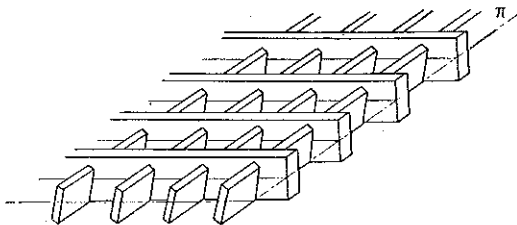


PEWNE ZAGADNIENIA STATYKI GĘSTYCH SIATEK RUSZTOWYCH

P. KLEMM (ŁÓDŹ), CZ. WOŹNIAK (WARSZAWA)

Wstęp

Równania gęstych i regularnych powierzchniowych dźwigarów siatkowych, oparte na zastosowaniu ciągłego (włóknistego) schematu obliczeniowego, były wyprowadzone w pracy [1]. Dla siatek o doskonale sztywnych węzłach podstawowymi niewiadomymi są przesunięcia i obroty węzłów, traktowane jako funkcje ciągłe, określone na płacie powierzchni, na którym ukształtowana jest siatka dźwigara. Jeżeli płat ten jest płaski, ugięcia rusztu są niewielkie w porównaniu z wysokością przekroju poprzecznego belek oraz ponadto jedna główna oś bezwładności każdego przekroju poprzecznego każdej z belek jest zawsze normalna do płaszczyzny, na której kształtujemy siatkę dźwigara, to podstawowe równania i warunki brzegowe teorii prowadzą do dwóch niezależnych zagadnień brzegowych: jednego dla przesunięć i obrotu węzłów w płaszczyźnie [2] oraz drugiego dla przesunięcia i obrotów węzłów spoza płaszczyzny dźwigara [3]. Oba powyższe zagadnienia, które można nazwać kolejno «tarczowym» i «płytowym», zostały rozwiązane dla wielu przypadków spotykanych w praktyce; wyniki większości prac z tego zakresu zebrano w monografii [4]. W tym opracowaniu podamy natomiast ogólną postać rozwiązania dla pewnych płaskich dźwigarów siatkowych, w których główne osie bezwładności przekrojów poprzecznych prętów tworzą kąty różne od zera i  $90^\circ$  z płaszczyzną, na której kształtujemy siatkę dźwigara. Fragment jednej z takich siatek przedstawia rys. 1. W pracy zakładamy, że rozpatrywane dźwigary siatkowe są układami liniowo-sprężystymi;

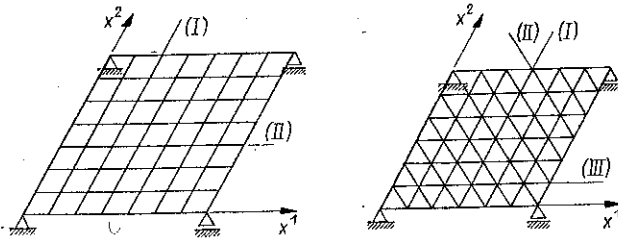


Rys. 1

posługujemy się tym samym wyłącznie w pełni zlinearyzowanym wariantem równań. Korzystając z [1] równania te zestawimy w p. 1, w którym omówimy również podstawowe oznaczenia. Problemy będące tematem pracy ograniczymy do zagadnień jednowymiarowych (pasma rusztowe, p. 2), podając dla tego przypadku w p. 3 postać rozwiązania ogólnego. Wreszcie w p. 4 rozpatrzymy niektóre przypadki szczególne, a uzyskane wyniki zobrazujemy w p. 5 przykładem.

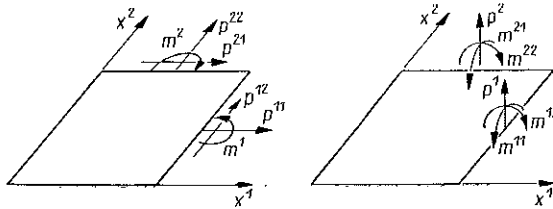
## 1. Podstawowe równania

Przedmiotem rozważań jest gęsty i regularny ruszt utworzony z dwóch lub trzech rodzin belek sztywno ze sobą połączonych. Osie ciężkości poszczególnych belek leżą na płaszczyźnie i tworzą w obszarze  $\pi$  tej płaszczyzny siatkę ułożoną z trójkątów lub prostokątów. Schematyczny zarys osi prętów takiej siatki przedstawia rys. 2. Płaszczyznę, na której kształtujemy siatkę dźwigara, parametryzujemy prostokątnym kartezyjskim układem współrzędnych  $x^K$  (1). Wskutek działania obciążeń w węzłach



Rys. 2

siatek dźwigara pojawiają się: 1) przesunięcia  $u^K$  w kierunku osi  $x^K$ , 2) obroty  $v$  w płaszczyźnie  $\pi$ , 3) przesunięcia  $u$  w kierunku normalnym do  $\pi$  (ugięcie dźwigara) oraz 4) obroty względem osi równoległych do osi  $x^K$  i przechodzących przez środek węzła. Przesunięcia te (zgodnie z przyjętym ciągłym schematem obliczeniowym siatki) przyjmujemy jako funkcje ciągłe parametrów  $x^1, x^2$  w obszarze  $\pi$ , mające ciągłe pochodne do tego rzędu włącznie, który występuje w przedstawionych poni-



Rys. 3

żej równaniach. Równania rozpatrywanego rusztu składają się z równań geometrycznych, równań równowagi i równań fizycznych. Równania geometryczne, wiążące składowe stanu przemieszczenia  $u, u_K, v, v_K$  ze składowymi stanu odkształcenia  $\gamma_{KS}, \gamma_K, \varkappa_{KS}, \varkappa_K$  mają postać [4]

$$(1.1) \quad \gamma_{KS} = u_{S,K} + \varepsilon_{SK} v, \quad \gamma_K = u_{,K} + \varepsilon_{KM} v^M, \\ \varkappa_{KS} = v_{S,K}, \quad \varkappa_K = v_{,K},$$

(1) Wszystkie wskaźniki oznaczone literami  $K, L, M, N, \dots$  przybierają wartości 1, 2; obowiązuje konwencja sumacyjna dla wskaźników znajdujących się na różnych poziomach. Pochodną oznaczamy przecinkiem, np.  $f_{,K} \equiv \partial f / \partial x^K$ .

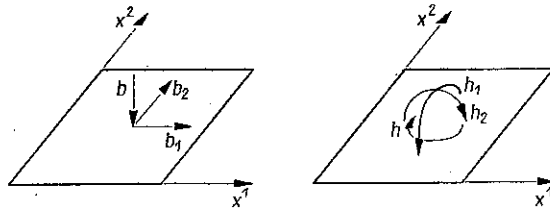
przy czym przez  $\varepsilon_{KL}$  oznaczono tutaj symbol Ricciego ( $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ ,  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$ ). «Tarczowy» stan napięcia jest określony tensorem napięć  $p_{KL}$  i wektorem momentowym napięć polarnych  $m^K$ , a «płytkowy» stan napięcia — tensorem napięć momentowych  $m_{KL}$  i wektorem napięć tnących  $p^K$ .

Wielkości te, które odnoszą się do jednostki pola przekroju ciągłego schematu obliczeniowego rusztu, zaznaczono na rys. 3. Oznaczając gęstość obciążeń jednostki płaszczyzny  $\pi$  siłami i momentami (rys. 4), otrzymamy równania równowagi postaci [4]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} p^{KL}{}_{,K} + b^L &= 0, & m^K{}_{,K} + \varepsilon_{KL} p^{KL} + h &= 0, \\ p^K{}_{,K} + p^{KL} u_{,KL} + b &= 0, & m^{KL}{}_{,K} - \delta^{LM} m^K u_{,MK} - \varepsilon_K{}^L p^K + h^L &= 0. \end{aligned}$$

Pomiędzy składowymi stanu napięcia i składowymi stanu odkształcenia zachodzą zależności [4]

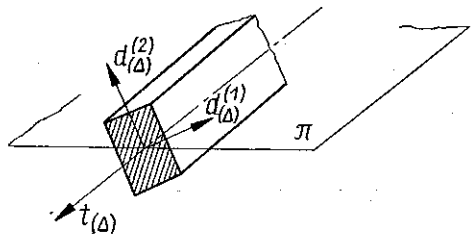
$$(1.3) \quad \begin{aligned} p^{KL} &= A^{KLMN} \gamma_{MN} + A^{KLM} \gamma_M, & m^K &= C^{KL} \varkappa_L + C^{MKN} \varkappa_{MN}, \\ m^{KL} &= C^{KLMN} \varkappa_{MN} + C^{KLM} \varkappa_M, & p^K &= A^{KL} \gamma_L + A^{MKN} \gamma_{MN}, \end{aligned}$$



Rys. 4

w których  $A^{KLMN}$ ,  $A^{KLM}$  itd. są składowymi tensorów sztywności sprężystej rusztu, zależnymi od geometrycznej i materiałowej struktury siatki rusztowej. Oznaczmy przez  $t_{(\Delta)}^K$  składowe wektorów jednostkowych stycznych do rodzin osi poszczególnych belek ( $\Delta = I, II$ , gdy ruszt składa się z dwóch rodzin belek oraz  $\Delta = I, II, III$ , gdy ruszt składa się z trzech rodzin belek) oraz przez  $d_{(\Delta)}^{(a)}$  ( $a = 1, 2$ ) wektory jednostkowe skierowane wzdłuż głównych centralnych osi bezwładności przekrojów poprzecznych belek rodziny ( $\Delta$ ) (rys. 5). Oznaczmy następnie przez  $d_{(\Delta)}^{(a)K}$  składowe wektorów, które są rzutami wektorów  $d_{(\Delta)}^{(a)}$  na płaszczyznę  $\pi$  oraz przez  $d_{(\Delta)}^{(a)}$  — rzuty wektorów  $d_{(\Delta)}^{(a)}$  na kierunek normalny do  $\pi$ . Wprowadzimy następnie wielkości:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} R^{(\Delta)} &\equiv \frac{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}}{l_{\Delta}}, & S^{(\Delta)} &\equiv \frac{E_{(\Delta)} C_{(\Delta)}}{l_{\Delta}}, \\ R_{(a)}^{(\Delta)} &\equiv \frac{12 E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}^{(a)}}{l_{\Delta} l_{\Delta}^2}, & S_{(a)}^{(\Delta)} &\equiv \frac{E_{(\Delta)} J_{(\Delta)}^{(a)}}{l_{\Delta}}, \end{aligned}$$



Rys. 5

w których  $E_{(A)}$  jest modułem sprężystości podłużnej izotropowego materiału belek rodziny  $A$ ,  $C_{(A)}$  sztywnością skrętną,  $l_{(A)}$  rozstawem węzłów na belkach rodziny  $(A)$ ,  $\bar{l}$  rozstawem prętów tej rodziny,  $A_{(A)}$ ,  $J_{(A)}^{(a)}$ ,  $\bar{J}_{(A)}^{(a)}$  — kolejno polem przekroju, momentem bezwładności przekroju poprzecznego belki rodziny  $(A)$  względem osi, wzdłuż której jest skierowany wektor  $\mathbf{d}_{(A)}^{(a)}$ , oraz momentem bezwładności względem osi do niej prostopadłej. Korzystając ze wzorów wyprowadzonych w pracy [1] dla składowych tensorów sztywności sprężystej, otrzymamy wzory

$$\begin{aligned}
 A^{KLMN} &= \sum_A t_{(A)}^K t_{(A)}^M \left( t_{(A)}^L t_{(A)}^N R^{(A)} + \sum_{a=1}^2 d_{(A)}^{(a)L} d_{(A)}^{(a)N} R_{(a)}^{(A)} \right), \\
 A^{KLM} &= \sum_A t_{(A)}^K t_{(A)}^M \sum_{a=1}^2 d_{(A)}^{(a)L} d_{(A)}^{(a)} R_{(a)}^{(A)}, \\
 A^{KL} &= \sum_A t_{(A)}^K t_{(A)}^L \sum_{a=1}^2 d_{(A)}^{(a)} d_{(A)}^{(a)} R_{(a)}^{(A)}; \\
 (1.5) \quad C^{KLMN} &= \sum_A t_{(A)}^K t_{(A)}^M \left( t_{(A)}^L t_{(A)}^N S^{(A)} + \sum_{a=1}^2 d_{(A)}^{(a)L} d_{(A)}^{(a)N} S_{(a)}^{(A)} \right), \\
 C^{KLM} &= \sum_A t_{(A)}^K t_{(A)}^M \sum_{a=1}^2 d_{(A)}^{(a)L} d_{(A)}^{(a)} S_{(a)}^{(A)}, \\
 C^{KL} &= \sum_A t_{(A)}^K t_{(A)}^L \sum_{a=1}^2 d_{(A)}^{(a)} d_{(A)}^{(a)} S_{(a)}^{(A)}.
 \end{aligned}$$

Gdy jedna z głównych centralnych osi bezwładności każdego przekroju poprzecznego każdej rodziny belek jest normalna lub styczna do  $\pi$ , to

$$(1.6) \quad A^{KLM} = C^{KLM} = 0,$$

a układ równań (1.1)–(1.3) rozpada się na niezależny układ dla zagadnienia «tarczowego» (nieznanymi funkcjami są  $u_K$ ,  $v$ ,  $\gamma_{KS}$ ,  $\gamma_K$ ,  $p^{KL}$  i  $m^K$ ) oraz niezależny układ dla zagadnienia «plytowego» (nieznanymi funkcjami są  $u$ ,  $v_P$ ,  $\varkappa_{KS}$ ,  $\gamma_K$ ,  $m^{KL}$  i  $p^K$ ).

Rugując składowe stanu odkształcenia z (1.3) za pomocą (1.1), a następnie korzystając z równań równowagi (1.2), otrzymamy następujący układ sześciu równań dla sześciu składowych stanu przemieszczenia  $u$ ,  $u_K$ ,  $v$  i  $v_K$ :

$$\begin{aligned}
 & [A^{KLMN} (u_{N,M} + \varepsilon_{NM} v) + A^{KLM} (u_{,M} + \varepsilon_{MN} v^N)]_{,K} + b^L = 0, \\
 & [C^{KM} v_{,M} + C^{NMK} v_{N,M}]_{,K} + \varepsilon_{KL} [A^{KLMN} (u_{N,M} + \varepsilon_{NM} v) + \\
 & \quad + A^{KLM} (u_{,M} + \varepsilon_{MN} v^N)] + h = 0, \\
 (1.7) \quad & [A_{KL} (u_{,L} + \varepsilon_{LM} v^M) + A^{MNK} v_{M,N}]_{,K} + [A^{KLMN} (u_{N,M} + \\
 & \quad + \varepsilon_{NM} v) + A^{KLM} (u_{,M} + \varepsilon_{MN} v^N)] u_{,KL} + b = 0, \\
 & [C^{KLMN} v_{N,M} + C^{KLM} v_{,M}]_{,K} - \delta^{LM} [C^{KM} v_{,M} + C^{NMK} v_{N,M}] \times \\
 & \quad \times u_{,MK} - \varepsilon_K^L [A^{KL} (u_{,L} + \varepsilon_{LM} v^M) + A^{NMK} v_{N,M}] + h^L = 0.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego polega na znalezieniu sześciu składowych stanu przemieszczenia, które w obszarze  $\pi$  spełniają układ równań różniczkowych (1.7), a na brzegu tego obszaru spełniają sześć warunków brzegowych. Postać tych warunków zależy od sposobu podparcia i obciążenia brzegu rusztu. Po wyznaczeniu składowych stanu przemieszczenia (przesunięć i obrotów węzłów siatki) wyznaczamy siły i momenty wewnętrzne w poszczególnych prętach siatki, korzystając ze znanych wzorów mechaniki budowy [4], gdzie podano także dokładne wyprowadzenia przytoczonych tu wzorów.

## 2. Jednokierunkowo obciążone pasmo rusztowe

W dalszym ciągu założymy, że rozpatrywane przez nas siatki są jednorodne [tj. wszystkie składowe (1.5) są stałymi w każdym kartezjańskim układzie współrzędnych], tworzą pasmo rusztowe o brzegach  $x^1 = 0$  i  $x^1 = L$ , a ponadto sposób podparcia brzegów pasma i sposób obciążenia pozwala na traktowanie wszystkich funkcji występujących w równaniach (1.1)-(1.3) jako zależnych tylko od współrzędnej  $x^1$ .

Równania geometryczne (1.1) sprowadzą się wtedy do równań

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \gamma_{11} &= u_{1,1}, & \gamma_{12} &= u_{2,1} - v, \\ \gamma_{21} &= v, & \gamma_{22} &= 0, \\ \gamma_1 &= u_{,1} + v^2, & \kappa_{22} &= 0, \\ \gamma_2 &= -v^1, & \kappa_{12} &= v_{2,1}, \\ \kappa_{11} &= v_{1,1}, & \kappa_1 &= v_{,1}, \\ \kappa_{21} &= 0, & \kappa_2 &= 0. \end{aligned}$$

Warunki równowagi będą miały postać następującą:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} p^{11}_{,1} + b^1 &= 0, & p^{12}_{,1} + b^2 &= 0, & m^1_{,1} + p^{12} - p^{21} + h &= 0, \\ p^1_{,1} + b &= 0, & m^{11}_{,1} + p^2 + h^1 &= 0, & m^{12}_{,1} - p^1 + h^2 &= 0. \end{aligned}$$

Natomiast związki pomiędzy składowymi stanu napięcia i odkształcenia zachowują swą postać (1.3). Po wypisaniu tych ostatnich w formie rozwiniętej zgodnie z konwencją sumacyjną otrzymamy

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p^{11} &= A^{1111} \gamma_{11} + A^{1112} \gamma_{12} + A^{1121} \gamma_{21} + A^{111} \gamma_1 + A^{112} \gamma_2, \\ p^{12} &= A^{1211} \gamma_{11} + A^{1212} \gamma_{12} + A^{1221} \gamma_{21} + A^{121} \gamma_1 + A^{122} \gamma_2, \\ p^{21} &= A^{2111} \gamma_{11} + A^{2112} \gamma_{12} + A^{2121} \gamma_{21} + A^{211} \gamma_1 + A^{212} \gamma_2, \\ p^{22} &= A^{2211} \gamma_{11} + A^{2212} \gamma_{12} + A^{2221} \gamma_{21} + A^{221} \gamma_1 + A^{222} \gamma_2; \\ m^1 &= C^{11} \kappa_1 + C^{111} \kappa_{11} + C^{121} \kappa_{12} \\ m^{11} &= C^{1111} \kappa_{11} + C^{1112} \kappa_{12} + C^{111} \kappa_1, \\ m^{12} &= C^{1211} \kappa_{11} + C^{1212} \kappa_{12} + C^{121} \kappa_1, \\ m^{21} &= C^{2111} \kappa_{11} + C^{2112} \kappa_{12} + C^{211} \kappa_1, \\ m^{22} &= C^{2211} \kappa_{11} + C^{2212} \kappa_{12} + C^{221} \kappa_1; \\ p^1 &= A^{11} \gamma_1 + A^{12} \gamma_2 + A^{111} \gamma_{11} + A^{121} \gamma_{12} + A^{211} \gamma_{21}, \\ p^2 &= A^{21} \gamma_1 + A^{22} \gamma_2 + A^{112} \gamma_{11} + A^{122} \gamma_{12} + A^{212} \gamma_{21}. \end{aligned}$$

Układ równań (2.1)–(2.3) musi być spełniony dla  $0 \leq x^1 \leq L$ . Poszukiwane składowe stanu przemieszczenia i napięcia muszą ponadto spełniać po sześć warunków brzegowych na każdym z brzegów:  $x^1 = 0$  oraz  $x^1 = L$ .

Gdy brzeg jest doskonale sztywno utwierdzony, mamy

$$(2.4) \quad u = 0, u_1 = 0, u_2 = 0; \quad v = 0, v_1 = 0, v_2 = 0.$$

Dla brzegu swobodnie podpartego i nieobciążonego mamy

$$(2.5) \quad u = 0, m^{12} = 0, v = 0; \quad v_1 = 0, u_2 = 0, u_1 = 0$$

lub

$$(2.6) \quad u = 0, m^{12} = 0, v = 0; \quad m^{11} = 0, p^{12} = 0, p^{11} = 0$$

w zależności czy węzły brzegowe są, czy też nie są usztywnione na przesunięcie w płaszczyźnie  $u_1, u_2$  dźwigara oraz obrót  $v_1$  względem osi równoległych do osi  $x^1$ . W przypadku brzegu swobodnego (nieodpartego) i nieobciążonego mamy

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u &= 0, m^{12} = 0, m^{11} = 0, \\ v &= 0, p^{12} = 0, p^{11} = 0, \end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned} u &= 0, m^{12} = 0, v_1 = 0, \\ v &= 0, u_2 = 0, u_1 = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie ogólne układu równań (2.1)–(2.3) zależy od dwunastu stałych całkowania, które wyznaczymy z dwunastu warunków brzegowych, przyjętych np. w jednej z postaci (2.4)–(2.7) dla  $x^1 = 0$  oraz  $x^1 = L$ . W następnym punkcie pracy podamy ogólną postać rozwiązania układu równań (2.1)–(2.3).

### 3. Rozwiązanie ogólne

Składowe stanu napięcia  $p^{11}, p^{12}$  i  $p^1$  wyznaczymy bezpośrednio z równań równowagi (2.2)<sub>1,2,4</sub> otrzymując (1)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} p^{11}(x) &= - \int_0^x b^1(\xi) d\xi + \bar{p}^{11}, & \bar{p}^{11} &\equiv p^{11}(0), \\ p^{12}(x) &= - \int_0^x b^2(\eta) d\eta + \bar{p}^{12}, & \bar{p}^{12} &\equiv p^{12}(0), \\ p^1(x) &= - \int_0^x b(\xi) d\xi + \bar{p}^1, & \bar{p}^1 &\equiv p^1(0). \end{aligned}$$

Korzystając z (3.1)<sub>3</sub> oraz (2.2) wyznaczymy także składową  $m^{12}$  stanu napięcia

$$(3.2) \quad m^{12}(x) = \int_0^x \left[ - \int_0^\eta b(\xi) d\xi - h^2(\eta) \right] d\eta + \bar{p}^1 x + \bar{m}^{12}, \quad \bar{m}^{12} \equiv m^{12}(0).$$

(1) Symbol  $x^1$  zastępujemy wszędzie dalej symbolem  $x$ .

Składowe (3.1) i (3.2) będziemy więc traktować dalej jako znane funkcje, określone z dokładnością do czterech stałych  $\bar{p}^{11}$ ,  $\bar{p}^{12}$ ,  $\bar{p}^1$  i  $\bar{m}^{12}$ . Korzystając z odpowiednich równań geometrycznych (2.1) i z zależności (2.3) dla składowych  $p^{11}$ ,  $p^{12}$ ,  $p^1$  i  $m^{12}$ , otrzymamy kolejno

$$(3.3) \quad \begin{aligned} A^{1111} u_{1,1} + A^{1112} (u_{2,1} - v) + A^{1121} v + A^{1111} (u_{1,1} + v_2) - A^{112} v_1 &= p^{11}, \\ A^{1212} (u_{2,1} - v) + A^{1211} u_{1,1} + A^{1221} v + A^{121} (u_{1,1} + v_2) - A^{122} v_1 &= p^{12}, \\ A^{11} (u_{1,1} + v_2) - A^{12} v_1 + A^{111} u_{1,1} + A^{121} (u_{2,1} - v) + A^{211} v &= p^1, \\ C^{1212} v_{2,1} + C^{1211} v_{1,1} + C^{121} v_{,1} &= m^{12}. \end{aligned}$$

Jednocześnie z pozostałych równań równowagi (2.2)<sub>3</sub> oraz odpowiednich związków (2.1) i (2.3) otrzymamy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} C^{11} v_{,11} - A^{2121} v - A^{2111} u_{1,1} - A^{2112} (u_{2,1} - v) + \\ + C^{111} v_{1,11} + C^{121} v_{2,11} - A^{211} (u_{1,1} + v_2) - A^{212} v_1 &= -h - p^{12}, \\ (C^{1111} v_{1,1} + C^{1112} v_{2,1} + C^{111} v_{,1})_{,1} + A^{21} (u_{1,1} + v_2) - A^{22} v_1 + \\ + A^{112} u_{1,1} + A^{122} (u_{2,1} - v) + A^{212} v &= -h^1. \end{aligned}$$

Równania (3.3) i (3.4) stanowią układ sześciu równań różniczkowych dla sześciu składowych stanu przemieszczenia  $u$ ,  $u_k$ ,  $v$  i  $v_k$ ; funkcje występujące po prawych stronach równań (3.3) są określone równościami (3.1) i (3.2). Wyznaczając z (3.3)<sub>4</sub> pochodną  $v_{2,1}$  otrzymamy

$$(3.5) \quad v_{2,1} = \frac{1}{C^{1212}} (-C^{1211} v_{1,1} - C^{121} v_{,1} + m^{12}).$$

Wyrażając z pierwszych trzech równań (3.3) funkcje  $u_{,1}$ ,  $u_{1,1}$  i  $u_{2,1}$ , przez  $v$ ,  $v_1$  i  $v_2$ , uzyskamy kolejno

$$(3.6) \quad \begin{aligned} u_{,1} &= -v_2 + \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \right. \\ &+ \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \left. \right)^{-1} \left[ \left( \frac{A^{12}}{A^{11}} + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{122} - A^{112} A^{1212}}{A} + \right. \right. \\ &+ \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{112} - A^{1111} A^{122}}{A} \left. \right) v_1 - \left( \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}}{A} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}}{A} + \frac{A^{211}}{A^{11}} \right) v + \\ &\left. + \frac{p^1}{A^{11}} - \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1212} - p^{12} A^{1112}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1211} - p^{12} A^{1111}}{A} \right], \\ u_{1,1} &= \frac{1}{A} [p^{11} A^{1212} - p^{12} A^{1112} + (A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}) v - \\ &\quad - (A^{1112} A^{122} - A^{1212} A^{112}) v_1 + (A^{1112} A^{121} - A^{1212} A^{111}) (u_{1,1} + v_2)], \\ u_{2,1} &= v + \frac{1}{A} [p^{12} A^{1111} - p^{11} A^{1211} + (A^{1211} A^{1121} - A^{1111} A^{1221}) v + \\ &\quad + (A^{1111} A^{122} - A^{1211} A^{112}) v_1 + (A^{1211} A^{111} - A^{1111} A^{121}) (u_{1,1} + v_2)]. \end{aligned}$$

gdzie oznaczono

$$(3.7) \quad A \equiv A^{1111} A^{1212} - A^{1112} A^{1211},$$

przy czym z warunku dodatniej określności formy kwadratowej przedstawiającej energię sprężystą układu wynika  $A > 0$  [4]. Podstawiając wyrażenia na  $v_{2,1}$ ,  $u_{1,1} + v_2$ ,  $u_{1,1}$  i  $u_{2,1} - v$  zgodnie z (3.5) oraz (3.6) do równań (3.4), dochodzimy do układu dwóch równań różniczkowych dla dwóch funkcji  $v(x)$  i  $v_1(x)$ .

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(3.8) \quad k_{00} \equiv C^{11} - \frac{(C^{121})^2}{C^{1212}}, \quad k_{01} = k_{10} \equiv C^{111} - \frac{C^{121} C^{1211}}{C^{1212}},$$

$$k_{11} \equiv C^{1111} - \frac{C^{1112} C^{1211}}{C^{1212}},$$

$$l_{00} \equiv -A^{2121} - \frac{A^{1211}}{A} \left[ (A^{1112} A^{1221} - A^{1212} A^{1121} - \right.$$

$$\left. - (A^{1112} A^{121} - A^{1212} A^{111})) \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{1212} A^{111}}{A} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{1111} A^{121}}{A} \right)^{-1} \left( \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}}{A} + \right.$$

$$\left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}}{A} + \frac{A^{211}}{A^{11}} \right) \left. \right] - \frac{A^{2112}}{A} \times$$

$$\times (A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}) + \left( A^{211} + A^{2112} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right) \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{1212} A^{111}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{1111} A^{121}}{A} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left( \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{111}}{A} + \frac{A^{211}}{A^{11}} \right),$$

$$l_{01} = -\frac{A^{2111}}{A^{11}} \left[ (A^{112} A^{1212} - A^{1112} A^{122}) + (A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}) \times \right.$$

$$\times \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left( \frac{A^{12}}{A^{11}} + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{122} - A^{112} A^{1212}}{A} + \right.$$

$$\left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{112} - A^{122} A^{1111}}{A} \right) - A^{2112} \frac{A^{122} A^{1111} - A^{112} A^{1211}}{A} -$$

$$- \left( A^{211} + A^{2112} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right) \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \times$$



$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{A^{12}}{A^{11}} + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{122} - A^{112} A^{1212}}{A} + \right. \\
& \left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{112} - A^{122} A^{1111}}{A} \right) - A^{212}, \\
I_{10} = & A^{212} - \frac{A^{21} A^{211}}{A^{11}} + \left( A^{112} - \frac{A^{21} A^{111}}{A^{11}} \right) \frac{A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}}{A} - \\
& - \left( A^{112} - \frac{A^{21} A^{111}}{A^{11}} \right) \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} \times \\
& \times \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \times \\
& \times \left( \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}}{A} + \right. \\
& \left. + \frac{A^{211}}{A^{11}} \right) + \left( A^{122} - \frac{A^{21}}{A^{11}} A^{121} \right) \frac{A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}}{A} - \\
& - \left( A^{122} - \frac{A^{21}}{A^{11}} A^{121} \right) \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \times \\
& \times \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \times \\
& \times \left( \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}}{A} + \right. \\
& \left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}}{A} + \frac{A^{211}}{A^{11}} \right), \\
I_{11} = & \left( \frac{A^{21} A^{12}}{A^{11}} - A^{22} \right) + \left( A^{112} - \frac{A^{21} A^{111}}{A^{11}} \right) \frac{A^{112} A^{1212} - A^{112} A^{122}}{A} + \\
& + \left( A^{112} - \frac{A^{21} A^{111}}{A^{11}} \right) \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \times \right. \\
& \times \left. \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \times \\
& \times \left( \frac{A^{12}}{A^{11}} + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{122} - A^{112} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{112} - A^{122} A^{1111}}{A} \right) - \\
& - \left( A^{122} - \frac{A^{21} A^{121}}{A^{11}} \right) \frac{A^{122} A^{1111} - A^{112} A^{1211}}{A} + \left( A^{122} - \frac{A^{21}}{A^{11}} A^{121} \right) \times \\
& \times \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \right. \\
& \left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \left( \frac{A^{12}}{A^{11}} + \right. \\
& \left. + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{122} - A^{112} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{112} - A^{122} A^{1111}}{A} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_0 = & \frac{A^{2111}}{A} \left\{ (p^{11} A^{1212} - p^{12} A^{1112}) + (A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}) \times \right. \\
 & \times \left[ 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right]^{-1} \times \\
 & \times \left( \frac{p^1}{A^{11}} - \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1212} - p^{12} A^{1112}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1211} - p^{12} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \Big\} + \\
 & + \frac{A^{2112} (p^{12} A^{1111} - p^{11} A^{1211})}{A} + \left( A^{211} + A^{2112} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right) \times \\
 & \times \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left( \frac{p^1}{A^{11}} - \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1212} - A^{1112} p^{12}}{A} + \right. \\
 & \left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1211} - p^{12} A^{1111}}{A} \right) - \frac{C^{121}}{C^{1212}} m^{2,1-h-p^{12}}, \\
 f_1 = & - \left( \frac{C^{1112}}{C^{1212}} m^{2,1} \right) - \frac{A^{21}}{A^{11}} p^1 - h^1 - \left( A^{112} - \frac{A^{21} A^{111}}{A^{11}} \right) \times \\
 & \times \frac{p^{11} A^{1212} - A^{1112} p^{12}}{A} - \frac{(A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212})}{A} \times \\
 & \times \left( A^{112} - \frac{A^{21} A^{111}}{A^{11}} \right) \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \right. \\
 & \left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \left( \frac{p^1}{A^{11}} - \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1212} - p^{12} A^{1112}}{A} + \right. \\
 & \left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1211} - p^{12} A^{1111}}{A} \right) - \left( A^{122} - \frac{A^{21}}{A^{11}} A^{121} \right) \frac{A^{1111} p^{12} - A^{1211} p^{11}}{A} \\
 & - \left( A^{122} - \frac{A^{21}}{A^{11}} A^{121} \right) \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \left( 1 + \right. \\
 & \left. + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \times \\
 & \times \left( \frac{p^1}{A^{11}} - \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1212} p^{11} - A^{1112} p^{12}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} p^{11} - A^{1111} p^{12}}{A} \right),
 \end{aligned}$$

równania na funkcje  $v$  i  $v_1$  przyjmą zwięzłą postać

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad & k_{00} v_{,11} + l_{00} v + k_{01} v_{1,11} + l_{01} v_1 = f_0, \\
 & k_{11} v_{1,11} + l_{11} v_1 + k_{10} v_{,11} + l_{10} v = f_1.
 \end{aligned}$$

Współczynniki powyższego układu równań, zgodnie ze wzorami (1.5), spełniają nierówności

$$k_{00} > 0, k_{11} > 0, l_{00} < 0, l_{11} < 0;$$

pozostałe współczynniki mogą być dodatnie, ujemne lub równe zero. Równanie charakterystyczne układu (3.9) ma postać

$$(3.10) \quad a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$(3.11) \quad \begin{aligned} a &\equiv k_{00} k_{11} - k_{10} k_{01}, \\ b &\equiv k_{00} l_{11} + l_{00} k_{11} - k_{10} l_{01} - k_{01} l_{10}, \\ c &\equiv l_{00} l_{11} - l_{10} l_{01}, \end{aligned}$$

przy czym  $a > 0$ ,  $b < 0$  oraz  $c > 0$ . Jak wykazemy w p. 4, wyróżnik równania (3.10) może być dodatni, ujemny lub równy zero. Gdy wyróżnik  $\Delta = b^2 - 4ac$  jest dodatni, to ze względu na  $-b > \sqrt{\Delta} > 0$ , otrzymamy cztery różne pierwiastki równania charakterystycznego (3.10), wynoszące

$$(3.12) \quad \left. \begin{aligned} \lambda_{(1)} \\ \lambda_{(2)} \end{aligned} \right\} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}, \quad \left. \begin{aligned} \lambda_{(3)} \\ \lambda_{(4)} \end{aligned} \right\} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

Oznaczmy przez  $v^*$  i  $v_1^*$  całki szczególne układu (3.9). Rozwiązanie ogólne układu (3.9) ma wtedy postać

$$(3.13) \quad \begin{aligned} v &= Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} + v^*, \\ v_1 &= A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x} + C_1 e^{\beta x} + D_1 e^{-\beta x} + v_1^*, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.14) \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}, \quad \beta \equiv \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

są liczbami rzeczywistymi, dodatnimi. Stałe  $A_1, \dots, D_1$  w (3.13) dają się w przypadku ogólnym wyrazić przez stałe  $A, \dots, D$ ; po podstawieniu (3.13) np. do równania (3.9) otrzymamy bowiem

$$(3.15) \quad \begin{aligned} A_1 (a^2 k_{01} + l_{01}) + A (a^2 k_{00} + l_{00}) &= 0, \\ B_1 (a^2 k_{01} + l_{01}) + B (a^2 k_{00} + l_{00}) &= 0, \\ C_1 (\beta^2 k_{01} + l_{01}) + C (\beta^2 k_{00} + l_{00}) &= 0, \\ D_1 (\beta^2 k_{01} + l_{01}) + D (\beta^2 k_{00} + l_{00}) &= 0. \end{aligned}$$

Gdy  $\Delta = 0$ , to oznaczając przez

$$(3.16) \quad \gamma \equiv \sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

dodatnią liczbę rzeczywistą, mamy  $\lambda_{(1)} = \lambda_{(2)} = \gamma$ ,  $\lambda_{(3)} = \lambda_{(4)} = -\gamma$ . Rozwiązanie układu (3.9) ma wtedy postać

$$(3.17) \quad \begin{aligned} v &= Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x} + Cxe^{\gamma x} + Dxe^{-\gamma x} + v^*, \\ v_1 &= A_1 e^{\gamma x} + B_1 e^{-\gamma x} + C_1 xe^{\gamma x} + D_1 xe^{-\gamma x} + v_1^*. \end{aligned}$$

Podstawiając (3.17) np. do (3.9), otrzymamy następujący związek stałych całkowania  $A_1, \dots, D_1$  ze stałymi  $A, \dots, D$ :

$$(3.18) \quad \begin{aligned} A_1(k_{01}\gamma^2 + l_{01}) + C_1 2k_{01}\gamma + A(k_{00}\gamma^2 + l_{00}) + C 2k_{00}\gamma &= 0, \\ B_1(k_{01}\gamma^2 + l_{01}) - D_1 2k_{01}\gamma + B(k_{00}\gamma^2 + l_{00}) - D 2k_{00}\gamma &= 0, \\ C_1(k_{01}\gamma^2 + l_{01}) + C(k_{00}\gamma^2 + l_{00}) &= 0, \\ D_1(k_{01}\gamma^2 + l_{01}) + D(k_{00}\gamma^2 + l_{00}) &= 0. \end{aligned}$$

Gdy wreszcie  $\Delta < 0$ , to po wprowadzeniu dodatnich liczb rzeczywistych  $\mu$  i  $\nu$

$$(3.19) \quad \mu \equiv 1/2 \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - \Delta}}{a}}, \quad \nu \equiv 1/2 \sqrt{\frac{-\Delta}{a(-b + \sqrt{b^2 - \Delta})}},$$

pierwiastki równania charakterystycznego przedstawimy w postaci

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \lambda_{(1)} &= -(\mu - i\nu), & \lambda_{(3)} &= \mu - i\nu, \\ \lambda_{(2)} &= -(\mu + i\nu), & \lambda_{(4)} &= \mu + i\nu, \end{aligned}$$

a rozwiązanie układu (3.9) ma wtedy postać

$$(3.21) \quad \begin{aligned} v &= Ae^{\mu x} \sin \nu x + Be^{\mu x} \cos \nu x + Ce^{-\mu x} \sin \nu x + De^{-\mu x} \cos \nu x + v^*, \\ v_1 &= A_1 e^{\mu x} \sin \nu x + B_1 e^{\mu x} \cos \nu x + C_1 e^{-\mu x} \sin \nu x + D_1 e^{-\mu x} \cos \nu x + v_1^*, \end{aligned}$$

przy czym między stałymi całkowania zachodzą związki

$$(3.22) \quad \begin{aligned} A_1(k_{01}\mu^2 - k_{01}\nu^2 + l_{01}) - B_1 2k_{01}\mu\nu + A(k_{00}\mu^2 - k_{00}\nu^2 + l_{00}) - B 2k_{00}\mu\nu &= 0, \\ A_1 2k_{01}\mu\nu + B_1(k_{01}\mu^2 - k_{01}\nu^2 + l_{01}) + A 2k_{00}\mu\nu + B(k_{00}\mu^2 - k_{00}\nu^2 + l_{00}) &= 0, \\ C_1(k_{01}\mu^2 - k_{01}\nu^2 + l_{01}) + D_1 2k_{01}\mu\nu + C(k_{00}\mu^2 - k_{00}\nu^2 + l_{00}) + D 2k_{00}\mu\nu &= 0, \\ -C_1 2k_{01}\mu\nu + D_1(k_{01}\mu^2 - k_{01}\nu^2 + l_{01}) - C 2k_{00}\mu\nu + & \\ + D(k_{00}\mu^2 - k_{00}\nu^2 + l_{00}) &= 0. \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu ogólnej postaci (zależnej od czterech niezależnych stałych) funkcji  $v(x)$  i  $v_1(x)$  możemy obliczyć funkcję  $v_2(x)$  na podstawie (3.5):

$$(2.23) \quad v_2(x) = \frac{1}{C^{1212}} \int_0^x (-C^{1211} v_{1,1} - C^{121} v_{,1} + m^{12}) dx + \bar{v}_2, \quad \bar{v}_2 \equiv v_2(0).$$

Występująca tu funkcja  $m^{12}$  jest już określona za pomocą wzoru (3.2). Funkcję ugięcia  $u(x)$  obliczymy następnie ze wzoru (3.6) otrzymując

$$(3.24) \quad u(x) = \int_0^x \left\{ -v_2 + \left( 1 + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{121} - A^{111} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{111} - A^{121} A^{1111}}{A} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{A^{12}}{A^{11}} + \right. \right. \right.$$

$$(3.24) \quad \begin{aligned} & + \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{122} - A^{112} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{112} - A^{1111} A^{122}}{A} \Big) v_1 - \\ & - \left( \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}}{A} + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{A^{1211} A^{1121} - A^{1221} A^{1111}}{A} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{A^{211}}{A^{11}} \right) v + \frac{p^1}{A^{11}} \frac{A^{111}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1212} - p^{12} A^{1112}}{A} + \\ & \quad \left. + \frac{A^{121}}{A^{11}} \frac{p^{11} A^{1211} - p^{12} A^{1111}}{A} \right] d\zeta + \bar{u}, \\ & \bar{u} \equiv u(0). \end{aligned}$$

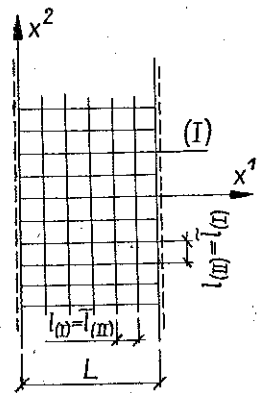
Dwie ostatnie składowe stanu przemieszczenia, tj.  $u_1$  i  $u_2$ , otrzymamy korzystając z (3.6):

$$(3.25) \quad \begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{A} \int_0^x [p^{11} A^{1212} - p^{12} A^{1112} + (A^{1112} A^{1221} - A^{1121} A^{1212}) v - \\ & \quad - (A^{1112} A^{122} - A^{1212} A^{112}) v_1 + (A^{1112} A^{121} - \\ & \quad - A^{1212} A^{111}) (u_{,1} + v_2)] d\zeta + \bar{u}_1, \quad \bar{u}_1 \equiv u_1(0), \\ u_2(x) &= \int_0^x \left\{ v + \frac{1}{A} [p^{12} A^{1111} - p^{11} A^{1211} + (A^{1211} A^{1121} - A^{1111} A^{1221}) v + \right. \\ & \quad \left. + (A^{1111} A^{122} - A^{1211} A^{112}) v_1 + (A^{1211} A^{111} - \right. \\ & \quad \left. - A^{1111} A^{121}) (u_{,1} + v_2) \right\} d\zeta + \bar{u}_2, \quad \bar{u}_2 \equiv u_2(0). \end{aligned}$$

Funkcje  $p^{11}$ ,  $p^{12}$  i  $p^1$  są tu określone wzorami (3.1). Obliczając  $v(x)$  i  $v_1(x)$ , w zależności od znaku wyróżnika  $\Delta$  z jednego ze wzorów (3.13), (3.17) lub (3.21), oraz korzystając kolejno ze wzorów (3.23), (3.24) i (3.25) otrzymamy ogólne rozwiązanie postawionego zagadnienia. Rozwiązanie to zależy od dwunastu stałych całkowania  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $\bar{v}_2$ ,  $\bar{u}$ ,  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$ ,  $\bar{p}^{11}$ ,  $\bar{p}^{12}$ ,  $\bar{p}^1$  i  $\bar{m}^{12}$ , które wyznaczymy z sześciu warunków na brzegu  $x=0$  oraz sześciu warunków na brzegu  $x=L$ . Po wyznaczeniu składowych stanu przemieszczenia obliczamy w znany sposób składowe stanu napięcia [4].

#### 4. Przypadki szczególne

Rozpatrzmy najpierw pasmo rusztowe utworzone z dwóch rodzin belek, których osie są kolejno równoległe do osi układu współrzędnych  $x^1$ ,  $x^2$ . Zakładamy, że odległości węzłów siatki tak w kierunku osi  $x^1$  jak i osi  $x^2$  są takie same (siatka jest utworzona z identycznych prostokątów, rys. 6) oraz że stałe są sztywności przekrojów poprzecznych każdej z rodzin belek. Ze wzorów



Rys. 6

(1.5) wynika wtedy, że jedynymi niezerowymi składowymi tensorów sztywności sprężystej mogą być tylko poniższe:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & A^{1111}, A^{1212}, A^{2121}, A^{2222}; \\ & A^{11}, A^{22}; \\ & C^{1111}, C^{1212}, C^{2121}, C^{2222}; \\ & C^{11}, C^{22}; \\ & A^{212}, A^{121}; C^{212}, C^{121}. \end{aligned}$$

Współczynniki układu równań (3.9) zgodnie z (3.8) wynoszą

$$(4.2) \quad \begin{aligned} k_{00} &= C^{11} - \frac{(C^{121})^2}{C^{1212}}, \quad k_{10} = k_{01} = 0, \quad k_{11} = C^{1111}; \\ l_{00} &= -A^{2121}, \quad l_{01} = -l_{10} = A^{212}, \quad l_{11} = -A^{22}; \\ f_0 &\equiv -\left(\frac{C^{121}}{C^{1212}} m^{12}, {}_1+h+p^{12}\right), \quad f_1 \equiv -h^1, \end{aligned}$$

a współczynniki (3.11) równania charakterystycznego są równe

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a &= C^{1111} \left[ C^{11} - \frac{(C^{121})^2}{C^{1212}} \right], \\ b &= -A^{22} \left[ C^{11} - \frac{(C^{121})^2}{C^{1212}} \right] - A^{2121} C^{1111}, \\ c &= A^{22} A^{2121} + (A^{212})^2. \end{aligned}$$

W zależności od znaku wyróżnika  $\Delta = b^2 - 4ac$  otrzymamy funkcje obrotów węzłów siatki  $v(x)$  i  $v_1(x)$  w jednej z postaci (3.13), (3.17) lub (3.21), w których stałe są powiązane odpowiednio wzorami (3.15), (3.18) lub (3.22). Wzory (3.23), (3.24) i (3.25) dla pozostałych składowych stanu przemieszczenia redukują się do

$$(4.4) \quad \begin{aligned} v_2(x) &= \frac{1}{C^{1212}} \int_0^x (-C^{121} v_{,1} + m^{12}) d\zeta + \bar{v}_2, \quad \bar{v}_2 = v_2(0); \\ u(x) &= \int_0^x \left[ -v_2 + \left(1 - \frac{(A^{121})^2}{A^{11} A^{1212}}\right)^{-1} \left(\frac{p^1}{A^{11}} - \frac{p^{12} A^{121}}{A^{11} A^{1212}}\right) \right] d\zeta + \bar{u}, \\ &\quad \bar{u} \equiv u(0); \\ u_1(x) &= \frac{1}{A^{1111}} \int_0^x p^{11} d\zeta + \bar{u}_1, \quad \bar{u}_1 \equiv u_1(0); \\ u_2(x) &= \int_0^x \left[ v + \frac{1}{A^{1212}} (p^{12} - A^{121} (u_{,1} + v_2)) \right] d\zeta + \bar{u}_2, \quad \bar{u}_2 \equiv u_2(0). \end{aligned}$$

Otrzymane powyżej rozwiązanie upraszcza się, gdy kąt, jaki tworzy jedna z głównych osi bezwładności przekrojów poprzecznych belek równoległych do osi  $x$ , jest równy zeru (rys. 7). Bezpośredni rachunek wykazuje, że spośród wielkości wyszczególnionych w (4.1) równe zeru są  $A^{121}$  i  $C^{121}$ .

Współczynniki równania charakterystycznego (2.10) wynoszą więc

$$(4.5) \quad a = C^{1111} C^{11}, \quad b = -A^{22} C^{11} - A^{2121} C^{1111}, \quad c = A^{22} A^{2121} + (A^{212})^2,$$

a wyróżnik tego równania można napisać w postaci

$$(4.6) \quad \Delta = b^2 - 4ac = (A^{22} C^{11} - A^{2121} C^{1111})^2 - 4C^{1111} C^{11} (A^{212})^2.$$

Ponieważ zawsze  $C^{1111} C^{11} (A^{212})^2 > 0$ , gdy tylko  $A^{212} \neq 0$ , oraz możliwy jest przypadek, w którym  $A^{22} C^{11} - A^{2121} C^{1111} = 0$  (co wykazuje się bezpośrednim rachunkiem, którego tu nie przytaczamy), przeto wyróżnik  $\Delta$  może przyjmować wartości dodatnie, ujemne oraz równe zeru, co przyjęliśmy bez dowodu w p. 3. Postać funkcji  $v(x)$  i  $v_1(x)$  określamy w zależności od znaku wyróżnika  $\Delta$ ; pozostałe składowe stanu przemieszczenia otrzymamy przyjmując  $C^{121} = A^{121} = 0$  we wzorze (4.4):

$$(4.7) \quad \begin{aligned} v_2(x) &= \frac{1}{C^{1212}} \int_0^x m^{12} d\xi + \bar{v}_2, \\ u(x) &= \int_0^x \left( \frac{p^1}{A^{11}} - v_2 \right) d\xi + \bar{u}, \\ u_1(x) &= \frac{1}{A^{1111}} \int_0^x p^{11} d\xi + \bar{u}_1, \\ u_2(x) &= \int_0^x \left( v + \frac{1}{A^{1212}} p^{12} \right) d\xi + \bar{u}_2. \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższe funkcje można teraz wyznaczyć niezależnie od postaci funkcji  $v(x)$  oraz  $v_1(x)$ . Jeżeli natomiast kąt, jaki tworzy z płaszczyzną  $\pi$  jedna z głównych osi bezwładności przekrojów poprzecznych belek równoległych do osi  $x^2$ , jest równy zeru (rys. 8), to spośród wielkości wymienionych w (4.1) równymi zeru są  $A^{212}$  i  $C^{212}$ . Tym samym zgodnie z (3.8) mamy

$$(4.8) \quad \begin{aligned} k_{00} &= C^{11} - \frac{(C^{121})^2}{C^{1212}}, \quad l_{00} = -A^{2121}, \\ k_{11} &= C^{1111}, \quad l_{11} = -A^{22}, \\ l_{01} &= l_{10} = k_{10} = k_{01} = 0, \end{aligned}$$

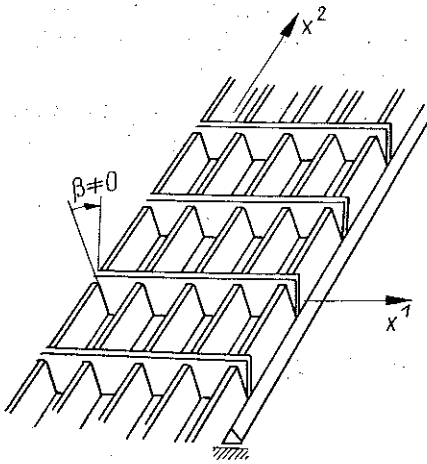
a układ (3.9) rozpada się na dwa niezależne od siebie równania różniczkowe drugiego rzędu. Całki ogólne tych równań wynoszą

$$(4.9) \quad v = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} + \frac{2\alpha}{k_{00}} \int_0^x f_0 e^{\alpha \xi} d\xi e^{\alpha x} - \frac{2\alpha}{k_{00}} \int_0^x f_0 e^{-\alpha \xi} d\xi e^{-\alpha x},$$

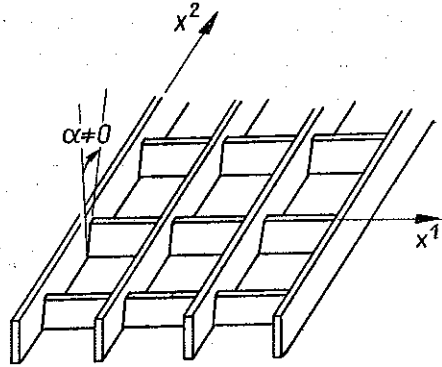
$$v_1 = C_1 e^{\beta x} + D_1 e^{-\beta x} + \frac{2\beta}{k_{11}} \int_0^x f_1 e^{\beta \xi} d\xi e^{\alpha x} - \frac{2\beta}{k_{11}} \int_0^x f_1 e^{-\beta \xi} d\xi e^{-\beta x},$$

gdzie

$$(4.10) \quad \alpha \equiv \sqrt{-\frac{l_{00}}{k_{00}}} = \sqrt{\frac{A^{2121}}{C_{11} - \frac{(C^{121})^2}{C^{1212}}}}, \quad \beta \equiv \sqrt{-\frac{l_{11}}{k_{11}}} = \sqrt{\frac{A^{22}}{C^{111}}}$$



Rys. 7



Rys. 8

są liczbami dodatnimi. Pozostałe składowe stanu przemieszczenia są równe

$$(4.11) \quad v_2(x) = \frac{1}{C^{1212}} \int_0^x (-C^{121} v_{,1} + m^{12}) d\xi + \bar{v}_2, \quad \bar{v}_2 = v_2(0);$$

$$u(x) = \int_0^x \left[ -v_2 + \left( 1 - \frac{(A^{121})^2}{A^{11} A^{1212}} \right)^{-1} \left( \frac{p^1}{A^{11}} - \frac{p^{12} A^{121}}{A^{11} A^{1212}} \right) \right] d\xi + \bar{u},$$

$$\bar{u} = u(0);$$

$$u_1(x) = \frac{1}{A^{1111}} \int_0^x p^{11} d\xi + \bar{u}_1, \quad \bar{u}_1 = u_1(0);$$

$$u_2(x) = \int_0^x \left\{ v + \frac{1}{A^{1212}} [p^{12} - A^{121} (u_{,1} + v_2)] \right\} d\xi + \bar{u}_2, \quad \bar{u}_2 = u_2(0)$$

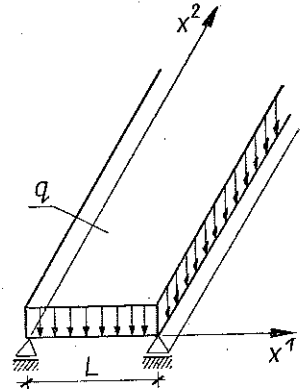
zależąc od funkcji  $v(x)$ .



Dla pasma rusztowego (utworzonego tak z dwóch jak i z trzech rodzin belek), w którym jedna główna oś bezwładności każdego przekroju poprzecznego każdej z belek jest prostopadła do płaszczyzny  $\pi$ , odnoszą się równości (1.6); otrzymujemy wtedy niezależne zagadnienie brzegowe «tarczowe» dla funkcji  $v, u_1, u_2$  oraz niezależne zagadnienie brzegowe «płytkowe» dla funkcji  $v_1, v_2, u$ . Szczegółowe omówienie tych zagadnień (również dla rusztowych pasm niejednorodnych) podano w monografii [4] (por. także [5]).

### 5. Przykład

Jako prosty przykład zastosowania wyłożonej teorii wyznaczmy stan przemieszczenia pasma rusztowego o siatce przedstawionej na rys. 8, swobodnie podpartego na brzegach  $x^1 = 0$  i  $x^1 = L$  oraz równomiernie obciążonego na całej powierzchni (rys. 9). Przyjmujemy, że przekroje belek w kierunku osi  $x^1$  są takie same jak w kierunku osi  $x^2$ , a siatka rusztu jest utworzona z kwadratów (tj.  $l_I = l_{II} = l$ , rys. 6). Oznaczmy przez  $\alpha$  kąt jednej z głównych osi bezwładności belek równoległych do osi  $x^1$  z płaszczyzny  $\pi$  (rys. 8). Współczynniki wymienione w (4.8) zgodnie z (1.5) wynoszą



Rys. 9

$$(5.1) \quad k_{00} = (\cos^2 ak + \sin^2 a) S_{(2)}^I - \frac{[\sin a \cos a (k-1) S_{(2)}^I]^2}{(\sin^2 ak + \cos^2 a) S_{(2)}^I},$$

$$k_{11} = S^I, \quad l_{00} = -R_{(1)}^{II}, \quad l_{11} = -R_{(2)}^{II},$$

a funkcje  $f_0$  i  $f_1$  przyjmują postać:

$$f_0 = -\frac{\sin a \cos a (k-1)}{(\sin^2 ak + \cos^2 a)} m^{12,1},$$

$$f_1 = 0, \quad k = S_{(1)}^I / S_{(2)}^I.$$

Układ (3.9) rozpada się na dwa niezależne od siebie równania różniczkowe drugiego rzędu, których całkami ogólnymi są funkcje

$$(5.2) \quad v = Ae^{ax} + Be^{-ax} + \frac{2a \sin a \cos a (k-1) q}{k_{00} (\sin^2 ak + \cos^2 a) a} \{e^{ax} [L/2 (e^{ax} - 1) - xe^{ax} + 1/a] + e^{-ax} [L/2 (e^{-ax} - 1) - xe^{-ax} + 1/ae^{-ax} - 1/a],$$

$$v_1 = c_1 e^{\beta x} + D_1 e^{-\beta x}.$$

Następnie z (3.1)<sub>3</sub> oraz (2.5) wyznaczamy postać  $p^1(x)$ . Otrzymaną funkcję podstawiamy do wzoru (3.2), w wyniku czego znajdziemy

$$m^{12} = -q \frac{x^2}{2} + q \frac{L}{2} x.$$

Stałe całkowania  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$  i  $D_1$  określamy z warunków brzegowych (2.5) otrzymując ostatecznie następujące wzory:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} A &= -(e^{aL} - e^{-aL})^{-1} \frac{2a \sin a \cos a (k-1) q}{k_{00} (\sin^2 ak + \cos^2 a) a} \{e^{aL} [L/2 (e^{aL} - 1) - \\ &\quad - Le^{aL} + 1/a e^{aL} - 1/a] + e^{-aL} [L/2 (e^{-aL} - 1) - Le^{-aL} + 1/a e^{-aL} - 1/a]\}, \\ B &= -(e^{-aL} - e^{aL})^{-1} \frac{2a \sin a \cos a (k-1) q}{k_{00} (\sin^2 ak + \cos^2 a) a} \{e^{aL} [L/2 (e^{aL} - 1) - \\ &\quad - Le^{aL} + 1/a e^{aL} - 1/a] + e^{-aL} [L/2 (e^{-aL} - 1) - Le^{-aL} + 1/a e^{-aL} - 1/a]\}; \\ C_1 &= 0, \quad D_1 = 0. \end{aligned}$$

Składową całkowitego obrotu  $v_2$  wyznaczmy z (4.11) uwzględniając jeden z warunków brzegowych (2.5):

$$(5.4) \quad \begin{aligned} v_2(x) &= \frac{-\sin a \cos a (k-1)}{\sin^2 ak + \cos^2 a} \int_0^x v_{,1} d\xi + \\ &\quad + \frac{q}{(\sin^2 ak + \cos^2 a) S_{(2)}^I} \int_0^x \left( \frac{L}{2} \xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) d\xi. \end{aligned}$$

Pozostałe składowe stanu przemieszczenia otrzymamy ze wzoru (4.11)<sub>2, 3, 4</sub> i (2.5):

$$(5.5) \quad \begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \left[ \frac{q(L/2 - \xi) (\sin^2 at + \cos^2 a)}{(\cos^2 a + \sin^2 a)^2 t R_{(2)}^I} - v_2 \right] d\xi, \quad t = R_{(1)}^I / R_{(2)}^I; \\ u_2(x) &= \int_0^x \left[ v - \frac{\sin a \cos a (t-1)}{\sin^2 at + \cos^2 a} (u_{,1} + v_2) \right] d\xi, \quad u_1(x) = 0. \end{aligned}$$

W podobny sposób przebiega rozwiązywanie i innych zadań w oparciu o wyprowadzone w tej pracy wzory.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Theory of fibrous media* (II), Arch. Mech. Stos., 6, 17 (1965), 777-799.
2. Cz. WOŹNIAK, *Load carrying structures of dense lattice type*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966), 581-597.
3. Cz. WOŹNIAK, *Bending end stability problems of plates with lattice structure*, Arch. Mech. Stos., 6, 18 (1966), 781-796.
4. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe. Podstawy teorii i przykłady obliczeń*, PWN, w druku.
5. B. BOCZKAJ, H. HAT, *Jednokierunkowo obciążone pasma rusztowe*, Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej, Budownictwo, z. 21 (1967), 17-35.

## Резюме

## НЕКОТОРАЯ ЗАДАЧА, КАСАЮЩАЯСЯ СТАТИКИ ГУСТЫХ СЕТЧАТЫХ БАЛОК

Уравнения густых и регулярных поверхностных сетчатых балок основывается на применении непрерывной (волоконистой) расчетной схемы, были выведены в [1]. Для сеток с идеально жесткими узлами, основными неизвестными являются перемещения и обороты узлов, рассматриваемые как непрерывные функции, определенные на плоскости поверхности, на котором формируется сетка балки. Если плоскость является плоской, прогибы ростверка (балки) являются небольшими, по сравнению с высотой поперечного сечения балок и кроме того одна главная ось инерции каждого поперечного сечения каждой из балок всегда нормальна к плоскости, на которой формируем сетку балки, тогда основные уравнения и краевые условия теории приводят к двум независимым краевым условиям: одного к перемещению и обороту узлов в плоскости балки [2] и ко второму для перемещения и оборотов узлов вне плоскости балки [3].

Обе вышеуказанные задачи, которые можно, последовательно, назвать „дисковой” и „пластинчатой”, были решены для многих случаев встречаемых на практике. Результаты большинства работ в этой области даются в монографии [4]. В настоящей же работе дается общая форма решения для некоторых плоских сетчатых балок, где главные оси инерции поперечных сечений образуют разные углы и углы равные  $90^\circ$  плоскостью, на которой формируется сетка балки. Фрагмент одной из таких сеток дается на рис. 1.

В работе предположено, что рассматриваемые сетчатые балки являются линейно упругими системами, использующими тот же самый линеаризованный вполне вариант уравнений. Используя из [1] эти уравнения сопоставленные в п. 1, в котором обсуждаются также основные значения.

Вопросы, являющиеся темой работы, ограничиваются одномерными задачами (балочные полосы п. 2), приводя для этого случая в п. 3 формы общего решения.

Наконец, в п. 4 рассматриваются особые случаи, а полученные результаты показаны в форме примера в п. 5.

## Summary

## SOME PROBLEMS OF THE STATICS OF DENSE GRIDS

The equations of dense and regular surface grid girders, based upon the application of a continuous (fibrous) calculations scheme, were derived in [1]. For grids with perfectly rigid nodes the principal unknowns are the displacements and rotations of the nodes, considered as continuous functions definite upon the surface plane on which the girder grid is formed. If the plane is flat, then the bending of the girder is small in comparison with the height of the cross-section of the beams, and furthermore, one main axis of inertia of each cross-section of each beam is always normal to the plane upon which we are forming the girder grid. In such case, the basic equations and the boundary conditions of the theory lead to two independent boundary problems: one for the displacements and rotations of nodes in the plane of the girder, [2], the other for the displacements and rotations of nodes out of the girder plane, [3].

The above two problems, which can be designated as «disk» and «plate» respectively, have been solved for many cases found in practice; the results of the majority of these works have been collected in the monograph [4]. In this elaboration, however, the general solution is presented for certain plane grid girders, in which the main axes of inertia of the cross-sections of the bars form

angles other than ninety degrees with the plane upon which the girder grid is formed. A fragment of one of these grids is illustrated in Fig. 1.

In this paper it has been assumed that the grid girders considered constitute linear-elastic systems thereby using only the fully linearized variant of the equations. Utilizing (1), these equations are compiled in Sec. 1, where the principal designations are also described.

The problems comprising the subject of this paper have been restricted to the one-dimensional problems (grid bands, Sec. 2), presenting for this case in Sec. 3 the form of the general solution. Finally, in Sec. 4 some particular cases are considered, and the results obtained are illustrated with an example in Sec. 5.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA  
i INSTYTUT MATEMATYCZNY  
UNIwersytetu WARSZAWSKIEGO

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 października 1968 r.*