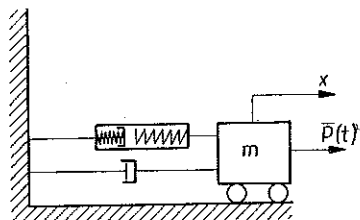


DRGANIA ZDETERMINOWANE I PRZYPADKOWE UKŁADU O JEDNYM STOPNIU SWOBODY PRZY CHARAKTERYSTYCE SPRĘŻYSTOŚCI W POSTACI LINII ŁAMANEJ

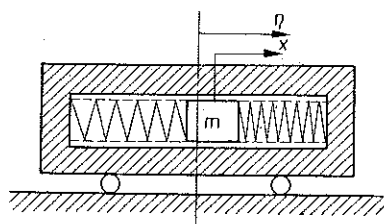
KAZIMIERZ PISZCZEK (KRAKÓW)

Wstęp

Rozważono nieliniowe drgania wymuszone układu o jednym stopniu swobody z uwzględnieniem tłumienia proporcjonalnego do pierwszej potęgi prędkości. Wymuszenie może być siłą, o której zakładamy, że zmienia się harmonicznym z upły-



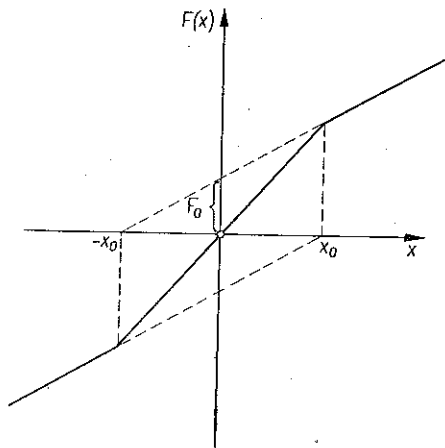
Rys. 1



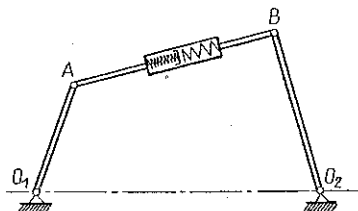
Rys. 2

wem czasu lub że może mieć charakter wymuszenia kinematycznego. Przypadki te przedstawiono na rysunkach 1 i 2.

Czynnikiem nieliniowym jest siła sprężystości, pochodząca od dwóch sprężyn mających te same liniowe charakterystyki sprężystości, przy czym w stanie równowa-



Rys. 3



Rys. 4

gi układu sprężyny są wstępnie odkształcone (skrócone). W czasie ruchu przy odpowiednio dużym przemieszczeniu masy drgającej jedna ze sprężyn traci kontakt z poruszającą się masą (w położeniu $x = \pm x_0$). Opisaną zależność siły sprężystości od przemieszczenia przedstawiono na rys. 3. Jeśli wstępne napięcie sprężyn przyjmiemy równe zeru, to układ staje się liniowym o sile sprężystości $F(x) = cx$, gdzie c jest stałym współczynnikiem sprężystości.

Przykładem zastosowania rozważanego układu mogą być drgania czworoboku przegubowego ze sprężystym ogniowem AB (rys. 4), którego inny rodzaj drgań przedstawiono w pracy [4].

Całość składa się z dwóch części. W pierwszej z nich rozważono drgania w ujęciu zdeterminowanym, wymuszone siłą $P(t) = P_0 \cos vt$. Podano wykresy zależności amplitudy drgań od częstości wymuszenia.

W części drugiej przedstawiono zagadnienie jako proces stochastyczny przy wymuszeniu w postaci białego szumu typu Gaussa. Rozwiązano odpowiednie równanie Fokkera-Plancka i obliczono niektóre charakterystyki.

1. Rozwiązanie równania różniczkowego ruchu

Równanie różniczkowe, opisujące ruch masy m układu przedstawionego na rys. 1 lub rys. 2, ma postać

$$(1.1) \quad m\ddot{x} + \alpha_1 \dot{x} + F(x) = P_0 \cos vt,$$

gdzie $F(x)$ oznacza siłę sprężystości, opisaną funkcjami

$$(1.2) \quad F(x) = \begin{cases} c(x+x_0), & \text{jeśli } x \geq x_0, \\ 2cx, & \text{jeśli } -x_0 \leq x \leq x_0, \\ c(x-x_0), & \text{jeśli } x \leq -x_0, \end{cases}$$

przy czym

$$(1.3) \quad x_0 = \frac{F_0}{c}$$

przedstawia wstępne ugięcie każdej ze sprężyn, a F_0 jest występującą odpowiednio przy tym siłą sprężystości. Funkcja $x(t)$ określa w przypadku rys. 1 bezwzględne przemieszczenie masy, a w przypadku drugim (rys. 2) podaje ruch względny masy (względem obudowy). Amplituda siły wymuszającej P_0 w przypadku wymuszenia kinematycznego opisanego funkcją $\eta(t) = \eta_0 \cos vt$ przyjmuje wartość amplitudy siły bezwładności

$$(1.4) \quad P_0 = m\eta_0 v^2.$$

Po wprowadzeniu następujących wielkości bezwymiarowych ξ , α , γ i τ

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x &= l\xi, & \alpha &= \frac{\alpha_1}{mv}, & \gamma &= \frac{\omega^2}{v^2} \\ \omega^2 &= \frac{c}{m}, & P_0 &= \frac{1}{l} \frac{P_0}{mv^2}, & vt &= \tau \end{aligned}$$

równanie (1.1) przyjmuje postać

$$(1.6) \quad \ddot{\xi} + \psi(\xi, \dot{\xi}; \xi_0) = p_0 \cos \tau,$$

gdzie

$$(1.7) \quad \begin{aligned} l\xi_0 &= x_0, & \psi(\xi, \dot{\xi}, \xi_0) &= \alpha\dot{\xi} + \gamma f(\xi; \xi_0), \\ f(\xi; \xi_0) &= \begin{cases} 2\xi, & \text{jeśli } |\xi| \leq \xi_0 \\ \xi + \xi_0 \operatorname{sgn} \xi, & \text{jeśli } |\xi| \geq \xi_0, \end{cases} \end{aligned}$$

przy czym

$$(1.8) \quad f(\xi; \xi_0) \rightarrow \xi, \quad \text{gdy } \xi_0 \rightarrow 0.$$

Litera l przedstawia pewną wielkość układu drgającego o wymiarze długości.

W celu otrzymania przybliżonego rozwiązania równania (1.6) zastosujemy metodę Kryłowa-Bogolubowa. Niech

$$(1.9) \quad \xi(\tau) = q_1 \cos \theta, \quad \theta = \tau + q_2.$$

Obliczając pierwsze dwie pochodne i wstawiając tak otrzymane wyrażenia do równania (1.6) mamy

$$(1.10) \quad \begin{aligned} -\dot{q}_1 \sin \theta - q_1 \cos \theta - q_1 \dot{q}_2 \cos \theta + \psi(q_1 \cos \theta, -q_1 \sin \theta; \xi_0) &= p_0 \cos(\theta - q_2), \\ \dot{q}_1 \cos \theta - q_1 \dot{q}_2 \sin \theta &= 0. \end{aligned}$$

Pierwsze równanie mnożymy przez $\sin \theta$, drugie przez $\cos \theta$ i po odjęciu stronami pierwszego tak otrzymanego równania od drugiego mamy

$$(1.11) \quad \dot{q}_1 + q_1 \sin \theta \cos \theta - \psi(q_1 \cos \theta, -q_1 \sin \theta; \xi_0) \sin \theta = -p_0 \cos(\theta - q_2) \sin \theta.$$

Drugie równanie mnożymy przez $\sin \theta$, pierwsze przez $\cos \theta$ i dodajemy stronami:

$$(1.12) \quad -q_1 \dot{q}_2 - q_1 \cos^2 \theta + \psi(q_1 \cos \theta, -q_1 \sin \theta; \xi_0) \cos \theta = p_0 \cos(\theta - q_2) \cos \theta.$$

W przypadku wolno zmieniających się z upływem czasu funkcji $q_1(\tau)$ oraz $q_2(\tau)$ dokonujemy operacji uśredniania [1], w wyniku czego otrzymujemy następujący układ równań:

$$(1.13) \quad -2\dot{q}_1 + S(q_1) = p_0 \sin q_2, \quad -2q_1 \dot{q}_2 - q_1 + C(q_1) = p_0 \cos q_2,$$

gdzie

$$(1.14) \quad \begin{aligned} C(q_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(q_1 \cos \theta, -q_1 \sin \theta; \xi_0) \cos \theta d\theta, \\ S(q_1) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(q_1 \cos \theta, -q_1 \sin \theta; \xi_0) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Uwzględniając wzory (1.7) obliczamy w rozważanym przypadku

$$(1.15) \quad C(q_1) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\pi} (q_1 \sin 2\theta_1 - 2q_1 \theta_1 + 2\pi q_1), & \text{jeśli } q_1 \geq \xi_0, \\ 2\gamma q_1 & \text{jeśli } q_1 \leq \xi_0. \end{cases}$$

oraz

$$(1.16) \quad S(q_1) = -\alpha q_1.$$

We wzorze (1.15) wykorzystano zależność

$$(1.17) \quad \xi_0 = q_1 \cos \theta_1.$$

Z powyższego widać, że gdy $\xi_0 \rightarrow 0$, to $\theta_1 \rightarrow \pi/2$. Mamy wtedy przypadek liniowy, dla którego

$$(1.18) \quad C(q_1) = \gamma q_1.$$

W dalszym ciągu będziemy zajmować się ruchem ustalonym. Mamy wtedy $\dot{q}_1 \equiv 0$, $\dot{q}_2 \equiv 0$ i równania (1.13) przyjmują postać

$$(1.19) \quad S(q_1) = p_0 \sin q_2, \quad -q_1 + C(q_1) = p_0 \cos q_2.$$

Na podstawie powyższych równań obliczymy kąt przesunięcia fazowego q_2 ze związku

$$(1.20) \quad \operatorname{tg} q_2 = \frac{S(q_1)}{C(q_1) - q_1}$$

oraz zależność amplitudy drgań od częstości kątowej siły wymuszającej. Ta ostatnia wielkość dla przypadku $q_1 \leq \xi_0$ wynosi

$$(1.21) \quad q_1 = \bar{p}_0 \frac{1}{[\bar{\alpha}^2 \gamma + (2\gamma - 1)^2]^{1/2}},$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(1.22) \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_1}{m\omega}, \quad \bar{p}_0 = \frac{p_0}{lc}.$$

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku wymuszenia siłą o amplitudzie $P_0 = \text{const}$. Analiza drugiego przypadku może przebiegać identycznie. Wzór (1.21) przedstawia znany związek, określający zależność amplitudy drgań wymuszonych od częstości siły wymuszającej w przypadku drgań liniowych.

Jeśli $q_1 \geq \xi_0$, to podnosząc równania (1.19) stronami do kwadratu i dodając, znajdziemy

$$(1.23) \quad q_1 = \frac{\bar{p}_0 \gamma}{\left\{ \bar{\alpha}^2 \gamma + \left[\frac{\gamma}{\pi} (\sin 2\theta_1 - 2\theta_1 + 2\pi) - 1 \right]^2 \right\}^{1/2}}.$$

Łatwo sprawdzić, że powyższy wzór pokrywa się ze wzorem (1.21), jeśli przyjmiemy $\theta_1 = 0$, co odpowiada $q_1 = \xi_0$. Z uwagi na zależność (1.17) związek (1.23) podaje zależność uwikłaną amplitudy q_1 od γ .

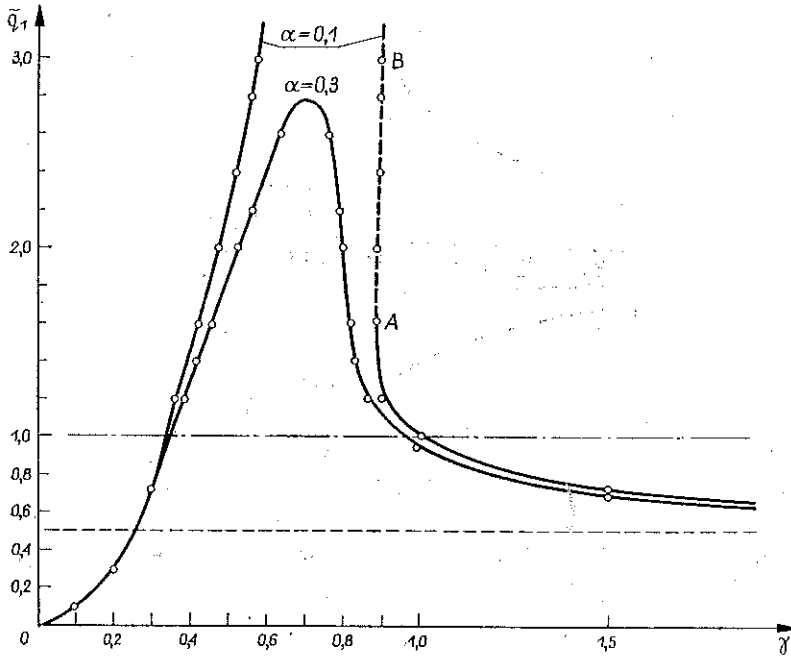
Łatwiej jest wyrazić związek odwrotny:

$$(1.24) \quad \gamma = \frac{q_1^2 (4\delta - \bar{\alpha}^2) \pm q_1 \sqrt{q_1^2 (\bar{\alpha}^2 - 8\delta) \bar{\alpha}^2 + 4\bar{p}_0^2}}{2(4\delta^2 q_1^2 - \bar{p}_0^2)},$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$(1.25) \quad \delta = \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta_1 - \frac{1}{\pi} \theta_1 + 1.$$

Z powyższego wzoru widać, że gdy θ_1 zmienia się w przedziale $[0, \pi/2]$, to δ znajduje się odpowiednio w przedziale $[1, 1/2]$. Wykresy funkcji (1.21) oraz (1.24) podano na rys. 5, dla wartości parametrów $\bar{\alpha}=0,1$ oraz $0,3$, $\bar{p}_0=0,1$ i $\xi_0=0,1$. Odpowiedni wykres kąta fazowego q_2 obliczonego na podstawie zależności (1.20) przedstawia rys. 6.



Rys. 5

Dla nadania odpowiedniemu wyrażeniu znaczenia współczynnika dynamicznego wykresy sporządzono dla \tilde{q}_1 oraz q_2 , określonych w sposób następujący:

$$q_1 = \bar{p}_0 \tilde{q}_1,$$

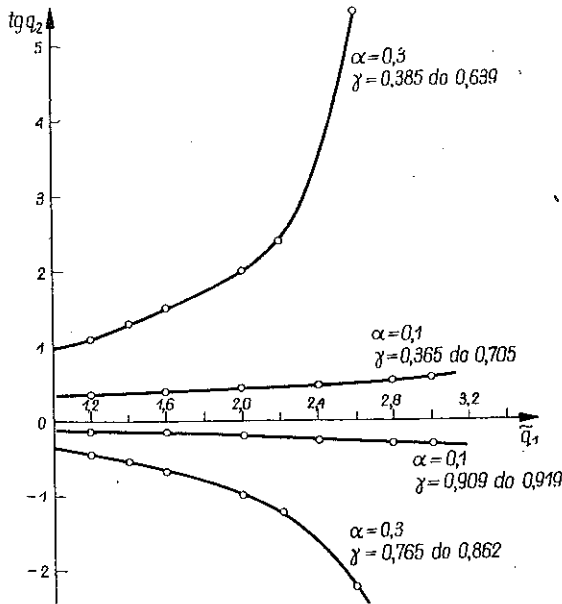
$$\tilde{q}_1 = \frac{\gamma}{[\alpha^2 \gamma + (2\gamma - 1)^2]^{1/2}} \quad \text{dla } \tilde{q}_1 \leq \frac{\xi_0}{p_0},$$

$$(1.26) \quad \gamma = \frac{\tilde{q}_1^2 (4\delta - \alpha^2) \pm \tilde{q}_1 \sqrt{\tilde{q}_1^2 (\alpha^2 - 8\delta) \alpha^2 + 4}}{2(4\delta \tilde{q}_1^2 - 1)} \quad \text{dla } \tilde{q}_1 \geq \frac{\xi_0}{p_0},$$

$$\theta_1 = \arccos \frac{\xi_0}{\tilde{q}_1 p_0}, \quad \text{tg } q_2 = \frac{S(\tilde{q}_1)}{C(\tilde{q}_1) - \tilde{q}_1}.$$

Do badania łąteczności otrzymanych rozwiązań wykorzystamy kryterium Hurwita. Niech q_1^0 i q_2^0 oznaczają rozwiązania w przypadku ruchu ustalonego, a δ_1 oraz δ_2 niech będą odpowiednio ich przyrostami. Do układu równań (1.13) mamy

$$(1.27) \quad q_1 = q_1^0 + \delta_1, \quad q_2 = q_2^0 + \delta_2,$$



Rys. 6

a po opuszczeniu wyrazów nieliniowych i wykorzystaniu wzorów (1.19), spełnionych dla q_1^0 oraz q_2^0 , mamy układ równań różniczkowych ze względu na $\delta_1(t)$ oraz $\delta_2(t)$:

$$(1.28) \quad 2\dot{\delta}_1 - \frac{dS}{dq_1} \delta_1 + [C(q_1^0) - q_1^0] \delta_2 = 0,$$

$$2q_1^0 \dot{\delta}_2 + \left[1 - \frac{dC}{dq_1} \right] \delta_1 - S(q_1^0) \delta_2 = 0.$$

Pochodne funkcji $C(q)$ oraz $S(q)$, określonych za pomocą wzorów (1.15) i (1.16), obliczane są dla $q_1 = q_1^0$. Rozwiązania jednorodnego układu równań (1.28) poszukujemy w postaci

$$(1.29) \quad \delta_1 = \delta_{10} e^{rt}, \quad \delta_2 = \delta_{20} e^{rt}.$$

Po wstawieniu (1.29) do (1.28) i uporządkowaniu otrzymujemy równanie charakterystyczne w postaci

$$(1.30) \quad 4r^2 - 2r \left[\frac{S(q_1^0)}{q_1^0} + \frac{dS}{dq_1} \right] + \frac{S(q_1^0)}{q_1^0} \frac{dS}{dq_1} + \left[\frac{C(q_1^0)}{q_1^0} - 1 \right] \left[\frac{dC}{dq_1} - 1 \right] = 0.$$

Z przyjętej postaci rozwiązania (1.29) wynika, że otrzymane rozwiązanie (1.29) będzie stateczne w ruchu ustalonym, gdy spełniona będzie nierówność $r < 0$. Ale nierówność ta będzie spełniona, jeśli współczynniki równania (1.30) spełniają będą nierówności

$$(1.31) \quad \frac{S(q_1^{\circ})}{q_1^{\circ}} + \frac{dS}{dq_1} < 0, \quad \frac{S(q_1^{\circ})}{q_1^{\circ}} \frac{dS}{dq_1} + \left[\frac{C(q_1^{\circ})}{q_1^{\circ}} - 1 \right] \left[\frac{dC}{dq_1} - 1 \right] > 0.$$

Z zależności (1.16) wynika, że pierwsza z nierówności (1.31) jest zawsze spełniona ($\alpha > 0$). Zajmiemy się drugą z nierówności (1.31). Łatwo sprawdzić, że dla przypadku $q_1 \leq \xi_0$ ($\tilde{q}_1 \leq \xi_0/\bar{p}_0$) nierówność ta jest zawsze spełniona. Dla przypadku $q_1 > \xi_0$ ($\tilde{q}_1 > \xi_0/\bar{p}_0$) obliczamy

$$(1.32) \quad \frac{dC}{dq_1} = \frac{\gamma}{\pi} [2\pi - 2\theta_1 - \sin 2\theta_1],$$

gdzie wykorzystano związek (1.17). Po wykonaniu obliczeń, druga z nierówności (1.31) przyjmie postać

$$(1.33) \quad \left(\frac{\alpha\pi}{\gamma} \right)^2 + \left(2\pi - 2\theta_1 - \frac{\pi}{\gamma} \right)^2 - \sin^2 2\theta_1 > 0.$$

Ze wzorów (1.5) i (1.22) otrzymujemy

$$(1.34) \quad \alpha = \bar{\alpha} \sqrt{\gamma}.$$

Wielkość α wstawiona do (1.33) po uporządkowaniu prowadzi do nierówności

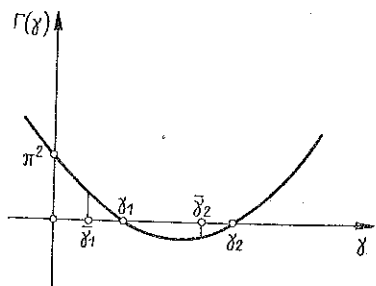
$$(1.35) \quad \Gamma(\gamma) = \gamma^2 [4(\pi - \theta_1)^2 - \sin^2 2\theta_1] - \gamma [4\pi(\pi - \theta_1) - \bar{\alpha}^2 \pi^2] + \pi^2 > 0.$$

Jak widać nierówność ta będzie spełniona dla każdej wartości γ , jeśli spełniony będzie warunek

$$(1.36) \quad \frac{\Delta}{\pi^2} = \bar{\alpha}^4 \pi^2 + 4 \sin^2 2\theta_1 - 8\bar{\alpha}^2 \pi (\pi - \theta_1) < 0.$$

Warunkiem stateczności otrzymanych rozwiązań dla każdej wartości γ jest więc spełnienie nierówności (1.36). Nierówność ta nie będzie spełniona, jeśli $\bar{\alpha}$ oberzemy dostatecznie małe. Tak więc tłumienie ma istotny wpływ na istnienie rozwiązań niestatecznych.

Dla podanych uprzednio dwóch przykładów $\bar{\alpha} = 0,1$ oraz $\bar{\alpha} = 0,3$ sprawdzono stateczność rozwiązań. Otrzymano, że w przypadku pierwszym rozwiązania odpowiadające krzywej AB (na rys. 5 zaznaczonej linią przerywaną) nie są stateczne. Np. w przypadku $\tilde{q}_1 = 2,0$ pierwiastkami równania $\Gamma(\gamma) = 0$ są liczby $\gamma_1 = 0,633$ oraz $\gamma_2 = 0,927$, podczas gdy obliczone z (1.26) wartości pierwiastków wynoszą $\bar{\gamma}_1 = 0,479$ oraz $\bar{\gamma}_2 = 0,892$. Na rys. 7 przedstawiono wykres funkcji $\Gamma(\gamma)$ i zaznaczono powyższe wartości pierwiastków. Z rysunku tego widać, że $\Gamma(\bar{\gamma}_1) > 0$, czyli spełniony jest warunek (1.35), a więc odpowiednie rozwiązanie jest sta-



Rys. 7

teczne podczas gdy $\Gamma(\gamma_2) < 0$, co wskazuje, że nierówność (1.35) nie jest spełniona, a więc odpowiednie rozwiązanie nie jest stateczne. Dla wartości $\bar{\alpha} = 0,3$ otrzymano, że spełniona jest nierówność (1.36), a to dowodzi, że na rozważanej krzywej rezonansowej nie ma punktów, które odpowiadałyby rozwiązaniom niestatecznym.

Przyjęta charakterystyka sił sprężystości (rys. 3) jest typu charakterystyki miękkiej. Jak wiadomo, dla tego typu charakterystyk opisanych funkcją mającą ciągłą pochodną przegięcie krzywej zależności amplitudy od częstości siły wymuszającej znajduje się po stronie malejących wartości częstości kątowej siły wymuszającej. Podobna właściwość występuje również w rozważanym przez nas przypadku, gdyż przegięcie wykresu amplitudy jako funkcji parametru γ znajduje się po stronie rosnących wartości tego parametru, który zgodnie z (1.5) jest odwrotnie proporcjonalny do kwadratu częstości kątowej siły wymuszającej.

Na rys. 6 przedstawiono wykres funkcji $\text{tg } q_2$ określonej przez (1.26). Wartości powyższej funkcji obliczono dla $\tilde{q}_1 \geq 1$ ($\tilde{q}_1 \geq \xi_0/\bar{p}_0$) i pozostałych parametrów ujętych w tablicy 1. Wartości te odpowiadają krzywym rezonansowym przedstawionym na rys. 5.

Dla przypadku $\tilde{q}_1 \leq 1$ ($\tilde{q}_1 \leq \xi_0/\bar{p}_0$) mamy

$$(1.37) \quad \text{tg } q_2 = \frac{\alpha}{1-2\gamma};$$

wyrażenie to nie zależy od \tilde{q}_1 . Dla wartości $q_1 \geq 1$ mamy

$$(1.38) \quad \text{tg } q_2 = \frac{\alpha}{1-2\gamma\delta},$$

gdzie δ określone jest za pomocą wzoru (1.25). Z rys. 6 wynika, że kąt przesunięcia fazowego w znacznym stopniu zależy od amplitudy \tilde{q}_1 w przypadku większego tłumienia. Dla tłumienia małego kąt przesunięcia fazowego prawie nie zależy od \tilde{q}_1 .

Tablica 1

$\bar{\alpha}$	\tilde{q}_1	γ_1	γ_2	θ_1 [rad]	$\sin 2\theta_1$
0,3	1,2	0,385	0,862	0,5843	0,9212
	1,4	0,421	0,837	0,7675	0,9997
	1,6	0,458	0,823	0,8896	0,9757
	2,0	0,530	0,807	1,0466	0,8660
	2,2	0,564	0,799	1,0990	0,8090
	2,6	0,639	0,765	1,1687	0,7099
0,1	1,2	0,365	0,909	0,5843	0,9212
	1,6	0,426	0,886	0,8896	0,9757
	2,0	0,479	0,892	1,0466	0,8660
	2,4	0,523	0,896	1,1338	0,7577
	2,8	0,563	0,903	1,2036	0,6669
	3,0	0,579	0,905	1,2211	0,6284
	5,0	0,705	0,919	1,3606	0,3907

2. Analiza zagadnienia w przypadku wymuszenia przypadkowego

Jak stwierdzono w punkcie poprzednim rozważany układ ma cechy układu drgającego o charakterystyce sprężystości typu miękkiego. O ile nam wiadomo, układy tego typu nie były dotychczas rozważane z punktu widzenia drgań przypadkowych.

Równanie różniczkowe ruchu przedstawimy w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + 2\alpha_2 \dot{x} + 2\omega_0^2 x &= p(t) \quad \text{dla } |x| \leq \varepsilon, \\ \ddot{x} + 2\alpha_2 \dot{x} + \omega_0^2(x + \varepsilon \operatorname{sgn} x) &= p(t) \quad \text{dla } |x| \geq \varepsilon, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(2.2) \quad \varepsilon = x_0, \quad 2\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad p(t) = \frac{P(t)}{m}.$$

O wymuszeniu $p(t)$ zakładamy, że jest gaussowskim procesem przypadkowym typu «biały szum». W pracy [3] rozważono układ o skokowej charakterystyce. Drgania takiego układu opisane są dla wszystkich wartości x za pomocą drugiego z równań (2.1).

W obecnym opracowaniu do wyznaczenia funkcji gęstości prawdopodobieństwa wykorzystamy sposób opisany w pracy [5]. Na płaszczyźnie fazowej $x, \dot{x} = y$ trajektorie poruszającego się punktu utożsamiamy z płaskim przepływem potencjalnym płynu, dla którego równanie ciągłości jest

$$(2.3) \quad \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = 0,$$

gdzie φ jest potencjałem prędkości, a φ_x oraz φ_y są współrzędnymi wektora prędkości odpowiednio względem osi x oraz y . Na rys. 8 przedstawiono płaszczyznę fazową podzieloną na trzy strefy. Dwie z nich stanowią zbiór punktów, dla których jest $|x| > x_0$, a dla punktów trzeciej strefy spełniona jest nierówność $|x| < x_0$. Na granicy stref powinny być spełnione związki

$$(2.4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \varphi_x = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \varphi_x,$$

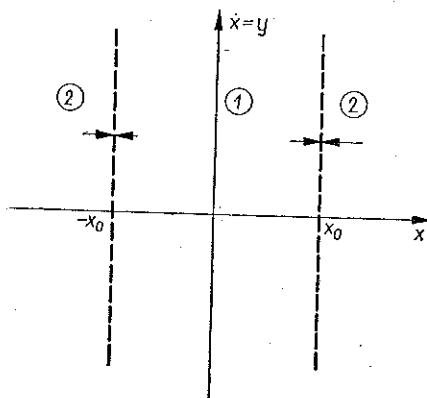
oraz

$$(2.5) \quad \lim_{x \rightarrow -x_0 + 0} \varphi_x = \lim_{x \rightarrow -x_0 - 0} \varphi_x.$$

Pierwsze z równań układu (2.1) spełnione jest w strefie pierwszej. Jeśli $p_1(x, y)$

oznacza gęstość prawdopodobieństwa odpowiadającą temu równaniu, to powinna ona spełniać równanie Fokkera-Plancka

$$(2.6) \quad y \frac{\partial p_1}{\partial x} = 2\alpha_2 p_1 + (2\alpha_2 y + 2\omega_0^2 x) \frac{\partial p_1}{\partial y} + \pi S_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}.$$



Rys. 8

Dla dwu pozostałych stref, w których powinno być spełnione drugie z równań układu (2.1), równanie Fokkera-Plancka ma postać

$$(2.7) \quad y \frac{\partial p_2}{\partial x} = 2\alpha_2 p_2 + [(2\alpha_2 y + 2\omega_0^2(x + \varepsilon \operatorname{sgn} x))] \frac{\partial p_2}{\partial y} + \pi S_0 \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2},$$

gdzie $p_2(x, y)$ oznacza funkcję gęstości prawdopodobieństwa dla tych stref. Rozwiązaniami równań (2.6) oraz (2.7) są odpowiednio funkcje

$$(2.8) \quad p_1(x, y) = C_1 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_0^2 \omega_0^2} - \frac{x^2}{\sigma_0^2}\right),$$

oraz

$$(2.9) \quad p_2(x, y) = C_2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_0^2 \omega_0^2} - \frac{x^2}{2\sigma_0^2} - \varepsilon \frac{x \operatorname{sgn} x}{\sigma_0^2}\right),$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$(2.10) \quad \sigma_0^2 = \frac{\pi S_0}{2\alpha_2 \omega_0^2}.$$

Stałe C_1 oraz C_2 będą wyznaczone później.

Równania (2.6) i (2.7) napiszemy w innej postaci:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(yp_1) + \frac{\partial}{\partial y}\left[(-2\alpha_2 y - 2\omega_0^2 x)p_1 - \pi S_0 \frac{\partial p_1}{\partial y}\right] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(yp_2) + \frac{\partial}{\partial y}\left[(-2\alpha_2 y - \omega_0^2 x - \omega_0^2 \varepsilon \operatorname{sgn} x)p_2 - \pi S_0 \frac{\partial p_2}{\partial y}\right] &= 0. \end{aligned}$$

Równania powyższe mają postać (2.3), a warunki (2.4) oraz (2.5) w rozważanym przypadku są następujące:

$$(2.12) \quad \lim_{x \rightarrow x_0-0} (yp_1) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} (yp_2),$$

oraz

$$(2.13) \quad \lim_{x \rightarrow -x_0+0} (yp_1) = \lim_{x \rightarrow -x_0-0} (yp_2).$$

Warunki te będą spełnione, jeśli przyjmiemy

$$(2.14) \quad C_2 = C_1 \exp\left(\frac{x_0^2}{2\sigma_0^2}\right).$$

Stałą C_1 wyznaczmy z warunku normalizacji:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy &= 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p(x, y) dx dy = \\ &= 4 \left[\int_0^{x_0} dx \int_0^{\infty} p_1(x, y) dy + \int_{x_0}^{\infty} dx \int_0^{\infty} p_2(x, y) dy \right] = 1. \end{aligned}$$

Po wykonaniu obliczeń mamy

$$(2.16) \quad C_1 = (2\sigma_0^2 \omega_0 \pi)^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{x_0}{\sigma_0}\right) + \exp\left(\frac{x_0^2}{\sigma_0^2}\right) \left[1 - \Phi\left(\sqrt{2} \frac{x_0}{\sigma_0}\right) \right] \right\}^{-1},$$

gdzie

$$(2.17) \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

oznacza wyrażenie nazywane całką prawdopodobieństwa lub funkcją błędu. Ostatecznie funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla całej płaszczyzny określona jest przez wzory (2.8), (2.9), (2.14) i (2.16), przy czym funkcja (2.8) odnosi się do przedziału $|x| \leq x_0$, a funkcja (2.9) do przedziału $|x| \geq x_0$.

W dalszym ciągu obliczymy niektóre charakterystyki rozważanego układu drgającego. Mianowicie wartość średnią kwadratu zmiennej przypadkowej przemieszczenia σ_x^2 oraz wartość średnią kwadratu prędkości $\sigma_v^2 = \sigma_y^2$, jak również oczekiwaną wartość częstotliwości przejść przez poziom zerowy v_0^+ . Pierwsze dwie wielkości wynoszą

$$(2.18) \quad \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x, y) dx dy$$

oraz

$$(2.19) \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(x, y) dx dy,$$

natomiast

$$(2.20) \quad v_0^+ = \int_0^{\infty} yp(0, y) dy.$$

Wartość średnią kwadratu przemieszczenia obliczymy uwzględniając (2.8), (2.9) oraz (2.14). Po wykonaniu rachunków mamy

$$(2.21) \quad \sigma_x^2 = \sqrt{2\pi} \sigma_0^4 \omega_0 C_1 \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi\left(\frac{x_0}{\sigma_0}\right) - \frac{x_0}{\sigma_0} \exp\left(-\frac{x_0^2}{\sigma_0^2}\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{x_0^2}{\sigma_0^2}\right) \left(1 + \frac{x_0^2}{\sigma_0^2}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{2} x_0}{\sigma_0}\right) \right] \right\},$$

gdzie użyto oznaczenia (2.17), a C_1 określone jest przez (2.16). Jeśli $x_0 \rightarrow 0$, to

$$(2.22) \quad C_1 \rightarrow (2\sigma_0^2 \omega_0 \pi)^{-1} = C_1^0$$

oraz

$$(2.23) \quad \sigma_x^2 \rightarrow \sigma_{x_0}^2 = 2\pi \sigma_0^4 \omega_0 C_1^0 = \sigma_1^2.$$

Jeśli ograniczymy się do małych w porównaniu z jednością wartości wielkości x_0/σ_0 , to po wykonaniu rachunków otrzymamy

$$(2.24) \quad \frac{\sigma_x^2}{\sigma_1^2} \approx 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x_0}{\sigma_0}.$$

Z powyższego widać, że nieliniowość siły sprężystości powoduje zmniejszenie wartości średniej kwadratu przemieszczenia w stosunku do wartości tej dla układu liniowego, gdy $x_0 = 0$.

W podobny sposób obliczymy wartość średnią kwadratu prędkości:

$$(2.25) \quad \sigma_y^2 = 2\pi\sigma_0^4\omega_0^3 C_1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi\left(\frac{x_0}{\sigma_0}\right) + \exp\left(\frac{x_0^2}{\sigma_0^2}\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{2}x_0}{\sigma_0}\right) \right] \right\}.$$

Uwzględniając wzór (2.16) otrzymujemy

$$(2.26) \quad \sigma_y^2 = \sigma_0^2 \omega_0^2,$$

skąd wynika, że wielkość ta nie zależy od x_0 i jest taka, jak w zagadnieniu liniowym.

Trzecia charakterystyka v_0^+ na podstawie (2.20) jest następująca:

$$(2.27) \quad v_0^+ = \sigma_0^2 \omega_0^2 C_1,$$

gdzie C_1 jest określone za pomocą wzoru (2.16). W przypadku liniowym ($x_0 = 0$) mamy $C_1 = (2\sigma_0^2 \omega_0 \pi)^{-1}$ oraz

$$(2.28) \quad v_0^+ = \frac{\omega_0}{2\pi} = f_0,$$

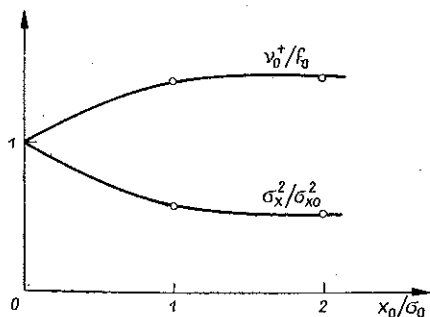
gdzie f_0 jest częstotliwością układu liniowego. Dla przypadku małej nieliniowości obliczamy

$$(2.29) \quad \frac{v_0^+}{f_0} \approx 1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x_0}{\sigma_0}.$$

Wzór powyższy wskazuje, że nieliniowość powoduje wzrost częstotliwości w porównaniu z jej wartością dla przypadku liniowego.

Zakończenie

Porównując wyniki (2.24) oraz (2.29) z otrzymanymi w pracy [2] dla przypadku charakterystyki sztywnej stwierdzamy ich jakościową zgodność. Załamanie liniowej charakterystyki siły sprężystości powoduje zmniejszenie średniej wartości kwadratu



Rys. 9

przemieszczenia, a wzrost częstotliwości w porównaniu z układem liniowym. Należy dodać, że w rozważanym przez nas przypadku układ drgający w ujęciu zdeterminowanym wykazuje cechy układu o charakterystyce miękkiej, a w ujęciu stochastycznym jego charakterystyki mają cechy identyczne z układem o charakterystyce sztywnej. Na rys. 9 podano wykresy $\sigma_x^2/\sigma_{x_0}^2$ oraz $v_0^+/f_0 = C_1/C_1^0$ w zależności od x_0/σ_0 .

Literatura cytowana w tekście

1. T. K. CAUGHEY, *Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis*, J. Appl. Mech., December 1960, 640–643.
2. S. H. CRANDALL, *Perturbation techniques for random vibration of nonlinear systems*, J. Acoust. Soc. Amer., 35, 1700–1705.
3. S. H. CRANDALL, *Random vibration of a nonlinear system with a set-up spring*, J. Appl. Mech., 29 (1962), 477–482.
4. F. E. CROSSLEY, *Bounds of stability of subharmonic oscillations of a bistable oscillator*, Proc. Congr. Theory of Mech., 1, Warsaw 1964.
5. Э. М. Хазен, *Определение плотности распределения вероятностей для случайных процессов в системах с нелинейностями кусочно-линейного типа*, Изв. А. Н. СССР ОТН. Энерг. и автомат., 1961, № 3, 58–72.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ
ПРИ ХАРАКТЕРИСТИКЕ УПРУГОСТИ В ФОРМЕ ЛОМАНОЙ ЛИНИИ

Рассматриваются нелинейные, вынужденные колебания с одной степенью свободы, с учетом демпфирования, пропорционального первой степени скорости. Нелинейным фактором является сила упругости двух пружин, обладающих теми же самыми линейными характеристиками упругости, причем в статическом равновесном состоянии системы эти пружины предварительно сокращены. Задача анализируется в определенном представлении, применяя метод Крылова-Боголюбова и в пробабилистическом представлении при использовании уравнения Фоккера-Планка.

В определенном случае, подтверждается поведение рассматриваемой системы как механической системы, обладающей мягкой характеристикой сил упругости, тогда как в случае пробабилистического представления полученные характеристики, соответствуют системе с жесткой характеристикой. На рис. 9 видно также, что система заметно реагирует на малую нелинейность ($x_0/\sigma < 1$) и в этом случае можно применять приближенные формулы (2.24) и (2.29).

Summary

THE DETERMINED AND RANDOM VIBRATIONS OF A SYSTEM WITH ONE DEGREE
OF FREEDOM FOR A CHARACTERISTIC OF ELASTICITY IN THE FORM OF A BROKEN
LINE

The nonlinear forced vibrations of a system with one degree of freedom are considered, the account having taken of the damping proportional to the first power of velocity. The nonlinear factor is an elastic force derived from two springs having identical characteristics of elasticity, and where the springs are preliminarily shortened in the state of static equilibrium. The problem is analyzed in the formulation determined by means of the Kryłow-Bogolubow method and in the probabilistic formulation using the Fokker-Planck method.

In the determined case, the system under consideration was found to behave as a mechanical system with a soft characteristic of the elastic forces, whereas in the probabilistic formulation the characteristics obtained correspond to a system with a rigid characteristic. It can be seen also in Fig. 9 that the system reacts markedly to a small nonlinearity ($\alpha_0/\sigma < 1$) and in this case it is possible to apply the approximate formulae (2.24) and (2.29).

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 marca 1970 r.