

O PEWNYM PROBLEMIE NIESTACJONARNYCH DRGAŃ POWŁOK  
POD WPLYWEM OBCIĄŻEŃ PRZYPADKOWYCH

BOGDAN SKALMIERSKI, ERNEST CZOGAŁA (GLIWICE)

Wstęp

Analiza zachowania się układów sprężystych pod działaniem obciążeń losowych jest jednym z podstawowych problemów dynamiki statystycznej, której metody można podzielić na dwie zasadnicze grupy: metody korelacyjne oparte na wykorzystaniu związków między funkcjami korelacyjnymi i wzajemnymi funkcjami korelacyjnymi «wejścia» (np. obciążenia) i «wyjścia» (np. przemieszczenia, naprężenia itp.) oraz metody równań kinetycznych opisujących zmianę rozkładu prawdopodobieństwa wielkości losowych w czasie [3].

Dość obszernie zastosowanie znalazły metody korelacyjne jako szczególnie efektywne dla układów sprężystych liniowych (jak również dla szeregu układów nieliniowych). Zastosowanie tych metod przy obciążeniach będących procesami stacjonarnymi dla prętów płyt i powłok można znaleźć w pracach [3, 5, 6 i 7].

Analiza niestacjonarnego zachowania się układu pod wpływem stacjonarnego wymuszenia dla najprostszego układu (oscylator harmoniczny) została przeprowadzona przez CAUGHEYA i STUMPEA. W pracy [9] CAUGHEY podał metodę (rozwinętą przez PETERSONA i PULLENA [4]) wyznaczenia niestacjonarnego zachowania się układu w przypadku niestacjonarnego wymuszenia. Metoda ta została równolegle zastosowana przez BOŁOTINA w teorii wytrzymałości sejsmicznej [3].

Jak wiadomo w przypadku ogólnym dla pełnej charakterystyki probabilistycznej procesów trzeba znać wielowymiarowe funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa tych procesów lub pełny układ wspólnie ograniczonych momentów funkcji przypadkowych [3].

Ze względu na złożoność wyników ograniczono się w naszych rozważaniach do wyznaczania momentów rzędu pierwszego i drugiego na «wyjściu» układu, co przy założeniu normalności jest pełną charakterystyką probabilistyczną lub niepełną (charakteryzującą np. rozrzut funkcji) dla procesów, których rozkład nie jest normalny.

## Wykaz ważniejszych oznaczeń

- $E$  moduł sprężystości materiału powłoki,  
 $\nu$  współczynnik Poissona,  
 $\rho$  gęstość materiału powłoki,  
 $\delta$  grubość powłoki,  
 $R$  promień krzywizny powłoki,  
 $L$  długość powłoki,  
 $b$  współczynnik tłumienia drgań powłoki,  
 $q$  obciążenie,  
 $u, v, w$  składowe przemieszczeń.

## 1. Zagadnienie przypadkowych drgań niestacjonarnych powłok pod wpływem losowych wymuszeń stacjonarnych

Rozważania nasze dotyczyć będą powłok walcowych cienkościennych. Równania różniczkowe opisujące model takiego układu są następujące [2]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} G_w u(\xi, \varphi, t) &= \Phi_u w(\xi, \varphi, t), \\ G_w v(\xi, \varphi, t) &= \Phi_v w(\xi, \varphi, t), \end{aligned}$$

$$\frac{E\delta}{R^2(1-\nu^2)} \Omega w(\xi, \varphi, t) = G_w \left[ q(\xi, \varphi, t) - \rho\delta \frac{\partial^2 w(\xi, \varphi, t)}{\partial t^2} - 2b\rho\delta \frac{\partial w(\xi, \varphi, t)}{\partial t} \right],$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Omega &= \nu(1+\nu) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} \left\{ 1 - c^2 \left[ (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\} - \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left\{ 1 - c^2 \left[ (2-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\}^2 - \\ &\quad - \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c^2 \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\} + G_w(1+c^2 A^4), \\ \Phi_u &= \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} - c^2 \left[ (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \right\} - \\ &\quad - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c^2 \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \right\}, \\ \Phi_v &= \nu \left\{ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} - \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} - c^2 \left[ (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

przy czym

$$V^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Składowe przemieszczeń powłoki zamkniętej zamocowanej przegubowo można wyznaczyć przy pomocy funkcji Greena [2].

W niniejszej pracy ograniczono się do wyznaczania momentów drugiego rzędu funkcji przypadkowych przemieszczeń i ich wariancji. Dla obciążeń będących procesami stochastycznymi czasowo-przestrzennymi można napisać

$$\begin{aligned}
 \langle w(\xi_1, \varphi_1, t_1) w(\xi_2, \varphi_2, t_2) \rangle &= R^4 \int_0^l \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} w^{(1)}(\xi_1, \varphi_1, x_1, \psi_1, t_1 - \tau_1) \times \\
 &\quad \times w^{(1)}(\xi_2, \varphi_2, x_2, \psi_2, t_2 - \tau_2) \langle q(x_1, \psi_1, \tau_1) \times \\
 &\quad \times q(x_2, \psi_2, \tau_2) \rangle dx_1 d\psi_1 dx_2 d\psi_2 d\tau_1 d\tau_2, \\
 (1.2) \quad \langle u(\xi_1, \varphi_1, t_1) u(\xi_2, \varphi_2, t_2) \rangle &= R^4 \int_0^l \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} u^{(1)}(\xi_1, \varphi_1, x_1, \psi_1, t_1 - \tau_1) \times \\
 &\quad \times u^{(1)}(\xi_2, \varphi_2, x_2, \psi_2, t_2 - \tau_2) \langle q(x_1, \psi_1, \tau_1) \times \\
 &\quad \times q(x_2, \psi_2, \tau_2) \rangle dx_1 d\psi_1 dx_2 d\psi_2 d\tau_1 d\tau_2, \\
 \langle v^{(1)}(\xi_1, \varphi_1, t_1) v(\xi_2, \varphi_2, t_2) \rangle &= R^4 \int_0^l \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} v^{(1)}(\xi_1, \varphi_1, x_1, \psi_1, t_1 - \tau_1) \times \\
 &\quad \times v^{(1)}(\xi_2, \varphi_2, x_2, \psi_2, t_2 - \tau_2) \langle q(x_1, \psi_1, \tau_1) \times \\
 &\quad \times q(x_2, \psi_2, \tau_2) \rangle dx_1 d\psi_1 dx_2 d\psi_2 d\tau_1 d\tau_2,
 \end{aligned}$$

gdzie  $w^{(1)}$ ,  $v^{(1)}$ ,  $u^{(1)}$  są odpowiednio funkcjami Greena dla przemieszczeń promieniowych, stycznych i wzdłużnych [1]. Dla małego tłumienia ( $b_{mn} < 1$ ) przyjmują one postać [1]

$$\begin{aligned}
 w^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, \tau) &= \frac{2}{\pi LRQ\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{1}{\omega_{mn}} \times \\
 &\quad \times e^{-n_{mn}\tau} \sin \bar{\omega}\tau \sin \frac{m\pi\xi}{l} \cos n(\varphi - \psi) \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
 (1.3) \quad u^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, \tau) &= \frac{2}{\pi LRQ\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\Phi_{umn}}{G_{wmn}} \frac{1}{\omega_{mn}} \times \\
 &\quad \times e^{-n_{mn}\tau} \sin \bar{\omega}\tau \cos \frac{m\pi\xi}{l} \cos n(\varphi - \psi) \sin \frac{m\pi x}{l}, \\
 v^{(1)}(x, \psi, \xi, \varphi, \tau) &= \frac{2}{\pi LRQ\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\Phi_{vmn}}{G_{wmn}} \frac{1}{\omega_{mn}} \times \\
 &\quad \times e^{-n_{mn}\tau} \sin \bar{\omega}\tau \sin \frac{n\pi\xi}{l} \sin n(\varphi - \psi) \sin \frac{m\pi x}{l},
 \end{aligned}$$

przy czym

$$n_{mn} = b_{mn} a_{mn}, \quad \bar{\omega} = a_{mn} \sqrt{1 - b_{mn}^2},$$

gdzie  $a_{mn}$  jest częstością drgań własnych powłoki:

$$a_{mn} = \sqrt{\frac{E_0}{R^2(1-\nu^2)\rho} \frac{\Omega_{mn}}{G_{wmn}}},$$

a  $\Omega_{mn}$ ,  $G_{wmn}$ ,  $\Phi_{vmn}$ ,  $\Phi_{umn}$  są wielomianami uzyskanymi z równań (1.1).

Wielkość  $\langle q(x_1, \psi_1, \tau_1) q(x_2, \psi_2, \tau_2) \rangle$  oznacza funkcję korelacji obciążenia promieniowego.

W szczególnym przypadku funkcja korelacyjna obciążenia może być przedstawiona w postaci

$$(1.4) \quad \langle q(x_1, \psi_1, \tau_1) q(x_2, \psi_2, \tau_2) \rangle = q(x_1, \psi_1, \tau_1) q(x_2, \psi_2, \tau_2) \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle.$$

Dla tak przedstawionej funkcji otrzymamy

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \langle w(\xi, \varphi, t_1) w(\xi, \varphi, t_2) \rangle &= R^4 \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} w^{(1)}(x_1, \psi_1, \xi, \varphi, t_1 - \tau_1) \times \\ &\quad \times w^{(1)}(x_2, \psi_2, \xi, \varphi, t_2 - \tau_2) q(x_1, \psi_1, \tau_1) \times \\ &\quad \times q(x_2, \psi_2, \tau_2) \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle dx_1 d\psi_1 dx_2 d\psi_2 d\tau_1 d\tau_2, \\ \langle u(\xi, \varphi, t_1) u(\xi, \varphi, t_2) \rangle &= R^4 \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} u^{(1)}(x_1, \psi_1, \xi, \varphi, t_1 - \tau_1) \times \\ &\quad \times u^{(1)}(x_2, \psi_2, \xi, \varphi, t_2 - \tau_2) q(x_1, \psi_1, \tau_1) \times \\ &\quad \times q(x_2, \psi_2, \tau_2) \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle dx_1 d\psi_1 dx_2 d\psi_2 d\tau_1 d\tau_2, \\ \langle v(\xi, \varphi, t_1) v(\xi, \varphi, t_2) \rangle &= R^4 \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} v^{(1)}(x_1, \psi_1, \xi, \varphi, t_1 - \tau_1) \times \\ &\quad \times v^{(1)}(x_2, \psi_2, \xi, \varphi, t_2 - \tau_2) q(x_1, \psi_1, \tau_1) \times \\ &\quad \times q(x_2, \psi_2, \tau_2) \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle dx_1 d\psi_1 dx_2 d\psi_2 d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

gdzie  $\langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle$  oznacza funkcję korelacji procesu, przy czym  $q(x_i, \psi_i, \tau_i)$  są deterministycznymi funkcjami współrzędnych i czasu. W ten sposób sprowadzamy zagadnienie obciążenia do problemu procesu czasowego, a nie czasowo-przestrzennego.

Przyjęcie tej funkcji korelacji jest bardzo dogodne ze względu na możliwość uwzględnienia ruchomych obciążeń.

Można wprowadzić dalsze ograniczenia przyjmując, że czynnik deterministyczny obciążenia nie zależy od czasu.

Dla tak określonych procesów stochastycznych przyjmijmy następującą postać funkcji korelacji:

$$(1.6) \quad \langle q(\tau_1) q(\tau_2) \rangle = K_0 e^{-\alpha|\tau_2 - \tau_1|} \cos \beta(\tau_2 - \tau_1).$$

Uwzględniając (1.6) i (1.5) otrzymujemy wariancję przemieszczenia promieniowego w postaci

$$(1.7) \quad \langle w^2(\xi, \varphi, t) \rangle = \frac{K_0 R^4}{(\pi L R \rho \delta)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{mn} \lambda_{rs} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{r\pi\xi}{l} \times \\ \times \int_0^l \int_0^{2\pi} q(x_1, \psi_1) \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n(\varphi - \psi_1) dx_1 d\psi_1 \int_0^l \int_0^{2\pi} q(x_2, \psi_2) \sin \frac{r\pi x_2}{l} \times \\ \times \cos n(\varphi - \psi_2) dx_2 d\psi_2 \frac{1}{\omega_{mn}} \frac{1}{\omega_{rs}} [A_{mnrs}(t) + B_{mnrs}(t) + C_{mnrs}(t) + \\ + D_{mnrs}(t) + A_{rsmn}(t) + B_{rsmn}(t) + C_{rsmn}(t) + D_{rsmn}(t)],$$

gdzie

$$(1.8) \quad A_{mnrs}(t) = -\frac{1}{\gamma_{2-} \varrho_+} \left\{ \cos(\chi_+ - \Psi_{2-}) - e^{-(n_{mn} + n_{rs})t} \cos[(\bar{\omega}_{mn} + \bar{\omega}_{rs})t - \Psi_{2-} + \chi_+] \right\} - \frac{1}{\gamma_{2-} \gamma_{1-}} \left\{ e^{-(\alpha + n_{rs})t} \cos[(\beta + \bar{\omega}_{rs})t - \Psi_{2-} - \Psi_{1+}] - e^{-(n_{mn} + n_{rs})t} \cos[(\bar{\omega}_{mn} + \bar{\omega}_{rs})t - \Psi_{2-} - \Psi_{1-}] \right\}, \\ B_{mnrs}(t) = -\frac{1}{\gamma_{2+} \varrho_+} \left\{ \cos(\Psi_{2+} + \chi_+) - e^{-(n_{mn} + n_{rs})t} \cos[(\bar{\omega}_{mn} + \bar{\omega}_{rs})t + \Psi_{2+} + \chi_+] \right\} - \frac{1}{\gamma_{2+} \gamma_{1+}} \left\{ e^{-(\alpha + n_{rs})t} \cos(\beta - \bar{\omega}_{rs})t - \Psi_{2+} - \Psi_{1+}] - e^{-(n_{mn} + n_{rs})t} \cos[(\bar{\omega}_{mn} + \bar{\omega}_{rs})t + \Psi_{2+} + \Psi_{1+}] \right\}, \\ C_{mnrs}(t) = \frac{1}{\gamma_{2+} \varrho_-} \left\{ \cos(-\Psi_{2+} + \chi_-) - e^{-(n_{mn} + n_{rs})t} \cos[(\bar{\omega}_{mn} + \bar{\omega}_{rs})t - \Psi_{2+} + \chi_-] \right\} + \frac{1}{\gamma_{2+} \gamma_{1-}} \left\{ e^{-(\alpha + n_{rs})t} \cos[(\beta - \bar{\omega}_{rs})t - \Psi_{2+} - \Psi_{1-}] - e^{-(n_{mn} + n_{rs})t} \cos[(\bar{\omega}_{mn} - \bar{\omega}_{rs})t - \Psi_{2+} - \Psi_{1+}] \right\}, \\ D_{mnrs}(t) = \frac{1}{\gamma_{2-} \varrho_-} \left\{ \cos(\Psi_{2-} + \chi_-) - e^{-(n_{mn} + n_{rs})t} \cos[(\bar{\omega}_{rs} - \bar{\omega}_{mn})t - \Psi_{2-} + \chi_-] \right\} - \frac{1}{\gamma_{2-} \gamma_{1+}} \left\{ e^{-(\alpha + n_{rs})t} \cos[(\beta + \bar{\omega}_{rs})t - \Psi_{2-} - \Psi_{1+}] - e^{-(n_{mn} + n_{rs})t} \cos[(\bar{\omega}_{rs} - \bar{\omega}_{mn})t - \Psi_{2-} - \Psi_{1+}] \right\}.$$

Pozostałe wielkości  $A_{rsmn}(t)$ ,  $B_{rsmn}(t)$ ,  $C_{rsmn}(t)$  i  $D_{rsmn}(t)$  uzyskuje się łatwo dokonując zmiany wskaźników  $mn$  na  $rs$  i odwrotnie we wzorach (1.8), przy czym

$$\begin{aligned} \gamma_{1\pm} &= \sqrt{(n_{mn} - \alpha)^2 + (\pm \bar{\omega}_{mn} + \beta)^2}, & \Psi_{1\pm} &= \arctg \frac{\pm \bar{\omega}_{mn} + \beta}{n_{mn} - \alpha}, \\ \varrho_{\pm} &= \sqrt{(n_{mn} + n_{rs})^2 + (\bar{\omega}_{mn} \pm \bar{\omega}_{rs})^2}, & \chi_{\pm} &= \arctg \frac{\bar{\omega}_{mn} \pm \bar{\omega}_{rs}}{n_{mn} + n_{rs}}, \\ \gamma_{2\pm} &= \sqrt{(n_{rs} + \alpha)^2 + (\bar{\omega}_{rs} \pm \beta)^2}, & \Psi_{2\pm} &= \arctg \frac{\bar{\omega}_{rs} \pm \beta}{n_{rs} + \alpha}. \end{aligned}$$

Analogiczne zależności otrzymuje się dla wariancji przemieszczeń stycznych i wzdłużnych

$$\begin{aligned} \langle v^2(\xi, \varphi, t) \rangle &= \frac{K_0 R^4}{(\pi L R \varrho \delta)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{mn} \lambda_{rs} \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{r\pi\xi}{l} \times \\ &\quad \times \frac{\Phi_{vmn} \Phi_{vrs}}{G_{wmn} G_{wrs}} \int_0^l \int_0^{2\pi} q(x_1, \psi_1) \sin \frac{m\pi x_1}{l} \sin n(\varphi - \psi_1) dx_1 d\psi_1 \times \\ (1.9) \quad &\quad \times \int_0^l \int_0^{2\pi} q(x_2, \psi_2) \sin \frac{r\pi x_2}{l} \sin s(\varphi - \psi_2) dx_2 d\psi_2 \frac{1}{\bar{\omega}_{mn}} \frac{1}{\bar{\omega}_{rs}} [A_{mnrs}(t) + \\ &\quad + B_{mnrs}(t) + C_{mnrs}(t) + D_{mnrs}(t) + A_{rsmn}(t) + B_{rsmn}(t) + C_{rsmn}(t) + D_{rsmn}(t)], \\ \langle u^2(\xi, \varphi, t) \rangle &= \frac{K_0 R^4}{(\pi L R \varrho \delta)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{mn} \lambda_{rs} \cos \frac{m\pi\xi}{l} \cos \frac{r\pi\xi}{l} \times \\ &\quad \times \frac{\Phi_{umn} \Phi_{urs}}{G_{wmn} G_{wrs}} \int_0^l \int_0^{2\pi} q(x_1, \psi_1) \sin \frac{m\pi x_1}{l} \cos n(\varphi - \psi_1) dx_1 d\psi_1 \times \\ &\quad \times \int_0^l \int_0^{2\pi} q(x_2, \psi_2) \sin \frac{r\pi x_2}{l} \cos s(\varphi - \psi_2) dx_2 d\psi_2 \frac{1}{\bar{\omega}_{mn}} \frac{1}{\bar{\omega}_{rs}} [A_{mnrs}(t) + \\ &\quad + B_{mnrs}(t) + C_{mnrs}(t) + D_{mnrs}(t) + A_{rsmn}(t) + B_{rsmn}(t) + C_{rsmn}(t) + D_{rsmn}(t)]. \end{aligned}$$

We wzorach (1.5), (1.6) i (1.7) występują wyrazy zawierające czas, które, jak wykażą obliczenia numeryczne, dla małych okresów powodują oscylację wariancji.

## 2. Obliczenia numeryczne

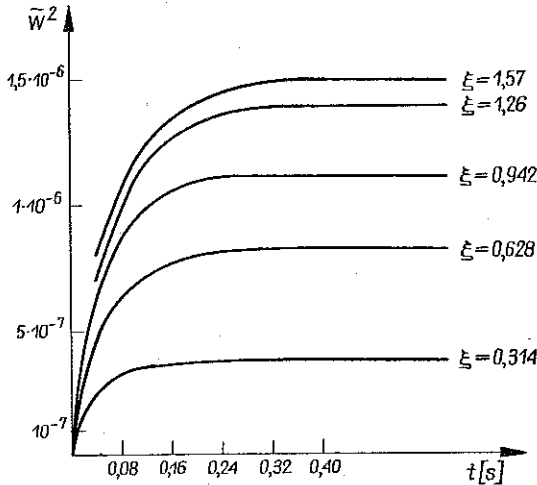
Na początku rozważmy obciążenie przypadkowe powłoki scharakteryzowane następującą funkcją korelacji:

$$(2.1) \quad \langle q(x_1, \psi_1, \tau_1) q(x_2, \psi_2, \tau_2) \rangle = K_0 \delta(x_2 - x_1) \delta(\psi_2 - \psi_1) \delta(\tau_2 - \tau_1).$$

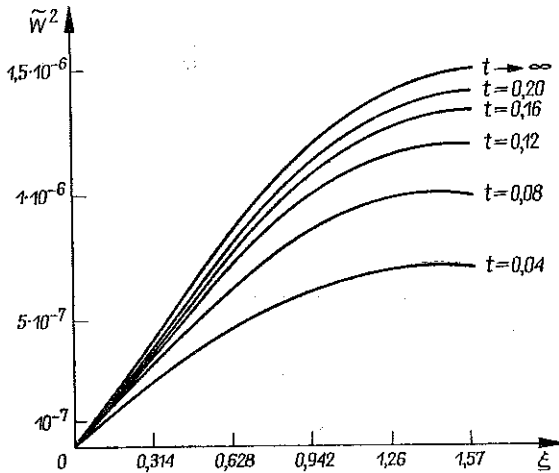
Funkcja korelacji obciążenia przedstawiona powyżej jest tzw. białym szumem czasowo-przestrzennym.

Podstawiając (2.1) i (1.3) do (1.2) po prostych przekształceniach oraz po wykorzystaniu ortogonalności funkcji własnych otrzymuje się następujący wzór:

$$(2.2) \quad \langle w^2(\xi, t) \rangle = \frac{2(\pi LR \rho \delta)^2}{\pi K_0 R^3 L} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} \frac{\sin^2 \frac{m\pi\xi}{l}}{\bar{\omega}_{mn}^2 (n_{mn}^2 + \bar{\omega}_{mn}^2)} \times \\ \times \left[ \frac{\bar{\omega}_{mn}^2}{n_{mn}} - e^{-2n_{mn}t} \left( 2n_{mn} \sin^2 \bar{\omega}_{mn} t + \bar{\omega}_{mn} \sin 2\bar{\omega}_{mn} t + \frac{\bar{\omega}_{mn}^2}{n_{mn}} \right) \right].$$



Rys. 1



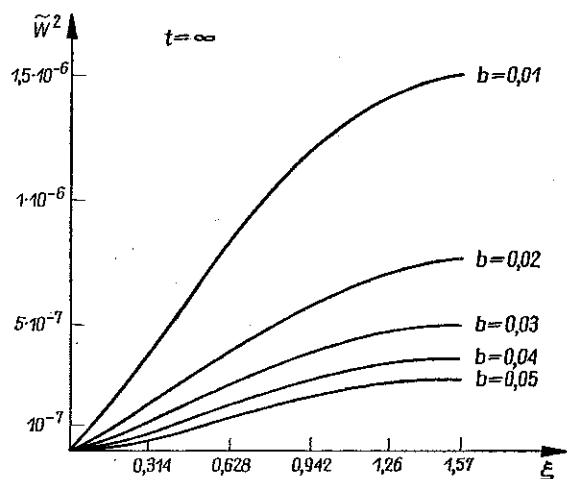
Rys. 2

Obliczeń numerycznych dokonano dla następujących parametrów powłoki:  $R = 1$  m,  $L = 3,14 R$ ,  $\delta = 0,02$  m,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>.

Zmiany tej wielkości proporcjonalnej do wariancji ilustrują wykresy 1 i 2 dla  $b_{mn} = b = 0,01$ . Można tutaj zaobserwować, że dla białego szumu czasowego-

przestrzennego nie ma przewyższeń wariancji ponad poziom ustalony. Wobec tego rzeczą celową tutaj wydaje się stosowanie metody spektralnej, która daje nam wykres wariancji w stanie ustalonym dla różnych współczynników tłumienia (rys. 3).

Inaczej zachowuje się wykres wariancji dla powłoki obciążonej promieniowo procesem stochastycznym o funkcji korelacji podanej w (1.5).



Rys. 3

Jak wiadomo, większość procesów stochastycznych, działających w rzeczywistości, można aproksymować wyżej podaną funkcją korelacji. Dla tej funkcji korelacji pozostaje prawdziwa zależność (1.7).

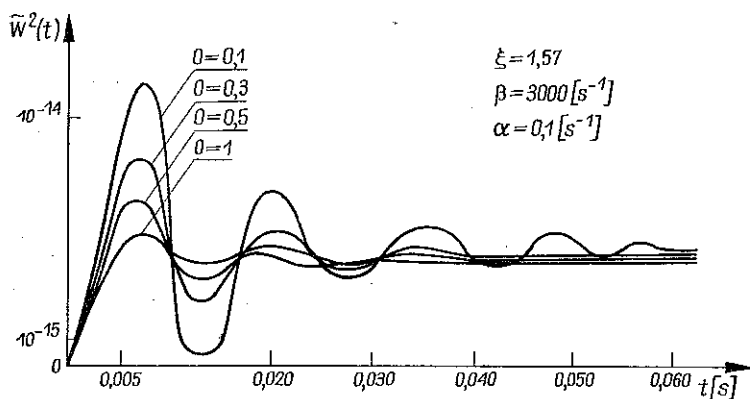
Jako przykład obliczono wielkość bezwymiarową proporcjonalną do wariancji i określoną zależnością

$$(2.3) \quad \langle w^2(\xi, t) \rangle \frac{(\pi L R Q \delta)^2}{K_0 R^4 4\pi^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{l}{m\pi} \frac{l}{r\pi} [1 - (-1)^m [1 - (-1)^r] \times \\ \times \sin \frac{m\pi\xi}{l} \sin \frac{r\pi\xi}{l} \frac{1}{\omega_{mn}} \frac{1}{\omega_{rs}} [A_{mnr}(t) + B_{mnr}(t) + C_{mnr}(t) + \\ + D_{mnr}(t) + A_{rsm}(t) + B_{rsm}(t) + D_{rsm}(t) + C_{rsm}(t)].$$

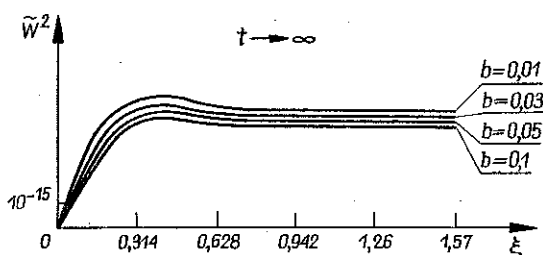
Do obliczeń przyjęto następujące dane:  $a = 0,1 \text{ s}^{-1}$  i  $\beta = 3000 \text{ s}^{-1}$  dla  $q(x, y) = 1$ . Pozostałe parametry są takie same jak w poprzednim przykładzie. Wykres w czasie został podany na rys. 4, a wykres wzdłuż współrzędnej  $\xi$  na rys. 5. Obliczenia powyższe zostały wykonane przy różnych współczynnikach tłumienia. Przy wzroście tego współczynnika widać obniżanie się poziomu wariancji przemieszczenia.

Jak wskazały obliczenia, przebieg nieustalony daje duże przewyższenia wariancji. Przewyższenia te sięgają dwukrotnego poziomu ustalonego. Wyjaśnienie tego zja-





Rys. 4



Rys. 5

wiska oscylacji jest dość proste. Układ dla bardzo małych czasów zachowuje się jak układ deterministycznych pod wpływem stałego obciążenia. Wtedy zachodzi w przybliżeniu zależność

$$e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau \approx 1.$$

Stąd właśnie pochodzą oscylacje.

#### Literatura cytowana w tekście

1. B. SKALMIERSKI, *Problemy statyki i dynamiki powłok walcowych uźebrowanych*, Zeszyty Naukowe Pol. Śl., nr 73, Gliwice 1963.
2. B. SKALMIERSKI, E. CZOGAŁA, *Lepkosprężysta powłoka walcowa na podłożu lepkoelastycznym o jednokierunkowej charakterystyce*, Rozpr. Inżyn., 4, 14 (1966).
3. W. W. BOŁOTIN, *Metody statyczne w mechanice budowli*, Arkady, Warszawa 1968.
4. H. C. PETERSON, C. L. PULLEN, *Response of a dynamic system to a separable nonstationary random excitation*, J. Spacecraft Rockets, 8, 3 (1966).
5. W. T. THOMSON, M. V. BARTON, *The response of mechanical systems to random excitation*, J. Appl. Mech., June 1957.
6. E. C. ERINGEN, Lafayette, *IND-response of beams and plates to random loads*, J. Appl. Mech., March 1957.
7. В. А. Пальмов, *Тонкие оболочки под действием широкополосной случайной нагрузки*, Прикл. Мат. Мех., 29 (1965).
8. Ю. А. Федоров, *О нелинейных колебаниях прямоугольной пластинки под воздействием случайных сил*, Журнал Т. Н., 3, 1964.
9. T. K. CAUGHEY, *Response of a nonlinear string to random loading*, J. Appl. Mech., 3, 26 (1959).
10. *Random Vibrations*, Volume 2, ed. S. H. CRANDOLL, MIT Press, Cambridge, Mass. 1963.

## Резюме

О НЕКОТОРОЙ ЗАДАЧЕ О НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОБОЛОЧЕК  
ПОД ВЛИЯНИЕМ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗОК

В настоящей работе обсуждается вопрос случайных, нестационарных, тонкостенных, цилиндрических замкнутых оболочек.

Принято линейную упругость материала оболочки и наружное демпфирование. Рассуждения основывались на корреляционной методе, ограничиваясь определением моментов второго ряда перемещений.

Работа иллюстрируется примерами, заключающими численные расчеты дисперсии перемещений в функции координат и времени.

## Summary

ON A CERTAIN PROBLEM OF NONSTATIONARY VIBRATION OF SHELLS RANDOMLY  
LOADED

The authors considered the problem of nonstationary random vibrations of cylindrical thin-walled closed shells.

The elastic and internal damping characteristics of the shell material are assumed to be linear. The correlation method has been employed and the moments are determined with the exactness to the moments of the second order of displacements.

The paper is illustrated with examples in which the displacements variances has been numerically computed as functions of coordinates and time.

WYDZIAŁ AUTOMATYKI  
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ W GLIWICACH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 września 1968 r.*

---