ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
1, 17 (1969)

RÓWNANIA TEORII KONSOLIDACJI W PRZYPADKU WYSTĘPOWANIA ŹRÓDEŁ CIECZY I SZKIELETU

DEZYDERIUSZ PAŃCZAK (POZNAŃ)

Wstęp

Podstawę pracy stanowi teoria konsolidacji sformułowana przez BIOTA w r. 1941 [2].

Celem niniejszych rozważań jest wyprowadzenie równań teorii konsolidacji w przypadku występowania źródła cieczy i szkieletu we wnętrzu ośrodka porowatego. Podamy również rozwiązania szczególne wyprowadzonych równań dla przypadku punktowego, chwilowego źródła cieczy i szkieletu w przestrzeni nieograniczonej oraz dla źródła punktowego o stałej wydajności.

Zgodnie z teorią Biota przepływu cieczy przez porowate ośrodki odkształcalne przyjmujemy w tej pracy następujące założenia:

1) szkielet porowaty jest sprężysty,

2) wszystkie pory szkieletu wypełnione są cieczą nieściśliwą, która może zawierać pęcherzyki powietrza,

3) porowatość objętościowa równa się porowatości powierzchniowej i jest wielkością stałą,

4) porowatość rozpatrywanego ośrodka jest jednorodna w sensie statystycznym,

5) ciecz przepływa przez pory gruntu zgodnie z uogólnionym prawem Darcy'ego [2].

O ile autorowi wiadomo, do chwili obecnej polami ze źródłem tylko cieczy zajmowali się W. DERSKI [5] oraz R. DZIĘCIELAK [7]. W pracy R. DZIĘCIELAKA podane są rozwiązania dla różnych źródeł cieczy, otrzymane za pomocą uogólnionego twierdzenia o wzajemności przemieszczeń.

1. Równania teorii konsolidacji

Równania równowagi wewnętrznej dla ośrodka dwufazowego (ciecz-sprężysty szkielet porowaty) mają postać [2]

$$(\sigma_{ij}+\sigma\delta_{ij})_{,j} = 0, \tag{1.1}$$

przy czym σ_{ij} oznacza tensor stanu naprężenia w szkielecie gruntowym, δ_{ij} jest symbolem Kroneckera, σ jest naprężeniem przenoszonym przez ciecz wypełniającą pory szkieletu i wiąże się z parciem cieczy p za pomocą związku

$$\sigma = -pf, \tag{1.2}$$

gdzie f jest porowatością szkieletu gruntowego.

Drugą grupę równań stanowią związki geometryczne [2]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}), \tag{1.3}$$

przy czym ε_{ij} są współrzędnymi tensora stanu odkształcenia szkieletu porowatego, u_i zaś współrzędnymi wektora przemieszczeń szkieletu porowatego.

Związki fizyczne przyjmujemy w postaci [3]

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij}+(A\varepsilon+Q\theta)\,\delta_{ij}, \qquad \sigma = Q\varepsilon+R\theta. \tag{1.4}$$

W tych równaniach A, N, Q i R są stałymi zależnymi od rodzaju ośrodka, określonymi w pracy Biota i Willisa [4]. Dylatację cieczy θ oraz dylatację szkieletu ε określają wzory

$$\theta = U_{l,l}, \qquad \varepsilon = u_{l,l}, \tag{1.5}$$

przy czym U_i są współrzędnymi wektora przemieszczeń cieczy.

W dalszym ciągu posłużymy się również inną postacią związków fizycznych, otrzymanych przez wyeliminowanie dylatacji cieczy θ w związkach (1.4) za pomocą ostatniego z tych związków. W wyniku otrzymujemy

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij}+\left(M\varepsilon+\frac{Q}{R}\sigma\right)\delta_{ij}, \qquad M = \frac{AR-Q^2}{R}. \tag{1.6}$$

Powyższe wzory uzupełnia uogólnione prawo Darcy'ego [2]

$$\dot{U}_i - \dot{u}_i = -\frac{k}{f}p_{,i}, \qquad (\dot{\cdot}) = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.7}$$

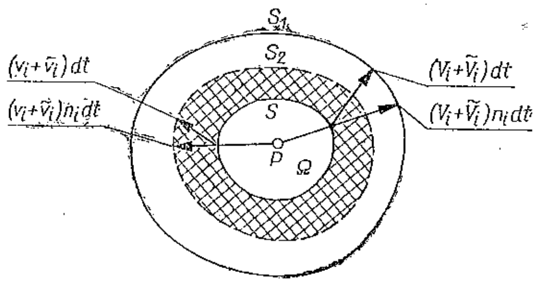
przy czym k jest współczynnikiem przepuszczalności szkieletu porowatego.

Wypisane wyżej prawo Darcy'ego nie uwzględnia działania źródeł we wnętrzu obszaru. Uogólnieniem tego prawa na przypadki działania źródeł zajmiemy się w następnym punkcie.

2. Równania teorii konsolidacji w przypadku działania źródeł cieczy i szkieletu

Nasze rozważania rozpoczniemy od wyprowadzenia równania przepływu. Dla prostoty wywodu pominiemy działanie sił masowych. Z obszaru rozpatrywanego ośrodka wydzielimy pewną objętość Ω, ograniczoną gładką powierzchnią S (rys. 1). Przyjmiemy, że w badanym obszarze istnieje źródło dylatacji cieczy i szkieletu. Posłużymy się prostokątnym układem współrzędnych kartezjańskich i wprowadzimy następujące oznaczenia: $\tilde{V}_i$ oznaczać będzie współrzędne wektora prędkości cieczy wywołane tylko działaniem źródła, V_i współrzędne wektora prędkości cieczy wywołane innymi przyczynami, $\tilde{v}_i$ współrzędne wektora prędkości przemieszczeń szkieletu wywołanych działaniem tylko źródła oraz v_i współrzędne wektora prędkości szkieletu wywołane innymi przyczynami.

Pod wpływem działania źródła dylatacji powierzchnia S, utworzona zarówno z cząsteczek szkieletu gruntowego jak i z cząsteczek cieczy, przemieści się. Po upływie czasu dt cząsteczki cieczy przejdą z powierzchni S w inne położenie.



Rys. 1

Przemieszczenia wyniosą $(V_i+\tilde{V}_i)\,dt$; utworzą one powierzchnię S_1. W tym samym czasie przemieszczenia cząsteczek szkieletu z powierzchni S wyniosą $(v_i+\tilde{v}_i)\,dt$ i utworzą powierzchnię S_2. Współrzędne wektora prędkości przemieszczeń szkieletu, wywołanych działaniem źródła, oraz współrzędne wektora prędkości szkieletu, wywołane innymi przyczynami, spełniają rolę prędkości unoszenia względem ruchu cieczy. Strumień cieczy przepływającej przez powierzchnię S w czasie dt równa się więc

$$dt\,f\int_S (V_i+\tilde{V}_i)\,n_i\,dS - dt\,f\int_S (v_i+\tilde{v}_i)\,n_i\,dS, \tag{2.1}$$

przy czym n_i są cosinusami kierunkowymi normalnej zewnętrznej do powierzchni S.

Stwierdziliśmy więc, że objętość cieczy zawartej w obszarze Ω powiększa się w czasie dt o wielkość określoną różnicą strumieni cieczy i szkieletu przez powierzchnię S.

Zgodnie z uogólnionym prawem Darcy'ego [por. (1.7)] prędkość przepływu cieczy przez powierzchnię porowatą jest proporcjonalna do gradientu ciśnienia cieczy, co w naszym przypadku opisuje równanie

$$f(V_i+\tilde{V}_i) - f(v_i+\tilde{v}_i) = -kp_{,i}. \tag{2.2}$$

Wykorzystujemy związek (1.2) i równanie (2.2) przepisujemy w postaci

$$(V_i+\tilde{V}_i) - (v_i+\tilde{v}_i) = C\sigma_{,i}, \qquad C = \frac{k}{f^2}, \tag{2.3}$$

przy czym C oznacza przepuszczalność szkieletu porowatego.

Równanie (2.3) mnożymy obustronnie przez $f\,dt\,n_i$:

$$f\,dt\,(V_i+\tilde{V}_i)\,n_i - f\,dt\,(v_i+\tilde{v}_i)\,n_i = f\,dt\,C\sigma_{,i}\,n_i.$$

Całkując po powierzchni S otrzymujemy

$$f\,dt\int_S (V_i+\tilde{V}_i)\,n_i\,dS - f\,dt\int_S (v_i+\tilde{v}_i)\,n_i\,dS = f\,dt\,C\int_S \sigma_{,i}\,n_i\,dS. \tag{2.4}$$

Zauważmy, że lewa strona tego równania jest strumieniem cieczy przez powierzchnię S.

Po zastosowaniu twierdzenia Greena ([11], str. 176), równanie (2.4) przyjmuje postać

$$dt\int_{\Omega}(V_{i,i}+\tilde{V}_{i,i})\,d\Omega-dt\int_{\Omega}(v_{i,i}+\tilde{v}_{i,i})\,d\Omega=dt\,C\int_{\Omega}\nabla^2\sigma d\Omega. \tag{2.5}$$

W równaniu tym $V_{i,i}=\dot{\theta}$ jest prędkością dylatacji cieczy, a $v_{i,i}=\dot{\varepsilon}$ wyraża prędkość dylatacji szkieletu. Zatem zamiast (2.5) możemy napisać

$$dt\int_{\Omega}(\dot{\theta}+\tilde{V}_{i,i})\,d\Omega-dt\int_{\Omega}(\dot{\varepsilon}+\tilde{v}_{i,i})\,d\Omega=dt\,C\int_{\Omega}\nabla^2\sigma d\Omega. \tag{2.6}$$

Wykonujemy przejście graniczne $\Omega\to 0$ w taki sposób, aby we wnętrzu obszaru było zawarte źródło w punkcie P ([10], str. 213). Wtedy

$$\lim_{\Omega\to 0}\frac{1}{\Omega}\frac{d\Omega}{dt}=\lim_{\Omega\to 0}\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}(\dot{\theta}-\dot{\varepsilon}+\tilde{V}_{i,i}-\tilde{v}_{i,i})\,d\Omega=\lim_{\Omega\to 0}C\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}\nabla^2\sigma d\Omega. \tag{2.7}$$

W granicy otrzymujemy równanie przepływu cieczy w przypadku działania źródła cieczy i szkieletu:

$$C\nabla^2\sigma=\dot{\theta}-\dot{\varepsilon}+\tilde{V}_{i,i}-\tilde{v}_{i,i}. \tag{2.8}$$

Wprowadzimy teraz pojęcie wydatku źródła. Niech W oznacza całkowity wydatek źródła cieczy i szkieletu na jednostkę objętości i jednostkę czasu. Przyjmując, że f_0 jest porowatością w obszarze źródła możemy wypisać związki

$$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{V}}=\tilde{V}_{i,i}=f_0W,\qquad \operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}=\tilde{v}_{i,i}=(1-f_0)W. \tag{2.9}$$

Równanie przepływu cieczy (2.8) możemy więc napisać w postaci

$$C\nabla^2\sigma=\dot{\theta}-\dot{\varepsilon}-aW,\qquad a=1-2f_0. \tag{2.10}$$

Do szczegółowej dyskusji tego równania powrócimy w dalszym ciągu pracy.

Jeżeli wykorzystamy ostatni ze związków fizycznych (1.4), to po wyrugowaniu $\dot{\theta}$ nasze równanie przyjmuje postać

$$C\nabla^2\sigma=\frac{1}{R}\dot{\sigma}-\frac{H}{R}\dot{\varepsilon}-aW,\qquad H=Q+R. \tag{2.11}$$

W dalszym ciągu naszych rozważań zajmiemy się związkiem między ciśnieniem q, wywołanym bezpośrednio działaniem źródła cieczy i szkieletu i funkcją wydatku źródła W. Jeśli pominiemy wszystkie inne wpływy, a zajmiemy się wyłącznie ciśnieniem q, wywołanym bezpośrednio działaniem źródła, to korzystając ze zmodyfikowanego prawa Darcy'ego (2.3) możemy napisać

$$\tilde{V}_i-\tilde{v}_i=-\frac{k}{f}f_0\,q_{,i}. \tag{2.12}$$

Po dokonaniu różniczkowania względem x_i znajdujemy

$$\tilde{V}_{i,i} - \tilde{v}_{i,i} = -\frac{kf_0}{f} \nabla^2 q.$$

Wykorzystując związki (2.9) otrzymujemy równanie Poissona

$$\nabla^2 q = \frac{af}{kf_0} W. \tag{2.13}$$

Zajmiemy się z kolei budową związków fizycznych w przypadku działania źródeł dylatacji cieczy i szkieletu. Naprężenia wywołane działaniem tylko źródła tworzą tensor kulisty i wyrażają się związkiem

$$\sigma^{(0)} = -f_0 q \tag{2.14}$$

oraz

$$\sigma_{ij}^{(0)} = -(1-f_0) q\delta_{ij}, \tag{2.15}$$

przy czym $\sigma^{(0)}$ jest naprężeniem normalnym przenoszonym przez ciecz, a $\sigma_{ij}^{(0)}$ jest naprężeniem przenoszonym przez szkielet porowaty.

Pole naprężeń w szkielecie gruntowym jest sumą

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(0)}, \tag{2.16}$$

przy czym współrzędne stanu naprężenia $\sigma_{ij}^{(1)}$, powstałe na skutek działania innych przyczyn, określone są związkami (1.6).

Poszukiwane związki fizyczne dla przypadku działania źródła cieczy i szkieletu wyrażamy ostatecznie w postaci

$$\sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + \left(M\varepsilon + \frac{Q}{R}\sigma\right)\delta_{ij} - (1-f_0) q\delta_{ij}. \tag{2.17}$$

Przystąpimy obecnie do wyprowadzenia równań końcowych. W tym celu związki fizyczne (2.17) podstawiamy w równania równowagi wewnętrznej (1.1), wykorzystujemy związki geometryczne (1.3) i dochodzimy do równań przemieszczeniowych teorii konsolidacji w przypadku działania źródła cieczy i szkieletu:

$$N\nabla^2 u_i + (M+N)\varepsilon_{,i} - (1-f_0) q_{,i} = -\frac{H}{R}\sigma_{,i}. \tag{2.18}$$

Tak więc poszukiwany układ równań teorii konsolidacji w przypadku działania źródeł cieczy i szkieletu ma budowę

$$\begin{gathered} N\nabla^2 u_i + (M+N)\varepsilon_{,i} - (1-f_0) q_{,i} = -\frac{H}{R}\sigma_{,i}, \\ C\nabla^2 \sigma = \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon} - aW, \quad a = 1-2f_0, \\ \nabla^2 q = \frac{af}{kf_0} W. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Otrzymany układ równań składa się ze sprzężonego za pośrednictwem σ i ε układu równań przemieszczeniowych i równania przepływu oraz niezależnego równania Poissona.

Rozważymy teraz pewne przypadki w zależności od porowatości źródła f_0:

a. W przypadku, gdy porowatość źródła $f_0 = 1$, występuje wyłącznie źródło cieczy. Wtedy współczynnik $a = -1$ i układ wrónań (2.19) przyjmuje znaną już postać [6]

$$(2.20)\qquad \begin{aligned} &N\nabla^2 u_i + (M+N)\,\varepsilon_{,i} = -\frac{H}{R}\,\sigma_{,i},\\ &C\nabla^2\sigma = \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon} + W, \end{aligned}$$

przy czym niezależne równanie Poissona jest tutaj zbędne.

b. Sytuację w przypadku $f_0 = 1/2$ opisuje jednorodne równanie przepływu cieczy, ponieważ współczynnik $a = 0$. Funkcja wydatku źródła cieczy i szkieletu nie ma bezpośredniego wpływu na przepływ cieczy i układ równań ma postać

$$(2.21)\qquad \begin{aligned} &N\nabla^2 u_i + (M+N)\varepsilon_{,i} - \frac{1}{2}q_{,i} = -\frac{H}{R}\,\sigma_{,i},\\ &C\nabla^2\sigma = \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon},\\ &\nabla^2 q = 0. \end{aligned}$$

c. Interesującym wydaje się przypadek, gdy porowatość w otoczeniu źródła $f_0 < 1/2$ i wydatek źródła cieczy i szkieletu $W > 0$. Wtedy dodatnie źródło masy ośrodka działa jak źródło ujemne w równaniu przepływu. Otrzymany wynik objaśnia się tym, że na skutek działania źródła w jego otoczeniu przybywa więcej masy szkieletu niż cieczy. To powoduje ubytek cieczy wypieranej przez masę szkieletu.

d. W przypadku, gdy wydatek źródła równa się zeru, otrzymujemy jednorodny układ równań teorii konsolidacji [6]:

$$(2.22)\qquad N\nabla^2 u_i + (M+N)\,\varepsilon_{,i} = -\frac{H}{R}\,\sigma_{,i}, \qquad C\nabla^2\sigma = \frac{1}{R}\dot{\sigma} - \frac{H}{R}\dot{\varepsilon}.$$

3. Rozwiązanie układu równań teorii konsolidacji w przypadku działania punktowego, chwilowego źródła cieczy i szkieletu w przestrzeni konsolidującej

Rozwiążemy układ równań (2.19) w przypadku nieograniczonego ośrodka porowatego, w którym w chwili $t = 0$ przyłożone jest chwilowe, punktowe źródło cieczy i szkieletu. Zakładamy, że w chwili $t = 0$ przestrzeń znajduje się w stanie naturalnym. Posługujemy się transformacją Laplace'a określoną całką ([9], str. 72)

$$(3.1)\qquad \varphi_L = \int_0^\infty \varphi e^{-st}\,dt, \qquad s = \alpha + i\beta.$$

Po wykonaniu transformacji układ równań (2.19) przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
& N\nabla^2 u_{Li}+(M+N)\,\varepsilon_{L,i}-(1-f_0)\,q_{L,i}=-\frac{H}{R}\,\sigma_{L,i},\\
(3.2)\qquad & C\nabla^2\sigma_L=\frac{s}{R}\,\sigma_L-\frac{sH}{R}\,\varepsilon_L-aW_L,\\
& \nabla^2 q_L=\frac{af}{kf_0}\,W_L.
\end{aligned}
$$

Przemieszczenia u_i wyrażamy za pomocą funkcji potencjału

$$u_{Li}=\Phi_{L,i}, \tag{3.3}$$

przy czym Φ_L jest jej transformatą Laplace'a określoną za pomocą wzoru (3.1).

Wykorzystajmy związek (3.3) w równaniach przemieszczeniowych oraz w równaniu przepływu:

$$
\begin{aligned}
& N\nabla^2\Phi_{L,i}+(M+N)\,\nabla^2\Phi_{L,i}-(1-f_0)\,q_{L,i}=-\frac{H}{R}\,\sigma_{L,i},\\
(3.4)\qquad & C\nabla^2\sigma_L=\frac{s}{R}\,\sigma_L-\frac{sH}{R}\,\nabla^2\Phi_L-aW_L.
\end{aligned}
$$

Po wykonaniu całkowania względem x_i rówania przemieszczeniowe redukują się do jednego równania

$$(M+2N)\,\nabla^2\Phi_L=(1-f_0)\,q_L-\frac{H}{R}\,\sigma_L. \tag{3.5}$$

Z tego równania obliczamy $\nabla^2\Phi_L$ i podstawiamy do równania przepływu (3.4), które po uporządkowaniu przyjmuje postać

$$C\nabla^2\sigma_L=sK\sigma_L-sK_1(1-f_0)\,q_L-aW_L, \tag{3.6}$$

przy czym

$$
\begin{aligned}
& K=\frac{R(M+2N)+H^2}{R^2(M+2N)}=\frac{A+R+2(Q+N)}{AR-Q^2+2NR},\\
(3.7)\qquad & K_1=\frac{H}{R(M+2N)}.
\end{aligned}
$$

W celu rozwiązania równania (3.6) musimy wpierw rozwiązać niezależne równanie Poissona (3.2)

$$\nabla^2 q_L=\frac{af}{kf_0}\,W_L. \tag{3.8}$$

W naszych rozważaniach posłużymy się współrzędnymi walcowymi. Układ współrzędnych przyjmujemy w taki sposób, aby jego początek pokrywał się z punktem działania źródła.

Zgodnie z naszymi założeniami transformata Laplace'a punktowego, chwilowego źródła wyraża się wzorem

$$W_L = W_0 \frac{\delta(\varrho)}{2\pi\varrho} \delta(z), \qquad \varrho = \sqrt{x_1^2+x_2^2}, \qquad z = x_3. \tag{3.9}$$

W równaniu tym $\delta(\varrho)$ i $\delta(z)$ są funkcjami miejsca Diraca. Wiedząc, że ([8], str. 19 i 27)

$$\frac{\delta(\varrho)}{\varrho} = \int_0^\infty \alpha J_0(\alpha\varrho)\, d\alpha, \qquad \delta(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\beta z)\, d\beta, \tag{3.10}$$

rozwiązania równania (3.8) poszukujemy w postaci

$$q_L = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty A(\alpha,\beta) J_0(\alpha\varrho)\cos(\beta z)\, d\beta. \tag{3.11}$$

Parametr $A(\alpha,\beta)$ wyznaczamy z warunku spełnienia równania (3.8) i otrzymujemy

$$q_L = -\frac{afW_0}{2\pi^2 kf_0}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha\varrho)\cos(\beta z)\, d\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{3.12}$$

Po obliczeniu całek ([1], T. I str. 8 i T. II str. 9)

$$q_L = -\frac{afW_0}{4\pi kf_0 r}, \qquad r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}. \tag{3.13}$$

Poszukiwane rozwiązanie równania Poissona (3.8) otrzymujemy z odwrotnej transformacji Laplace'a określonej wzorem ([9], str. 104)

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \varphi_L e^{st}\, ds, \tag{3.14}$$

a zatem

$$q(r,t) = \frac{afW_0}{4\pi kf_0 r}\delta(t). \tag{3.15}$$

Rozwiązanie równania przepływu (3.6) poszukujemy w postaci

$$\sigma_L = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty B(\alpha,\beta) J_0(\alpha\varrho)\cos(\beta z)\, d\beta. \tag{3.16}$$

Po uwzględnieniu wzorów (3.12), (3.9) oraz (3.16) w równaniu (3.6) znajdujemy parametr $B(\alpha,\beta)$ i transformatę rozwiązania równania przepływu piszemy w postaci

$$\sigma_L = -\frac{afW_0(1-f_0)sK_1}{2\pi^2 kf_0 C}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha\varrho)\cos(\beta z)\, d\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\left(\alpha^2+\beta^2+\dfrac{sK}{C}\right)} + \frac{aW_0}{2\pi^2 C}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha\varrho)\cos(\beta z)\, d\beta}{\alpha^2+\beta^2+\dfrac{sK}{C}}. \tag{3.17}$$

Obliczymy całki ([1], t. I, str. 8 i t. II, str. 9) i po wykonaniu odpowiednich operacji poszukiwaną transformatę rozwiązania piszemy ostatecznie w postaci

$$\sigma_L = \frac{aW_0}{4\pi r C}\exp\left(-r\sqrt{\frac{sK}{C}}\right)+\frac{afW_0 K_1(1-f_0)}{4\pi r K k f_0}\exp\left(-r\sqrt{\frac{sK}{C}}\right). \tag{3.18}$$

Poszukiwane rozwiązanie równania przepływu wyznaczamy za pomocą transformacji odwrotnej Laplace'a (3.14) ([1], t. I, str. 245) i otrzymujemy

$$\sigma = \frac{aW_0}{K(\pi\vartheta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{\vartheta}\right)+\frac{afW_0 K_1 C(1-f_0)}{K^2 k f_0 (\pi\vartheta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{\vartheta}\right), \tag{3.19}$$

przy czym $\vartheta = 4\dfrac{C}{K}t$.

Przejście graniczne $f_0 \to 1$, co odpowiada działaniu źródła tylko cieczy, prowadzi do znanego już rozwiązania [6]

$$\sigma = \frac{-W_0}{K(\pi\vartheta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{\vartheta}\right). \tag{3.20}$$

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem przemieszczeń. W tym celu wyznaczamy transformatę funkcji potencjału przemieszczenia dyfuzyjnego Φ_L [por. (3.5)]. Ze względu na trudności rachunkowe przy bezpośrednim rozwiązywaniu równania postąpimy tutaj inaczej niż przy wyznaczeniu funkcji parcia cieczy. Wykorzystamy mianowicie fakt, że prawą stronę równania (3.5) stanowią znane już transformaty funkcji q_L i σ_L, określone wzorami (3.13) i (3.18). Biorąc jednocześnie pod uwagę równanie przepływu w postaci (3.6), z którego wynika, że

$$\sigma_L = \frac{C}{sK}\nabla^2\sigma_L+\frac{K_1}{K}(1-f_0)\,q_L+\frac{aW_L}{sK}, \tag{3.21}$$

równanie (3.5) zapisujemy następująco:

$$\nabla^2\Phi_L = \left(C_1-\frac{b}{a_1}K_1\right)q_L-\frac{K_1}{a_1}\nabla^2\sigma_L-\frac{K_1}{a_1}W_{1L}, \tag{3.22}$$

przy czym

$$a_1 = \frac{sK}{C},\qquad b = \frac{sK_1(1-f_0)}{C},$$

$$C_1 = K_1\frac{R}{H}(1-f_0),\qquad W_1 = \frac{a}{C}W_L.$$

W dalszym ciągu rozważań posłużymy się układem współrzędnych sferycznych. Równanie (3.22) przepisujemy w postaci

$$\nabla^2\Phi_L = \frac{A}{r}-\frac{K_1}{a_1}\nabla^2\sigma_L-B\frac{\delta(r)}{4\pi r^2}+\frac{d_1}{r}, \tag{3.23}$$

gdzie

$$A = -\left(C_1 - \frac{b}{a_1} K_1\right) \frac{afW_0}{4\pi kf_0}, \qquad B = \frac{aK_1}{Ca_1} W_0,$$

oraz d_1/r oznacza całką równania $\nabla^2 \bar{q} = 0$.

Rozwiązania równania (3.23) poszukujemy w postaci sumy

$$\Phi_L = \Phi_{L1} + \Psi_L + \Phi_{L0}, \tag{3.24}$$

przy czym

$$\Phi_{L1} = -\frac{K_1}{a_1} \sigma_L; \tag{3.25}$$

Φ_{L0} jest rozwiązaniem jednorodnego równania Laplace'a

$$\nabla^2 \Phi_{L0} = 0, \tag{3.26}$$

a Ψ_L rozwiązaniem równania Poissona

$$\nabla^2 \Psi_L = \frac{A}{r} - B\frac{\delta(r)}{4\pi r^2} + \frac{d_1}{r}. \tag{3.27}$$

W wyniku prostych operacji znajdujemy transformatę funkcji potencjału przemieszczenia

$$\Phi_L = -\frac{K_1}{a_1} \sigma_L - \frac{B}{4\pi r} + \frac{D}{r} + \frac{A}{2} r + \frac{d_1}{2} r + E, \tag{3.28}$$

przy czym D i E są stałymi całkowania.

Do wzoru (3.28) podstawiamy rozwiązanie (3.18), wyznaczamy stałą D oraz E i otrzymujemy transformatę funkcji potencjału przemieszczeń w postaci

$$\Phi_L = \frac{h}{Krs} \left(1 - e^{-r\sqrt{\frac{sK}{C}}}\right), \tag{3.29}$$

przy czym

$$h = \frac{K_1 aW_0}{4\pi} \left[1 + \frac{fK_1(1-f_0)}{Kkf_0}\right].$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej, określonej wzorem (3.14), otrzymujemy funkcję potencjału przemieszczeń w postaci prostego wzoru

$$\Phi = \frac{h}{Kr} \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\vartheta}\right), \tag{3.30}$$

przy czym ([11], str. 520)

$$\operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\eta^2} d\eta$$

jest funkcją błędu Krampa-Laplace'a.

W układzie współrzędnych sferycznych tylko jedna składowa przemieszczenia jest różna od zera. Jest to przemieszczenie w kierunku promieniowym, które zgodnie z definicją (3.3) wynosi

$$u_r = \Phi_{,r} = -\frac{h}{Kr^2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{r^2}{\vartheta}\right)\right]. \tag{3.31}$$

Przejście graniczne $f_0 \to 1$, co odpowiada działaniu źródła tylko cieczy, prowadzi do znanego już rozwiązania [6]

$$u_r = \frac{K_1 W_0}{4\pi K r^2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{\vartheta}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{r^2}{\vartheta}\right)\right]. \tag{3.32}$$

4. Przypadek stałego wydatku źródła cieczy i szkieletu w nieograniczonej przestrzeni konsolidującej

W celu wyznaczenia rozwiązania w przypadku działania źródła masy ośrodka o stałej wydajności w czasie wykorzystamy otrzymane w poprzednim punkcie rozwiązania (3.19) oraz (3.31). Te rozwiązania możemy uważać za funkcje Greena dla przestrzeni konsolidującej.

Przyjmiemy, że w pewnym obszarze Ω' nieograniczonej przestrzeni konsolidującej w chwili $t = 0$ zaczynają działać źródła cieczy i szkieletu, których wydatek i rozkład określa funkcja $W(x_i, t)$. Zgodnie z zasadą superpozycji odpowiednie rozwiązania określają wzory ([11], str. 640)

$$\begin{aligned} \sigma(x_r, t) &= \int_0^t \int_{(\Omega')} W(\xi_r, \tau)\, \sigma^*(x_r, \xi_r; t-\tau)\, d\tau d\Omega'(\xi_r), \\ u_r(x_r, t) &= \int_0^t \int_{(\Omega')} W(\xi_r, \tau)\, u_i^*(x_r, \xi_r; t-\tau)\, d\tau\, d\Omega'(\xi_r), \end{aligned} \tag{4.1}$$

w których funkcje σ^* oraz u_i^* są wyznaczonymi w poprzednim punkcie funkcjami Greena.

Funkcję źródła cieczy i szkieletu, zgodnie z założeniem, przyjmujemy w postaci

$$W(x_r, t) = W_0\, \delta(x_r)\, \eta(t), \tag{4.2}$$

przy czym $\eta(t)$ jest funkcją Heaviside'a.

Ponieważ w funkcji źródła (4.2) występują funkcje Diraca $\delta(x_r)$, to operację całkowania we wzorach (4.1) sprowadza się tylko do całkowania względem czasu, tzn.

$$\begin{aligned} \sigma(r, t) &= \int_0^t W_0\, \sigma^*(r; t-\tau)\, d\tau, \\ u_r(r, t) &= \int_0^t W_0\, u_r^*(r; t-\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{4.3}$$

przy czym σ^* oraz u_r^* są funkcjami określonymi wzorami (3.19) i (3.31), w których na miejsce t podstawiamy różnicę $t - \tau$.

Uwzględniamy rozwiązanie (3.19) i całkę Duhamela (4.3) piszemy w postaci

$$\sigma(r,t) = \bar{A}\int_0^t e^{-\frac{\lambda^2}{t-\tau}}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \bar{B}\int_0^t e^{-\frac{\lambda^2}{t-\tau}}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}, \tag{4.4}$$

gdzie

$$\bar{A} = \frac{aW_0\sqrt{K}}{8\pi^{3/2}C^{3/2}}, \quad \bar{B} = \frac{afW_0K_1(1-f_0)}{\sqrt{\pi}\sqrt{C}\,\pi^{3/2}\,8kf_0}, \quad \lambda^2 = \frac{r^2K}{4C}.$$

Po wykonaniu typowych operacji całkowania funkcję parcia cieczy opisuje wzór

$$\sigma(r,t) = \frac{aW_0}{4\pi Cr}\left[1+\frac{(1-f_0)K_1}{fKf_0}\right]\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{\vartheta}}\right). \tag{4.5}$$

Przejście graniczne $f_0 \to 1$, odpowiadające działaniu źródła tylko cieczy, prowadzi do znanego już rozwiązania [6]

$$\sigma(r,t) = \frac{-W_0}{4\pi Cr}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{\vartheta}}\right)\right]. \tag{4.6}$$

Zajmiemy się z kolei wyznaczeniem funkcji przemieszczenia. Poszukiwane rozwiązanie określa wzór

$$u_r(r,t) = \bar{\bar{A}}\left[\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau - \frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{e^{-\frac{a^2}{t-\tau}}}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau\right], \tag{4.7}$$

przy czym

$$\bar{\bar{A}} = -\frac{h}{Kr^2}, \quad a = \frac{r}{\sqrt{4\frac{C}{K}}}.$$

Po obliczeniu całek i uporządkowaniu wzór (4.7) piszemy w postaci

$$u_r(r,t) = -\frac{h}{2C}\left[1-\left(1-\frac{\vartheta}{2r^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\vartheta}{\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{\vartheta}\right)\right]. \tag{4.8}$$

Przejście graniczne $f_0 \to 1$, co odpowiada działaniu źródła tylko cieczy, prowadzi do znanego już rozwiązania [6]

$$u_r(r,t) = \frac{K_1W_0}{8\pi C}\left[1-\left(1-\frac{\vartheta}{2r^2}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{\vartheta}}\right)-\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\vartheta}{\pi}}\exp\left(-\frac{r^2}{\vartheta}\right)\right]. \tag{4.9}$$

Uwagi końcowe

W niniejszej pracy wyprowadzono równania teorii konsolidacji w przypadku działania źródła cieczy i szkieletu wewnątrz obszaru. Dotychczas znany jest układ równań teorii konsolidacji dla przypadku działania źródeł tylko cieczy [6].

Przy wyprowadzeniu równań teorii konsolidacji oparto się na sformułowanej przez Biota teorii przepływu cieczy przez porowate ośrodki odkształcalne i posłużono się uogólnionym prawem Darcy'ego. Otrzymano układ równań różniczkowych sprzężonych (2.19), składający się z trzech równań przemieszczeniowych, równania przepływu i niezależnego równania Poissona.

Podano rozwiązania wyprowadzonego układu równań w przypadku punktowego, chwilowego wydatku źródła, opisanego funkcją

$$W = W_0 \, \delta(x_i) \, \delta(t)$$

oraz dla przypadku działania źródła punktowego o stałej wydajności w czasie

$$W = W_0 \, \delta(x_r) \, \eta(t).$$

W przypadku przejścia granicznego, gdy porowatość w obszarze $f_0 \to 1$, co odpowiada działaniu źródła tylko cieczy, otrzymano znane już rozwiązania [6]. Budowa otrzymanych rozwiązań jest taka sama, jak budowa znanych rozwiązań dla $f_0 = 1$. Rozwiązania te różnią się między sobą tylko stałymi współczynnikami. Można to stwierdzić przez porównanie wzorów (3.19) i (3.31) oraz (4.5) i (4.8).

W praktyce najczęściej mamy do czynienia z dodatnim wydatkiem źródeł $W > 0$ oraz porowatością w otoczeniu źródła $f_0 < 1/2$. W takich przypadkach działanie dodatniego źródła wywołuje zjawisko ubytku cieczy w otoczeniu źródła.

Sytuację w przypadku $f = 1/2$ opisuje jednorodne równanie przepływu cieczy. Funkcja wydatku źródła cieczy i szkieletu nie ma bezpośredniego wpływu na przepływ cieczy [por. (2.21)].

W przypadku, gdy wydatek źródła równa się zeru, otrzymujemy jednorodny układ równań teorii konsolidacji [6].

Zdaniem autora otrzymany układ równań teorii konsolidacji i jego rozwiązania mogą znaleźć zastosowanie w zagadnieniach hydrogeologicznych i w praktyce górniczej.

Literatura cytowana w tekście

1. H. Bateman, *Tables of Integral Transforms*, Vol. I, II, McGraw-Hill, 1954.
2. M. A. Biot, *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., **12** (1941), 115–164.
3. M. A. Biot, *General solution of the equations of elasticity and consolidation of a porous material*, J. Appl. Phys., **23** (1956), 91–96.
4. M. A. Biot, D. G. Willis, *The elastic coefficients of the theory of consolidation*, J. Appl. Mech., **24** (1957), 594–601.
5. W. Derski, *Equations of the consolidation theory for the case of a course of fluid*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 1, 1965, 37.
6. W. Derski, *O zagadnieniach teorii konsolidacji*, Arch. Hydrotechn., 1, **13** (1966).
7. R. Dzięcielak, *Zastosowanie twierdzenia o wzajemności przemieszczeń do wyznaczenia rozwiązań osobliwych teorii konsolidacji*, Acta Mechanika (w druku).
8. Д. Иваненко, А. Соколов, *Классическая теория поля*, Москва-Ленинград 1951.
9. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
10. J. L. Synge, A. Schild, *Tensor Calculus*, Univ. of Toronto-Press, 1959.
11. T. Trajdos-Wróbel, *Matematyka dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1965.

Резюме

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ КОНСОЛИДАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ ЖИДКОСТИ И СКЕЛЕТА

Целью работы является выведение уравнений теории консолидации при наличии источников жидкости и скелета внутри пористой среды. Даются также особые решения выведенных уравнений для точечного случая, мгновенного источника жидкости и скелета в неограниченном пространстве и для точечного источника и постоянного расхода.

В качестве основы рассуждений принято сформулированную Биотом теорию потока жидкости сквозь пористые деформируемые среды и при использовании обобщенного закона Дарси. Получено систему дифференциальных сопряженных уравнений, состоящую из трех уравнений в перемещениях, уравнений течения и независимого уравнения Пуассона.

Решения, выведенной системы уравнений для случая предельного перехода, когда пористость в окрестности источника $f_0 \to 1$, что соответствует действию источника только жидкости, приводят к известным формулам Дэрского.

Полученная система уравнений теории консолидации и ее решений могут найти применение в гидрогеологических вопросах и в горном деле.

Summary

EQUATIONS OF THE THEORY OF CONSOLIDATION IN THE CASE OF PRESENCE OF LIQUID SOURCES AND A SKELETON

The object of the present considerations is to derive the equations of the theory of consolidation for a porous body in the case of a source of liquid and a skeleton. The equations derived are used to obtain the solutions for the particular cases of an instanteneous point source of liquid and a skeleton in the infinite space and a point source of constant intensity.

The argument is based on the theory of liquid flow through deformable porous bodies established by Biot and on the generalized Darcy law. A set of coupled differential equations is obtained, composed of the three equations of displacement, the flow equation and an independent Poisson equation. In the limit case, in which the porosity $f_0 \to 1$, in the neighbourhood of the source, which corresponds to the action of a liquid source alone, the solution of this set of equations leads to the known equations of Derski.

The set of equations of the theory of consolidation thus found and their solution may find application to hydro-geological problems and to those of the mining practice.

WYDZIAŁ BUDOWNICTWA LĄDOWEGO
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 *października* 1967 *r.*