

ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH WZDŁUŻ SZTYWNEGO PRĘTA
ZNAJDUJĄCEGO SIĘ WEWNĄTRZ PÓŁPŁASZCZYZNY SPRĘŻYSTEJ

JERZY BAUER, TOMASZ STRZELECKI (WROCLAW)

1. Omówienie zagadnienia

Jako pierwsze przybliżenie rozkładu naprężeń stycznych wzdłuż pobocznicy pała w ośrodkach spoiowych przy małych obciążeniach można uważać rozwiązanie uzyskane dla sztywnego pręta przy pominięciu jego grubości i założeniu stosowalności prawa Hooke'a dla ośrodka gruntowego.

W niniejszej pracy zostanie podany sposób znalezienia metodami teorii sprężystości rozkładu naprężeń stycznych wzdłuż sztywnego pręta umieszczonego w półpłaszczyźnie sprężystej i obciążonego siłą P (rys. 1). Jest to jedno z zagadnień kontaktowych dla tarczy nieograniczonej, której powierzchnia środkowa jest półpłaszczyzną.

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do znalezienia funkcji Airy'ego F takiej, żeby spełniała równanie różniczkowe

$$(1.1) \quad \Delta \Delta F = 0$$

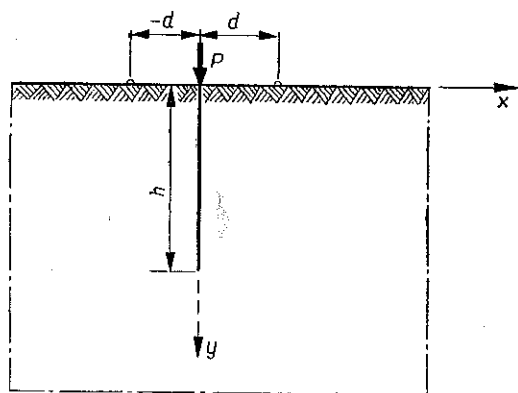
oraz warunki brzegowe

$$v = \text{const} \quad \text{dla} \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq h,$$

gdzie v jest składową wektora przemieszczenia równoległą do osi y . Prócz tego naprężenia styczne na pobocznicy pręta muszą się równoważyć z obciążeniem zewnętrznym:

$$2 \int_0^h [\tau_{yx}]_{x=0}.$$

Rozwiązanie równania przy podanych w przemieszczeniach i naprężeniach warunkach brzegowych nastęrcza poważne trudności natury matematycznej, ponieważ teoria równania [1] z mieszanymi warunkami brzegowymi jest jeszcze niekompletna, a zastosowanie metody różnic skończonych do przybliżonego określenia funkcji F jest utrudnione z powodu nieciągłych warunków brzegowych. Ponieważ w rozważanym przypadku nie interesuje nas rozkład naprężeń w całej półpłaszczyźnie, określony



Rys. 1. Pręt w półpłaszczyźnie

przez funkcję F , ale jedynie naprężenie kontaktowe na styku: sztywny pręt-półpłaszczyzna sprężysta, więc dla napisania równania określającego to naprężenie skorzystamy z zasady superpozycji.

Metoda rozwiązania będzie polegać na wykorzystaniu ścisłych wyników uzyskanych dla sił skupionych i żądaniu spełnienia warunków brzegowych na podstawie zasady superpozycji.

Przy wyznaczaniu obliczeń korzystano z następujących założeń:

(a) półpłaszczyzna obciążona w sposób pośredni przez sztywny pręt jest ośrodkiem jednorodnym, idealnie sprężystym i podlegającym prawu Hooke'a;

(b) pręt przyjęto jako sztywny, tzn. że długość jego nie zmienia się w trakcie obciążenia i nie może on ulec wyboczeniu;

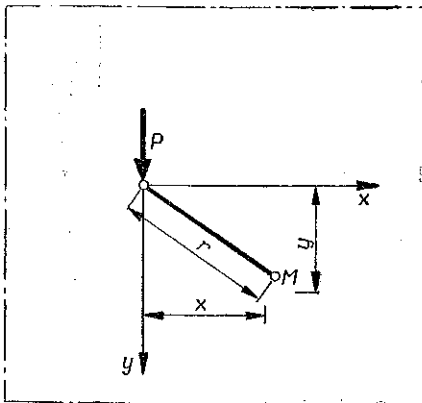
(c) w obliczeniu pominięto grubość pręta;

(d) pręt jest trwale połączony z półpłaszczyzną sprężystą.

2. Sztywny pręt w płaszczyźnie sprężystej

2.1. Siła skupiona wewnątrz tarczy nieograniczonej. Na podstawie pracy [1] możemy opisać stan naprężenia w płaszczyźnie sprężystej, obciążonej siłą skupioną, zaczepioną w początku układu współrzędnych i skierowaną zgodnie z dodatnim kierunkiem osi y (rys. 2):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{4\pi} \left[(1-\nu) \frac{y}{x^2+y^2} - (1+\nu) \frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2} \right], \\ \sigma_y &= -\frac{P}{4\pi} \left[(3+\nu) \frac{y}{x^2+y^2} - (1+\nu) \frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2} \right], \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{4\pi} \left[(1-\nu) \frac{x}{x^2+y^2} + (1+\nu) \frac{2y^2x}{(x^2+y^2)^2} \right]. \end{aligned}$$



Rys. 2. Siła wewnątrz płaszczyzny

Korzystając z oznaczeń Cauchy'ego

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

oraz stosując uogólnione prawo Hooke'a

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \end{aligned}$$

otrzymuje się następujący związek między przemieszczeniami a naprężeniami w płaskim stanie naprężenia:

$$(2.4) \quad Eu = \int \sigma_x dx - \nu \int \sigma_y dx + \Phi(y), \quad Ev = \int \sigma_y dy - \nu \int \sigma_x dy + \Psi(x).$$

Po wstawieniu do wzorów (2.4) wyrażeń (2.1) i obliczeniu z warunków brzegowych dowolnych funkcji $\Phi(y)$ i $\Psi(x)$, które w tym wypadku są stałymi, znajdziemy na składowe wektora przemieszczenia następującą postać:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} Eu &= -\frac{P}{4\pi} \left[-4\nu \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} + (1-\nu^2) \frac{xy}{x^2+y^2} \right], \\ Ev &= -\frac{P}{4\pi} \left[\frac{3+\nu^2}{2} \ln \frac{x^2+y^2}{a^2} - (1-\nu^2) \frac{y^2}{x^2+y^2} \right], \end{aligned}$$

gdzie punkty $y=0$, $x=\pm a$ są układem odniesienia, tzn. że przemieszczenie tych punktów przyjęto równe zeru i względem nich obliczono przemieszczenie v całej półpłaszczyzny.

2.2. Obciążenie płaszczyzny sprężystej przez sztywny pręt. Rozpatrzmy teraz obciążenie pośrednie tarczy nieograniczonej przedstawione na rys. 3. Siła P obciążająca sztywny pręt «wtopiony» w rozpatrywaną płaszczyznę sprężystą spowoduje powstanie naprężeń kontaktowych wzdłuż pręta po obu jego stronach. Biorąc pod uwagę założenia przyjęte w pracy [1] można określić, że rozpatrywany układ po przyłożeniu obciążenia musi spełniać następujące warunki brzegowe:

a. Ze względu na symetrię układu składowa wektora przemieszczenia równoległa do osi x na prostej $x=0$ ma się równać zeru:

$$[u]_{x=0} = 0 \quad \text{dla} \quad -\infty < y < \infty.$$

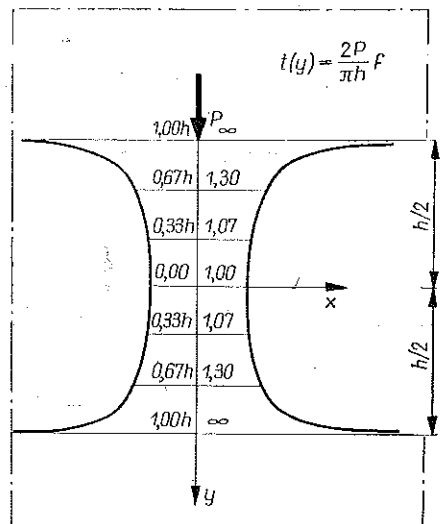
b. Składowa wektora przemieszczenia równoległa do osi y na odcinku $[-h/2, h/2]$ ma mieć wartość stałą:

$$[v]_{x=0} = \text{const} \quad \text{dla} \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}.$$

c. Wypadkowa naprężeń ścinających $t(y)$ powstałych wzdłuż pobocznic pręta powinna się równoważyć z obciążeniem zewnętrznym:

$$2 \int_{-h/2}^{h/2} t(y) dy = P.$$

Warunki (b) i (c) pozwalają napisać równanie, które określi rozkład naprężeń stycznych wzdłuż pobocznic pola. Warunek (a) jest spełniony automatycznie,



Rys. 3. Wykres sił tarcia f na pobocznic pręta wewnątrz płaszczyzny sprężystej

ponieważ jest on uwzględniony we wzorach na siły skupione. Ze wzorów (2.5) można znaleźć wielkość przemieszczeń prostej $x = 0$ płaszczyzny sprężystej:

$$(2.6) \quad [u]_{x=0} = 0, \quad [Ev]_{x=0} = -\frac{P}{4\pi} \left[\frac{3+\nu^2}{2} \ln \frac{y^2}{a^2} - (1-\nu^2) \right].$$

Obciążenie P zostaje rozłożone w określony sposób przez sztywny pręt i przekazane na nieograniczoną tarczę wzdłuż linii styku. Te naprężenia styczne, występujące na poboczniczy pręta, oznaczamy przez $t(y)$ (rys. 3). Działające w punkcie $y = \xi$ styku pręta z płaszczyzną elementarne obciążenie $t(\xi) d\xi$, które możemy traktować jako siłę skupioną, wywołuje według (2.6) przemieszczenie punktów tarczy ($x = 0$, y) wyrażone wzorem

$$(2.7) \quad [dv]_{x=0} = -\frac{t(\xi) d\xi}{4\pi E} \left[\frac{3+\nu^2}{2} \ln \frac{(y-\xi)^2}{a^2} - (1-\nu^2) \right].$$

Całkowite przesunięcie tego punktu pod obciążeniem całkowitej siły P działającej na pól wynosi zatem

$$[v]_{x=0} = -\frac{1}{4\pi E} \int_{\xi=-h/2}^{h/2} \left[\frac{3+\nu^2}{2} \ln \frac{(y-\xi)^2}{a^2} - (1-\nu^2) \right] t(\xi) d\xi,$$

a więc warunki brzegowe (b) i (c) można wyrazić w postaci

$$(2.8) \quad -\frac{1}{4\pi E} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{3+\nu^2}{2} \ln \frac{(y-\xi)^2}{a^2} - (1-\nu^2) \right] t(\xi) d\xi = \text{const},$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} t(\xi) d\xi = \frac{P}{2}.$$

Po pomnożeniu obu stron równania przez $-1/4\pi E$ i uwzględnieniu, że

$$\int_{-h/2}^{h/2} -(1-\nu^2) t(\xi) d\xi = -\frac{P}{2}(1-\nu^2)$$

otrzymujemy równanie

$$(2.9) \quad \int_{-h/2}^{h/2} \ln \frac{(y-\xi)}{a} t(\xi) d\xi = \text{const}, \quad \int_{-h/2}^{h/2} t(\xi) d\xi = \frac{P}{2}.$$

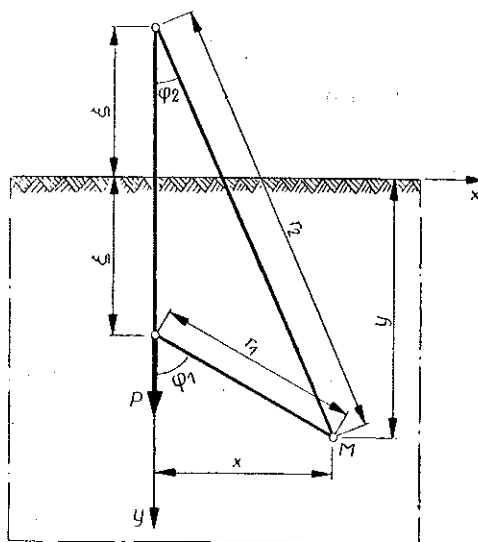
Jest to równanie całkowe Fredholma pierwszego rodzaju z jądrem symetrycznym, słabo osobliwym typu logarytmicznego na niewiadomą funkcję $t(\xi)$. Równanie tego typu było badane przez CARLEMANNĄ [2]. Jego rozwiązanie ma postać

$$(2.10) \quad t(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{h^2 - 4y^2}} \int_{-h/2}^{h/2} t(\xi) d\xi = \frac{P}{\pi\sqrt{h^2 - 4y^2}} \quad \text{dla } -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}.$$

Wzór (2.10) dla $y = \pm h/2$ ma nieciągłość i teoretycznie naprężenia styczne na końcach pła osiągną nieskończenie wielkie wartości (rys. 3).

3. Siła skupiona wewnątrz półpłaszczyzny sprężystej

Dla napisania równania określającego rozkład naprężeń stycznych wzdłuż pobocznicy sztywnego pręta potrzebna jest znajomość stanu przemieszczenia wywołanego siłą skupioną przyłożoną wewnątrz półpłaszczyzny sprężystej. Zadanie siły skupionej wewnątrz półpłaszczyzny rozwiązał w naprężeniach MELAN. Poniżej



Rys. 4. Siła wewnątrz półpłaszczyzny

podano rozwiązanie tego zagadnienia opierając się na wzorach Melana przytoczonych w pracy [3]. Przyjmując oznaczenia jak na rys. 4 MELAN znalazł następującą postać funkcji Airy'ego:

$$(3.1) \quad F = \frac{P}{2\pi} \left[x(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1 - u^*}{2} (y - \xi) \ln \frac{r_1}{r_2} - (1 + u^*) \frac{2\xi y (y + \xi)}{r^2} \right].$$

Stąd zaś przy pomocy wzorów

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

otrzymuje się

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1 + u^*) \left[\frac{(y - \xi)^3}{r_1^4} + (y + \xi) \frac{(y + \xi)^2 + 2y\xi}{r_2^4} + \frac{8\xi y (y + \xi) x^2}{r_2^6} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - u^*}{2} \left[\frac{y - \xi}{r_1^2} + \frac{3y + \xi}{r_2^2} - \frac{4yx^2}{r_2^4} \right] \right\}, \\ \sigma_x &= \frac{P}{2\pi} \left\{ (1 + u^*) \left[\frac{y - \xi}{r_1^4} x^2 + \frac{(y + \xi)(x^2 + 2\xi^2) - 2\xi x^2}{r_2^4} + \frac{8\xi y (y + \xi) x^2}{r_2^6} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 - u^*}{2} \left(-\frac{y - \xi}{r_1^2} + \frac{y + 3\xi}{r_2^2} + \frac{4yx^2}{r_2^4} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \tau_{xy} = \frac{Px}{2\pi} \left\{ (1+u^*) \left[\frac{(y-\xi)^2}{r_1^4} + \frac{y^2 - 2\xi y - \xi^2}{r_2^4} + \frac{8\xi y (y+\xi)^2}{r_2^6} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1-u^*}{2} \left[\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} + \frac{4y(y+\xi)}{r_2^4} \right] \right\}.$$

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia:

$$r_1 = \sqrt{(y-\xi)^2 + x^2}, \quad r_2 = \sqrt{(y+\xi)^2 + x^2}$$

oraz $u^* = \nu$ dla płaskiego stanu odkształcenia i $u^* = \nu/(1+\nu)$ dla płaskiego stanu naprężenia.

W płaskim stanie odkształcenia związek między przemieszczeniami a naprężeniami jest następującej postaci:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} Eu &= (1-\nu^2) \int \sigma_x dx - \nu(1+\nu) \int \sigma_y dx + \Phi(y), \\ Ev &= (1-\nu^2) \int \sigma_y dy - \nu(1+\nu) \int \sigma_x dy + \psi(x). \end{aligned}$$

Prócz tego składowe stanu przemieszczenia u i v muszą spełniać poniższą równość:

$$(3.4) \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}.$$

Można udowodnić (np. przez podstawienie za F wzoru (3.2)), że funkcja Airy'ego F , opisująca stan naprężenia w półpłaszczyźnie sprężystej, ma następującą własność:

$$(3.5) \quad \int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dy = 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Po uwzględnieniu (3.5) we wzorach (3.3) otrzymuje się

$$(3.6) \quad \frac{d\Phi(y)}{dy} + \frac{d\Psi(x)}{dx} = 0$$

i dlatego spełnione są zależności

$$(3.7) \quad \Phi(y) = K_0 + K_1 y, \quad \Psi(x) = K_2 - K_1 x,$$

gdzie K_0 , K_1 i K_2 są stałymi, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Podstawiając do równania funkcje opisujące stan naprężenia i wykonując odpowiednie całkowanie, otrzymuje się składowe wektora przemieszczenia:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} u &= \frac{P}{2\pi E} (1+\nu) \left\{ (1-\nu^2) \left[-\frac{x(y-\xi)}{2r_1^2} - \frac{x(y+\xi)}{2r_2^2} + \frac{2\xi x}{r_2^2} - \frac{2\xi y x (y+\xi)}{r_2^4} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y-\xi} + \operatorname{arctg} \frac{x}{y+\xi} \right) \right] + \frac{1-\nu^2}{2} \left[-\frac{2xy}{r_2^2} - \operatorname{arctg} \frac{x}{y-\xi} + \right. \\ &+ \left. 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{y+\xi} \right] - \nu(1+\nu) \left[\frac{x(y-\xi)}{2r_1^2} + \frac{x(y+\xi)}{2r_2^2} + \frac{2\xi x y (y+\xi)}{r_2^4} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad & + \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y-\xi} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y+\xi} \right) - \nu \frac{1-\nu}{2} \times \\
 \text{c. d.} \quad & \times \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y-\xi} + \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y+\xi} + \frac{2xy}{r_2^2} \right] + \Phi(y), \\
 v = & \frac{P(1+\nu)}{2\pi E} \left\{ (1+\nu) \left[\frac{1}{2} \ln r_1^2 r_2^2 + \frac{x^2}{2r_1^2} + \frac{x^2}{2r_2^2} - \frac{\xi y}{r_2^2} - \frac{x^2 \xi (\xi - y)}{r_2^4} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\xi (\xi + y)^3}{r_2^4} - \nu \left(\frac{1}{2} \ln r_1^2 r_2^2 - \frac{\xi (\xi + y)}{r_2^2} \right) \right] + \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{1}{2} \ln r_1^2 r_2^6 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2\xi (y+\xi)}{r_2^2} + \frac{2x^2}{r_2^2} - 2\nu \ln r_2^2 \right] \right\} + \Psi(x).
 \end{aligned}$$

Ponieważ w rozpatrywanym zagadnieniu siły wewnątrz półpłaszczyzny sprężystej występuje symetria względem prostej $x = 0$, więc równoległe do osi x przemieszczenie u punktów prostej $x = 0$ musi być równe zeru, $[u]_{x=0} = 0$. Na tej podstawie otrzymujemy $\Phi(y) = K_0 + K_1 y \equiv 0$, co jest równoznaczne z warunkami $K_0 = 0$ i $K_1 = 0$. Ze wzoru (3.7) wynika zatem $\Psi(x) = K_2$. Zauważmy, że w tarczach nieograniczonych przyłożenie dowolnego skończonego obciążenia skupionego powoduje przesunięcie punktów tarczy dla skończonych wartości x i y do nieskończoności w kierunku przyłożonych sił. Dlatego też w takich układach operujemy tzw. przemieszczeniem względnym. Stałą $\Psi(x) = K_2 = \text{const}$ wyznaczmy zakładając, że przemieszczenie pionowe v punktów o współrzędnych $(\pm d, 0)$ jest równe zeru; stąd

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \Psi(x) = & (1+\nu) \left\{ (1+\nu) \left[-\frac{1}{2} \ln(d^2 + \xi^2) - \frac{d^2 - \xi^2}{d^2 + \xi^2} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \nu \left(-\frac{1}{2} \ln(d^2 + \xi^2) + \frac{2\xi^2}{d^2 + \xi^2} \right) \right] + \frac{1-\nu}{2} \left[-\frac{1}{2} \ln(d^2 + \xi^2)^4 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 + 2\nu \ln(d^2 + \xi^2) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu powyższego wzoru w formułach (3.9) otrzymuje się przemieszczenie pionowe:

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad v = & \frac{P}{2\pi E} (1+\nu) \left\{ (1+\nu) \left[\frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2 r_2^2}{(d^2 + \xi^2)^2} + \frac{x^2}{2r_1^2} + \frac{x^2}{2r_2^2} - \frac{\xi y}{r_2^2} - \frac{x^2 \xi (\xi - y)}{r_2^4} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\xi (\xi + y)^3}{r_2^4} - \frac{d^2 - \xi^2}{d^2 + \xi^2} - \nu \left(\frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2 r_2^2}{(d^2 + \xi^2)^2} + \frac{2\xi^2}{d^2 + \xi^2} - \frac{2\xi (\xi + y)}{r_2^2} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1-\nu}{2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{r_1^2 r_2^6}{(d^2 + \xi^2)^4} + \frac{2\xi (\xi + y)}{r_2^2} + \frac{2x^2}{r_2^2} - 2 - 2\nu \ln \frac{r_2^2}{d^2 + \xi^2} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Dla $\xi = 0$ powyższy wzór przedstawia przemieszczenie pionowe wywołane siłą normalną stojącą na brzegu półpłaszczyzny, a gdy ξ i y dąży do nieskończoności (ale $y_1 = y - \xi$ ma wartość skończoną), to $v(x, y_1)$ przedstawia składową wektora przemieszczenia dla pełnej tarczy przy przyjęciu, że początek układu współrzędnych x, y_1 znajduje się w punkcie przyłożenia siły P .

4. Obciążenie półpłaszczyzny sprężystej poprzez sztywny pręt

Obciążenie pośrednie tarczy nieograniczonej wyznaczonej przez półpłaszczyznę sprężystą przez sztywny pręt jest przedstawione na rys. 1. Siła P obciążająca pręt o długości h spowoduje powstanie naprężeń kontaktowych wzdłuż długości pręta po obu jego stronach. Utrzymując w mocy założenia z p. 1, można ustalić warunki brzegowe, jakie powinien spełniać rozpatrywany układ po przyłożeniu obciążenia:

(a) Ze względu na symetrię układu składowa wektora przemieszczenia równoległa do osi x na prostej $x = 0$ ma się równać zeru,

$$[u]_{x=0} = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq y < \infty.$$

(b) Składowa wektora przemieszczenia równoległa do osi y na odcinku $[0, h]$ ma mieć wartość stałą,

$$[v]_{x=0} = \text{const} \quad \text{dla} \quad 0 \leq y \leq h.$$

(c) Wypadkowa z naprężeń ścinających $t(y)$, powstałych wzdłuż pobocznic pręta, powinna się równoważyć z obciążeniem zewnętrznym,

$$2 \int_0^h t(y) dy = P.$$

Jak z powyższego widać, warunki brzegowe mają podobną postać jak w zagadnieniu rozwiązany w p. 2.2. Przeprowadzając analogicznie rozumowanie do rozumowania dla pręta w płaszczyźnie sprężystej, można otrzymać równanie określające rozkład naprężeń stycznych wzdłuż pobocznic pręta dla półpłaszczyzny.

Ze wzorów (3.8) i (3.10) dla $\nu = 0,3$ można otrzymać, podstawiając $x = 0$, przemieszczenie punktów znajdujących się na osi y :

$$(4.1) \quad [u]_{x=0} = 0, \\ [v]_{x=0} = \left[0,63 \ln \frac{(y-\xi)^2}{d^2+\xi^2} + 0,77 \ln \frac{(y+\xi)^2}{d^2+\xi^2} - 1,3 \frac{y\xi}{(y+\xi)^2} + 0,18 \frac{\xi}{y+\xi} - \right. \\ \left. - \frac{1,3d^2}{d^2+\xi^2} + 0,52 \frac{\xi^2}{d^2+\xi^2} - 0,7 \right] \frac{P}{2\pi E}.$$

Stosując zasadę superpozycji można warunek brzegowy (b) i (c) wyrazić w postaci następującej:

$$(4.2) \quad \int_0^h K_1(y, \xi) t(\xi) d\xi = \text{const} \quad \text{dla} \quad 0 \leq y \leq h, \\ 2 \int_0^h t(\xi) d\xi = P,$$

gdzie $K_1(y, \xi) = [v]_{x=0}$ i $t(\xi)$ jest poszukiwanym rozkładem naprężeń kontaktowych. Jądro otrzymanego równania całkowego (4.2) jest niesymetryczne, $K_1(y, \xi) \neq K_1(\xi, y)$, ponieważ przemieszczenie jest przemieszczeniem względnym i we wzorach na składowe wektora przemieszczenia nie jest spełniona zasada Bettiego-

Maxwella o wzajemności przemieszczeń. Jądro $K_1(y, \xi)$ równania (4.2) można przekształcić. Biorąc pod uwagę, że

$$\int_0^h \left(-1,3 \frac{d^2}{d^2 + \xi^2} + 0,52 \frac{\xi^2}{d^2 + \xi^2} - 0,7 \right) t(\xi) d\xi = \text{const},$$

można stwierdzić, że równanie (4.2) jest w pełni równoważne równaniu o jądrze

$$(4.3) \quad K_2(y, \xi) = 0,63 \ln \frac{(y - \xi)^2}{d^2 + \xi^2} + 0,77 \ln \frac{(y + \xi)^2}{d^2 + \xi^2} - 1,3 \frac{4\xi}{(y + \xi)^2} + 0,18 \frac{\xi}{y + \xi}.$$

Jeżeli wprowadzi się współrzędne bezwymiarowe oraz przyjmie się stałą dowolną $d = h$, to jądro (4.3) można napisać w postaci

$$(4.4) \quad K_3(\theta, \omega) = 0,63 \ln \frac{(\theta - \omega)^2}{1 + \omega^2} + 0,77 \ln \frac{(\theta + \omega)^2}{1 + \omega^2} - 1,3 \frac{\theta\omega}{(\theta + \omega)^2} + \\ + 0,18 \frac{\omega}{\theta + \omega},$$

gdzie $y = \theta h$, $\xi = \omega h$, $d = h$. Ponieważ

$$\int_0^1 \ln(1 + \omega^2) t(\omega) d\omega = \text{const},$$

więc równanie (4.2) może mieć następującą postać

$$(4.5) \quad \int_0^1 K(\theta, \omega) t(\omega) d\omega = \text{const} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \theta \leq 1, \\ \int_0^1 t(\omega) d\omega = \frac{P}{2h},$$

gdzie

$$K(\theta, \omega) = 1,26 \ln(\theta - \omega) + 1,54 \ln(\theta + \omega) - 1,3 \frac{\theta\omega}{(\theta + \omega)^2} + 0,18 \frac{\omega}{\theta + \omega}.$$

Powyższe równanie określa w sposób jednoznaczny rozkład naprężeń stycznych na pobocznicę pręta.

Równanie (4.5) jest równaniem całkowym Fredholma pierwszego rodzaju z jądrem logarymicznym słabo osobliwym. Dla $\theta = \omega$, $\ln(\theta - \omega)$ dąży do $-\infty$ i w tym punkcie istnieje słaba osobliwość logarymiczna. Ponieważ nie jest znane rozwiązanie równania (4.5) w postaci zamkniętej, można je rozwiązać np. numerycznie. W tym celu całkę z lewej strony wzoru (4.5) zastępuje się sumą skończoną:

$$(4.6) \quad \int_0^1 K(\theta, \omega) t(\omega) d\omega = \sum_{i=1}^n K(\theta, \omega_i) t(\omega_i) d\omega_i.$$

Po wstawieniu tego wyrażenia do wzoru (4.6) mamy

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^n K(\theta, \omega_i) t_i \frac{1}{n} = \text{const}, \quad \sum_{i=1}^n t_i \frac{1}{n} = \frac{P}{2h},$$

gdzie $t_i = t(\omega_i)$, $d\omega_i = 1/n$, ω_i jest odciętą środka przedziału $d\omega_i = 1/n$,

$$\omega_i = (2i+1)/2n \quad \text{oraz} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ponieważ równanie (4.7) ma być spełnione dla każdego θ z podziału $[0, 1]$, więc musi być spełnione w szczególności dla $\theta_j = (2j-1)/2n$. Gdy $\theta_j = \omega_i$, tzn. gdy $i = j$, to $K(\theta_i, \omega_i) = \infty$, ponieważ $\ln(\theta_i - \omega_i) = \infty$. Iloczyn $\ln(\theta_i - \omega_i) d\omega_i = \ln(\theta_i - \omega_i)/n$ można zastąpić w przybliżeniu przez pole zawarte między osią ω a wykresem funkcji $\ln(\theta_i - \omega_i)$ w przedziale $d\omega_i = 1/n$. A więc mamy

$$\ln(\theta - \omega_i) d\omega_i \approx 2 \int_0^{\frac{1}{2n}} \ln z dz = 2z \ln \frac{z}{e} \Big|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln \frac{1}{2ne}.$$

Korzystając z tego wzoru można obliczyć wszystkie wartości $K_{ij} = K(\theta_i, \omega_j)$, gdy $i = j$.

Gdy $i \neq j$ wielkość K_{ij} obliczamy wprost podstawiając do wzoru (4.5):

$$\omega_i = \frac{2i-1}{2n}, \quad \theta_j = \frac{2j-1}{2n}.$$

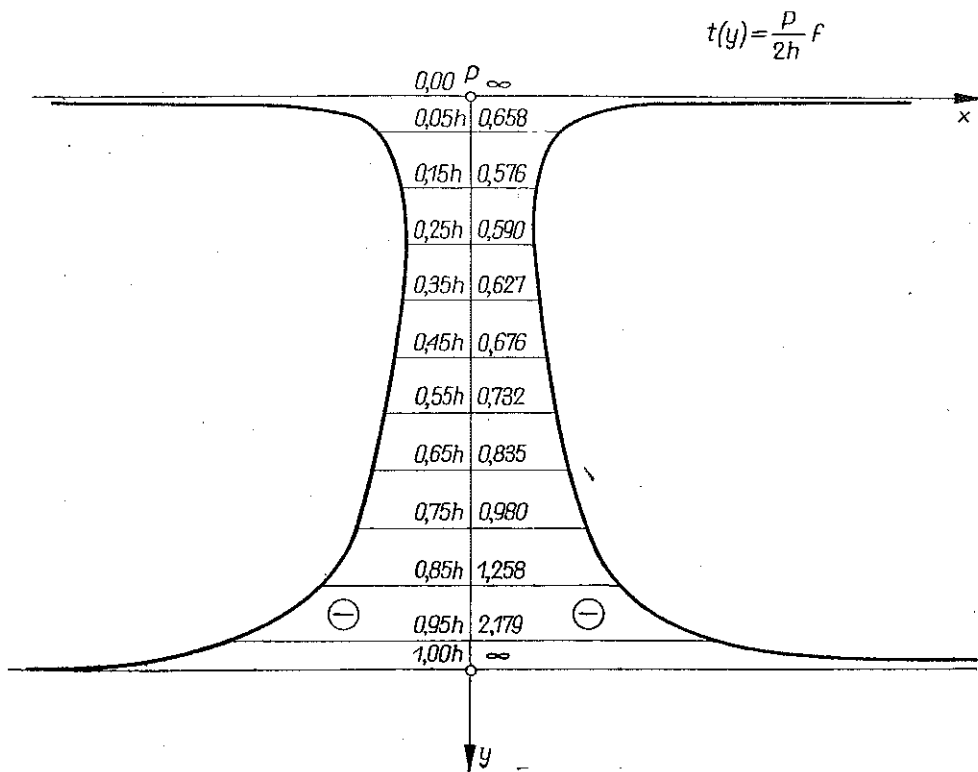
Zamieniając więc całkę po lewej stronie na sumę skończoną o n składnikach dochodzimy do n równań liniowych na wartości rzędnych funkcji t_i :

$$(4.8) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} K_{ij} t_i = 1, \quad \text{gdzie} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Do wyskalowania otrzymanych rzędnych t_i korzysta się z warunku równowagi na linii kontaktu:

$$(4.9) \quad \sum_{i=1}^n t_i \frac{1}{n} = \frac{P}{2h}.$$

Macierzą K_{ij} układu równań liniowych są wartości jądra $K(\theta, \omega)$ w punktach $K(\theta_i, \omega_j)$. Według wyprowadzonych wyżej wzorów wykonano obliczenia na maszynie cyfrowej Odra 1003. Otrzymany rozkład naprężeń stycznych wzdłuż pobocznic pręta jest przedstawiony na rys. 5. Odłożone rzędne należy odczytywać w skali $P/2h$, gdzie P oznacza wartość siły obciążającej oraz h długość pręta.



Rys. 5. Rozkład naprężeń stycznych f na pobocznicę pręta wewnątrz półpłaszczyzny sprężystej

Literatura cytowana w tekście

1. K. GIRKMAN, *Dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1957.
2. T. CARLEMANN, *Sur la résolution de certaines équations intégrales*, Arkiv för matematik, Astr. o Phys., 16 (1922).
3. E. MELAN, *Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchte Halbscheibe*, ZAMM, 6, 12 (1932), 343.
4. I. KISIEL, *Zarys reologii gruntów*, Warszawa 1967.
5. В. А. Флорин, *Основы механики грунтов*, Том I, Гостройиздат, Ленинград 1959.

Резюме

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВДОЛЬ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВНУТРИ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В работе рассматривается упругое полупространство, нагруженное, посредственно, жестким тонким стержнем, расположенным внутри этого полупространства.

Цель работы состоит в определении распределения касательных напряжений, на боковой поверхности стержня, нагруженного сосредоточенной силой.

Задача решается, используя решения для сосредоточенных сил, путем сведения краевых условий для слабо сингулярных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Эти уравнения решаются численно, а результаты приводятся на рисунке 5.

Summary

DISTRIBUTION OF TANGENTIAL STRESS
OVER THE LATERAL SURFACE OF A PILE

The subject of the present considerations is a semi-infinite elastic plate loaded indirectly, by means of a thin rigid bar inside this plate. Our aim is to determine the distribution of the shear stress over the lateral surface of the bar, which is loaded by a concentrated force.

The problem is solved making use of the solutions for concentrated forces by reducing the boundary conditions to weakly singular Fredholm integral equations of the first kind.

This equation is solved numerically and the results are represented in Fig. 5.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 czerwca 1968 r.
