quad \begin{aligned} U(\varrho, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k \varrho^{2k+1}}{(2k+1)!!} \cos(2k+1)\theta, \\ V(\varrho, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k \varrho^{2k+1}}{(2k+1)!!} \sin(2k+1)\theta; \end{aligned}$$

dla  $\varrho > 2$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} U(\varrho, \theta) &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\varrho^2 \cos 2\theta} \sin(\varrho^2 \sin 2\theta) + \frac{1}{2\varrho} \cos \theta + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k \varrho^{2k-1}} \cos(2k-1)\theta, \\ V(\varrho, \theta) &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\varrho^2 \cos 2\theta} \cos(\varrho^2 \sin 2\theta) - \frac{1}{2\varrho} \sin \theta - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{2^k \varrho^{2k-1}} \sin(2k-1)\theta. \end{aligned}$$

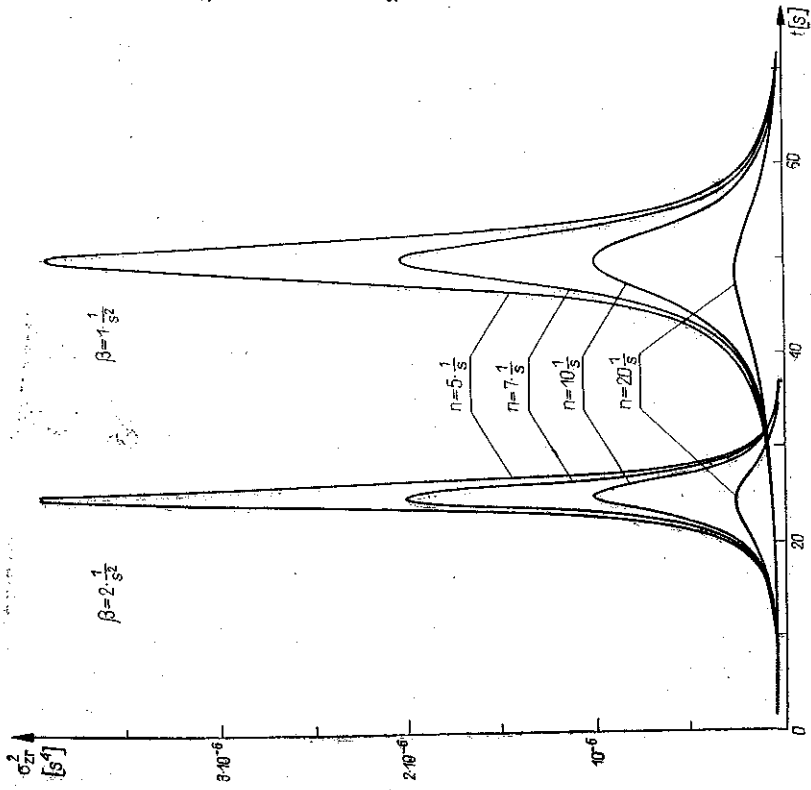
Należy jednak zaznaczyć, że szeregi asymptotyczne (3.2) są poprawne dla górnej półpłaszczyzny zespolonej, to jest dla  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Wzory (2.6) pozwalają wyznaczyć wartość funkcji  $W(z)$  w pozostałym sektorze. Ze względu na szybką zbieżność szeregów (3.1) w celu zapewnienia dokładności  $10^{-4}$  należy uwzględnić dla  $\varrho < 1$  sześć, a dla  $\varrho < 2$  trzynaście wyrazów szeregu. Dokładność szeregów asymptotycznych (3.2) w przedziale  $2 < \varrho < 3$  jest mała i wynosi  $10^{-2}$  przy ograniczeniu się do czterech składników. W miarę wzrostu  $\varrho$  dokładność szybko się poprawia osiągając rząd  $10^{-5}$  dla  $\varrho > 5$  przy uwzględnianiu pięciu wyrazów szeregu.

Operowanie wzorami (3.2) ma jednak inną niedogodność polegającą na tym, że dla  $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$  składnik wykładniczy  $W(z)$  przyjmuje duże wartości. Wielkość  $\sigma^2(t)$  otrzymuje się drogą odejmowania (2.10) dużych porównywalnych wielkości, co ze względu na skończoną dokładność względną ( $10^{-8}$ ) stosowanej maszyny prowadzi do znacznych niedokładności. Proste przekształcenie wzoru (2.10) w obszarze stosowalności wzorów asymptotycznych pozwala na wyodrębnienie, a następnie zredukowanie składników wykładniczych.

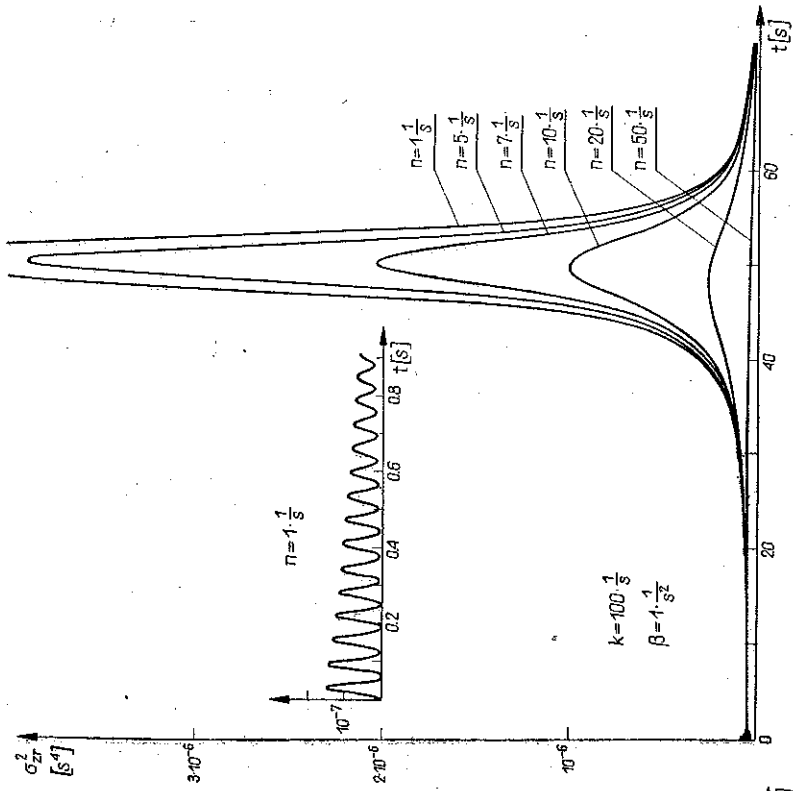
Do obliczeń przyjęto  $j = 1$  oraz

$$\sigma_{zr}^2(t) = \frac{4m^2}{B_1} \sigma_{x_1}^2(t).$$

Obliczenia  $\sigma_{zr}^2(t)$  wykonano dla ustalonego  $k = 100/s^2$  i przy zmieniających się  $n$  i  $\beta_1$ .



Rys. 1



Rys. 2

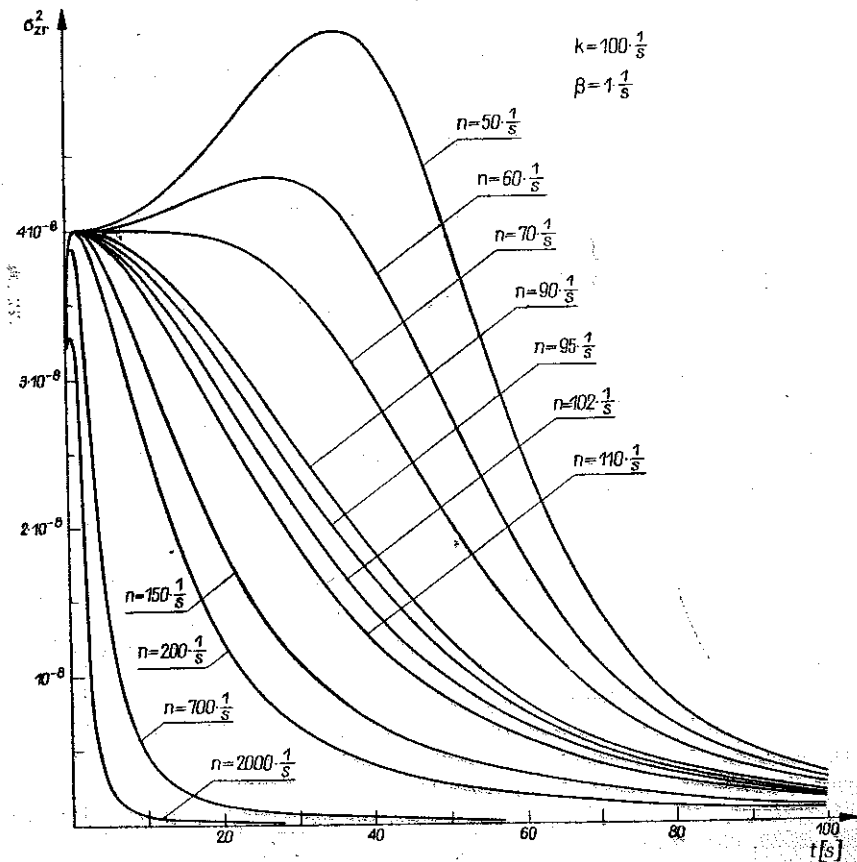


Rysunek 1 przedstawia wariancję przemieszczenia jako funkcji czasu w układzie oscylacyjnym dla  $\beta_1 = 1/s^2$ . Dla czasu  $t \approx \bar{\omega}/2\beta_1$  obserwuje się gwałtowny wzrost poziomu wariancji. Maksimum to w miarę wzrostu współczynnika tłumienia  $n$  zmniejsza się, jednocześnie przesuując się w kierunku mniejszych czasów. Jest ono wynikiem rezonansu między chwilową częstotliwością wymuszającą a częstotliwością własną układu.

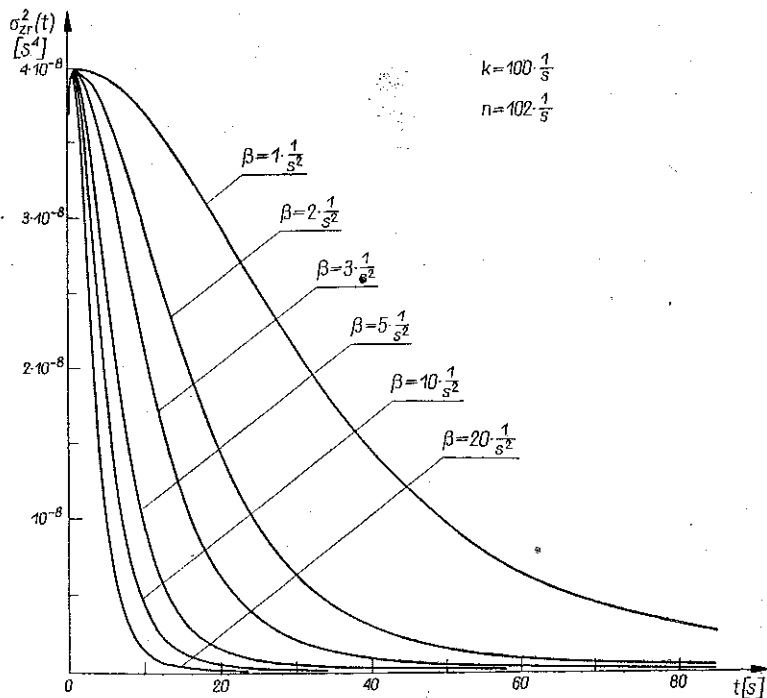
Dla małych czasów w wariancji pojawiają się wahania o częstotliwości  $2\bar{\omega}$ . Są one wynikiem deterministycznych warunków początkowych  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$  oraz faktu, że dla małych czasów  $K_{qq}(t_1, t_2) \cong K_{qq}(0, 0)$ . Wzór (1.3) redukuje się w tym przypadku do prostej zależności

$$\sigma_x^2(t) = \left[ \frac{1}{m} \int_0^t h(\tau) d\tau \right]^2 = \frac{\left[ e^{-nt} \sin \bar{\omega} t - \frac{\bar{\omega}}{k} \right]^2}{m^2 (\bar{\omega}^2 + k^2)},$$

gdzie  $\varphi = \arctg \bar{\omega}/n$ , z której wynika, że częstotliwość wahań wynosi ok.  $2\bar{\omega}$ . Można zatem sformułować wniosek, że dla małych czasów układ zachowuje się jak układ



Rys. 3



Rys. 4

o wejściu deterministycznym. Stwierdzenie to ma charakter ogólny i stosuje się do układów dowolnego rzędu.

Rysunek 2 przedstawia zmianę wariancji przy zmianie  $\beta_j$ . W miarę zmiany  $\beta_j$  maksimum przesuwa się w myśl zależności  $t \approx \omega/2\beta_j$  przy niemal niezmiennych jego wysokości. Potwierdza to postać wzoru (3.2) w połączeniu z (2.10), z którego wynika, że przy uwzględnieniu jednego wyrazu szeregu  $\sigma_{zr}^2(t) \sim \frac{1}{n^2}$ .

Rysunki 3 i 4 przedstawiają zależności wariancji  $\sigma_{zr}^2(t)$  dla układów aperiodycznych  $n > k$  obliczone na podstawie (2.12).

#### Literatura cytowana w tekście

1. F. M. LEWIS, *Vibration during acceleration through a critical speed*, Trans. ASME, **54** (1932), 253-261.
2. А. П. Филипов, *Вынужденные колебания линейной системы при прохождении через резонанс изменяющейся частотой*, Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1958.
3. А. П. Филипов, Е. Г. Голосков, *К вопросу о переходе через резонанс упругих систем*, Труды Харьковского политех. инст., серия инж.-физ., **14** (1958).
4. W. J. STRONGE, *Vibration due to an excitation with uniformly varying frequency*, J. Appl. Mech, **2**, 33, 462-463.
5. G. A. PIERSOL, *Power spectra measurement for spacecraft vibration data*, Spacecraft and Rockets, **12**, 4, 1613-1617.

6. Н. А. Николаенко, *Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций*, Изд. Машиностроение, Москва 1967, 318–320.
7. I. I. GICHMAN, A. W. SKOROSHOD, *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*, PWN, Warszawa 1968, 194–202.
8. В. Н. Фадеева, Н. М. Терентев, *Таблицы значений функции  $W(z) = e^{-z^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^z e^{x^2} dx \right)$  в комплексной области*, Гостехиздат, Москва 1954.
9. К. А. Карпов, *Таблицы функций  $W(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$  от комплексного аргумента*, Изд. АН СССР, Москва 1954.
10. К. А. Карпов, *Таблицы функций  $W(z) = \int_0^z e^{x^2} dx$  от комплексного аргумента*, Изд. АН СССР, Москва 1958.
11. C. W. MARTZ, *Tables of Complex Fresnel Integrals*, NASA Report SP-3010, D. C. Washington, 1964.

## Резюме

**КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ  
ВЫЗВАННЫЕ СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССОМ  
С РАВНОМЕРНО-ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТОЙ**

Работа посвящается случайным колебаниям, вынужденным силой являющейся стохастическим процессом. Вынуждение принято в виде суммы гармоник, со случайными амплитудами и фазами. Предположено, что амплитуда и фаза силы — нескоррелированные. Для анализа принята линейная система с одной степенью свободы с вязким демпфированием. Из предположения равномерной изменчивости частоты, вытекает, что корреляционная функция, таким образом, определенного процесса, имеет нестационарный характер, поэтому и перемещение является также нестационарным стохастическим процессом. Задача, решаемая в рамках корреляционной теории состоит в определенной дисперсии перемещения в качестве функции времени. Решения выражаются функциями вероятностей комплексного аргумента или родственными. Проведенные, численные расчеты позволяют открыть ряд интересных свойств временных процессов дисперсии. Наиболее характеристической чертой этих кривых является появление в осцилляционных системах острого пика для времени в котором произошло выравнивание частоты вынуждающего процесса с собственной частотой. Аналогично, как в определенном случае увеличение демпфирования, вызывает резкое понижение уровня дисперсии.

## Summary

**VIBRATION OF A LINEAR SYSTEM CAUSED BY A CHANCE PROCESS  
WITH UNIFORMLY VARYING FREQUENCY**

The present work is devoted to chance vibrations sustained by a force being a stochastic process. Forcing have been assumed in the form of a sum of harmonics with random amplitudes and phases. For the analysis a linear system has been taken, with one degree of freedom and viscotic damping. From the assumption of the uniform variability of frequency it results that the correla-

tional function of a process so defined is of a nonstationary character. Therefore, the displacement is also a nonstationary stochastic process. The problem, as solved within the framework of the correlation theory, consists of the determination of the variance of displacement as a function of time. The solution is expressed by functions of probability with a complex argument or related to it. The numerical calculations conducted enable to discover a number of interesting properties of the time courses of variance. The most marked feature of those curves is the occurrence of a sharp peak for time in the oscillating systems, in which equalization took place of the frequency forcing the process with the proper frequency. Analogously as in the deterministic case an increase of damping brings about an abrupt lowering of the level of variance.

*Praca wpłynęła do Redakcji dnia 25 listopada 1968 r.*

---