

Z ZAGADNIENŃ WARTOŚCI WŁASNYCH PŁYT PIERSCIENIOWYCH

OSWALD MATEJA (OPOLE)

1. Wstęp

Problem drgań swobodnych i stateczności cienkich płyt pierścieniowych należy już do tych klasycznych zagadnień z dynamiki układów powierzchniowych, któremu poświęcono w literaturze wiele prac.

Obszerny wykaz prac z tego zakresu oraz ich omówienie podaje W. S. GONTKIEWICZ w monografii [1]. Na podstawie omawianych tam prac można stwierdzić, że z zakresu swobodnych drgań płyt kołowych, których grubość zmienia się wzdłuż promieni, znane są rozwiązania dla przypadków, gdy grubość ta zmienia się wg funkcji $h(r) = h_0 r^n$ [$h(r)$ oznacza grubość płyty w przekroju o promieniu r ; h_0, n stałe parametry]. Brak natomiast rozwiązań dotyczących drgań swobodnych i stateczności płyt pierścieniowych, których grubość zmienia się skokowo wzdłuż promieni.

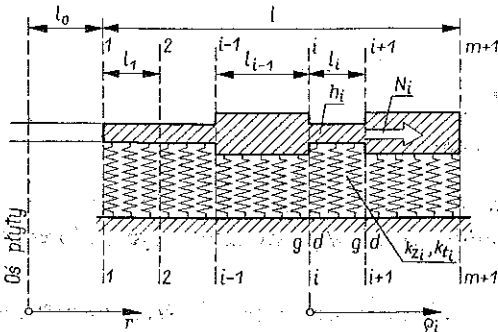
Celem niniejszej pracy jest określenie wartości własnych cienkich, linowo-sprężystych, izotropowych i jednorodnych kołowych płyt pierścieniowych, których grubość zmienia się skokowo wzdłuż ich promieni. Dla ogólności przyjmujemy, iż rozważane płyty spoczywają na dwuparametrowym podłożu typu Winklera lub Leontiewa-Własowa. Ponadto przyjmujemy, że płyty te są obciążone siłami działającymi w ich płaszczyznach.

Opierając się na pracach H. WAGNERA [2 i 3] oraz pracach [4 i 5] dotyczących innych zagadnień, uzyskujemy rozwiązanie problemu za pomocą metody macierzy przeniesienia przy bezpośrednim zastosowaniu szeregów potęgowych. Tak uzyskane rozwiązanie pozwala na wykonywanie obliczeń według prostego schematu. Jak wiadomo, ma to istotne znaczenie z uwagi na łatwość programowania i przeprowadzania obliczeń przy zastosowaniu elektronicznej techniki obliczeniowej.

Rozwiązanie problemu wyznaczania wartości własnych płyt kołowych o stałej grubości, spoczywających na dwuparametrowym podłożu typu Winklera lub Leontiewa-Własowa podał A. GOMUŁIŃSKI [6]. W pracy tej wyprowadzono ogólne równanie różniczkowe rozpatrywanego zagadnienia własnego, podano rozwiązanie tego równania oraz sporządzono nomogramy do wyznaczania wartości własnych płyt kołowych o stałych grubościach, spoczywających na dwuparametrowym podłożu sprężystym. W niniejszej pracy wykorzystujemy równanie wyprowadzone przez GOMUŁIŃSKIEGO.

2. Rozwiązanie problemu

Rozpatrzmy kołową płytę pierścieniową o sztywności na zginanie $D(r)$ i masie na jednostkę powierzchni płyty $\mu(r)$ (rys. 1). Przyjmujemy, że płyta spoczywa na dwuparametrowym podłożu typu Winklera, scharakteryzowanym współczynnikami $k_z(r)$ i $k_t(r)$ [$k_z(r)$ oznacza współczynnik podatności podłoża w kierunku prostopałym do płyty, a $k_t(r)$ w kierunku stycznym] lub warstwie sprężystej



Rys. 1

Leontiewa-Własowa, scharakteryzowanej współczynnikami $E_0(r)$ i $\nu_0(r)$ [$E_0(r) = E_{gr}/(1 - \nu_{gr}^2)$; $\nu_0(r) = -\nu_{gr}/(1 - \nu_{gr})$; por. [7], str. 29]. Ponadto przyjmujemy, że płyta obciążona jest w swojej płaszczyźnie siłami promieniowymi $N(r)$. W odniesieniu do funkcji $D(r)$, $\mu(r)$, $k_z(r)$, $k_t(r)$, $N(r)$, $E_0(r)$ i $\nu_0(r)$ zakładamy, że są to funkcje przedziałami ciągle zmiennej niezależnej r .

Podzielmy rozpatrywaną płytę na pierścienie o szerokościach, licząc wzdłuż promieni, l_1, l_2, \dots, l_m . Przyjmujemy tu, iż dokonaliśmy takiego podziału, że z dostateczną dokładnością dla obliczeń technicznych można dla poszczególnych pierścieni przyjąć funkcje $D_i(r_i)$, $\mu_i(r_i)$, $k_{zi}(r_i)$, $k_{ti}(r_i)$, $N_i(r_i)$, $E_{0i}(r_i)$ i $\nu_{0i}(r_i)$ jako stałe.

Dla pierścienia o szerokości l_i równanie różniczkowe problemu własnego ma następującą postać [6] [w równaniu tym oraz w dalszych aż do równań (2.20) pominięto indeksy i]:

$$(2.1) \quad \nabla^2 \nabla^2 w(r, \varphi) + \alpha \nabla^2 w(r, \varphi) + \beta w(r, \varphi) = 0,$$

gdzie dla podłoża Winklera

$$\alpha = -\frac{4N + k_t h^2}{4D}, \quad \beta = \frac{k_z - \mu \omega^2}{D},$$

a w przypadku podłoża Leontiewa-Własowa

$$\alpha = -\frac{N + 2T}{D}, \quad \beta = \frac{K - (m_0 + m_1)}{D}.$$

Przy $H \rightarrow \infty$ mamy

$$K = \frac{E_0 \bar{\gamma}}{2(1 - \nu_0^2)}, \quad T = \frac{E_0}{8\bar{\gamma}(1 - \nu_0)},$$

$$m_0 = \frac{\bar{m}_0}{2\bar{\gamma}}.$$

We wzorach tych wprowadziliśmy następujące oznaczenia: $\bar{\gamma}$ oznacza współczynnik korygujący (cm^{-1}), \bar{m}_0 jednostkową masę podłoża, m_1 jednostkową masę płyty, h grubość płyty, ω częstość kątową drgań swobodnych płyty oraz

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Rozwijając powierzchnię ugięcia $w(r, \varphi)$ danego pierścienia w następujący nieskończony pojedynczy szereg trygonometryczny:

$$(2.2) \quad w(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(r) \cos n\varphi,$$

otrzymamy

$$(2.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \{L_n [L_n w_n(r)] + \alpha L_n w_n(r) + \beta w_n(r)\} \cos n\varphi = 0,$$

gdzie

$$L_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}.$$

Na podstawie równania (2.3) otrzymamy następujący układ równań różniczkowych

$$(2.4) \quad L_n [L_n w_n(r)] + \alpha L_n w_n(r) + \beta w_n(r) = 0.$$

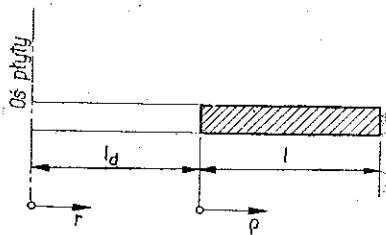
W pracy [6] sprovedzono równania (2.4) do układu równań typu Bessela podając ich rozwiązanie w postaci odpowiednich kombinacji funkcji walcowych Bessela. Ze względu jednak na możliwość różnych znaków i wartości stałych współczynników α i β , występujących w równaniu (2.4), należało rozpatrzyć przynajmniej cztery przypadki, przy czym rozwiązanie dla każdego przypadku określone jest innymi funkcjami.

Rozwiązania równań (2.4) znakomicie natomiast upraszczają się w przypadku bezpośredniego zastosowania szeregów potęgowych. I tak poszukując funkcji w_n , będących całkami ogólnymi równań (2.4) w postaci następujących szeregów potęgowych:

$$(2.5) \quad w_n(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \rho^j,$$

gdzie ρ jest bezwymiarową zmienną niezależną, określoną w następujący sposób (rys. 2):

$$(2.6) \quad \rho = \frac{r - l_d}{l},$$



Rys. 2

czyli

$$(2.7) \quad r = l_d + l\rho,$$

otrzymamy stosunkowo proste wzory rekurencyjne, ułatwiające i upraszczające programowanie obliczeń dla elektronicznych maszyn cyfrowych. Z przeprowadzonych obliczeń numerycznych wynika zaś, że szeregi potęgowe (2.5) są szybko zbieżne. Podobnie jak w przypadku wzoru (2.1) również po prawej stronie wzoru (2.5) i dalej opuściliśmy przy współczynnikach w_j drugi indeks n dla uproszczenia zapisów.

Po uwzględnieniu związków (2.6) i (2.7) równania (2.4) przyjmą następującą postać:

$$(2.8) \quad (l_d + l\rho)^4 w_n^{IV} + 2l(l_d + l\rho)^3 w_n''' - l^2(1 + 2n^2)(l_d + l\rho)^2 w_n'' + \\ + l^3(1 + 2n^2)(l_d + l\rho) w_n' + l^4(n^4 - 4n^2) w_n + \alpha l^2(l_d + l\rho)^4 w_n' + \\ + \alpha l^3(l_d + l\rho)^3 w_n' - \alpha l^4 n^2(l_d + l\rho)^2 w_n + \beta l^4(l_d + l\rho)^4 w_n = 0,$$

gdzie $()' = d/d\rho$.

Podstawiając z kolei (2.5) do równań (2.8) otrzymamy dla każdego n następujące wzory na poszczególne współczynniki wyrazów (2.5):

$$(2.9) \quad \begin{aligned} -24l_d^4 w_4 &= 12l_d^3 w_3 - 2l^2 l_d^2 (1 + 2n^2 - \alpha l_d^2) w_2 + l^3 l_d (1 + 2n^2 + \alpha l_d^2) w_1 + \\ &\quad + l^4 (n^4 - 4n^2 - \alpha n^2 l_d^2 + \beta l_d^4) w_0, \\ -120l_d^4 w_5 &= 144l_d^3 w_4 + l^2 l_d^2 (30 - 12n^2 + 6\alpha l_d^2) w_3 + l^3 l_d (-2 - 4n^2 + 10\alpha l_d^2) w_2 + \\ &\quad + l^4 (1 - 2n^2 + n^4 + 3\alpha l_d^2 - \alpha n^2 l_d^2 + \beta l_d^4) w_1 + l^5 l_d (-2\alpha n^2 + 4\beta l^2) w_0, \\ -360l_d^4 w_6 &= 600l_d^3 w_5 + l^2 l_d^2 (276 - 24n^2 + 12\alpha l_d^2) w_4 + l^3 l_d (27 - 18n^2 + \\ &\quad + 27\alpha l_d^2) w_3 + l^4 (n^4 - 4n^2 + 18\alpha l_d^2 - \alpha n^2 l_d^2 + \beta l_d^4) w_2 + l^5 l_d (3\alpha - 2\alpha n^2 + \\ &\quad + 4\beta l_d^2) w_1 + l^6 (-\alpha n^2 + 6\beta l_d^2) w_0 \\ -840l_d^4 w_7 &= 1680l_d^3 w_6 + l^2 l_d^2 (1060 - 40n^2 + 20\alpha l_d^2) w_5 + l^3 l_d (216 - 40n^2 + \\ &\quad + 52\alpha l_d^2) w_4 + l^4 (9 - 10n^2 + n^4 + 45\alpha l_d^2 - \alpha n^2 l_d^2 + \beta l_d^4) w_3 + \\ &\quad + l^5 l_d (14\alpha - 2\alpha n^2 + 4\beta l_d^2) w_2 + l^6 (\alpha - \alpha n^2 + 6\beta l_d^2) w_1 + 4\beta l^7 l_d w_0 \end{aligned}$$

oraz dla $j \geq 8$ otrzymamy wzór rekurencyjny w postaci

$$(2.10) \quad \begin{aligned} -j(j-1)(j-2)(j-3)l_d^4 w_j &= l_d^3 [4(j-1)(j-2)(j-3)(j-4) + \\ &\quad + 2(j-1)(j-2)(j-3)] w_{j-1} + l^2 l_d^2 [6(j-2)(j-3)(j-4)(j-5) + \\ &\quad + 6(j-2)(j-3)(j-4) - (1 + 2n^2)(j-2)(j-3) + \alpha l_d^2 (j-2)(j-3)] w_{j-2} + \\ &\quad + l^3 l_d [4(j-3)(j-4)(j-5)(j-6) + 6(j-3)(j-4)(j-5) - \\ &\quad - 2(1 + 2n^2)(j-3)(j-4) + (1 + 2n^2)(j-3) + 4\alpha l_d^2 (j-3)(j-4) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha l_d^2(j-3)]w_{j-3} + l^4[(j-4)(j-5)(j-6)(j-7) + 2(j-4)(j-5)(j-6) - \\
& - (1+2n^2)(j-4)(j-5) + (1+2n^2)(j-4) + n^4 - 4n^2 + 6\alpha l_d^2(j-4)(j-5) + \\
& + 3\alpha l_d^2(j-4) - \alpha n^2 l_d^2 + \beta l_d^4]w_{j-4} + l^5 l_d [4\alpha(j-5)(j-6) + 3\alpha(j-5) - \\
& - 2\alpha n^2 + 4\beta l_d^2]w_{j-5} + l^6 [\alpha(j-6)(j-7) + \alpha(j-6) - \alpha n^2 + 6\beta l_d^2]w_{j-6} + \\
& + 4\beta l^7 l_d w_{j-7} + \beta l^8 w_{j-8}.
\end{aligned}$$

Warto zaznaczyć, że wzory (2.9) można otrzymać z zależności (2.10) przyjmując dla $k > j$ wartości $(j-k)$ jako równe zeru oraz pomijając składniki o ujemnych indeksach.

Na podstawie wzorów (2.9) oraz równania (2.10) możemy napisać

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad w_4 &= a(4)w_0 + b(4)w_1 + c(4)w_2 + d(4)w_3, \\
w_5 &= a(5)w_0 + b(5)w_1 + c(5)w_2 + d(5)w_3 + e(5)w_4, \\
w_6 &= a(6)w_0 + b(6)w_1 + c(6)w_2 + d(6)w_3 + e(6)w_4 + f(6)w_5, \\
w_7 &= a(7)w_0 + b(7)w_1 + c(7)w_2 + d(7)w_3 + e(7)w_4 + f(7)w_5 + g(7)w_6
\end{aligned}$$

oraz dla $j \geq 8$

$$\begin{aligned}
(2.12) \quad w_j &= a(j)w_{j-8} + b(j)w_{j-7} + c(j)w_{j-6} + d(j)w_{j-5} + e(j)w_{j-4} + \\
& + f(j)w_{j-3} + g(j)w_{j-2} + h(j)w_{j-1},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a(4) &= \frac{l^4(n^4 - 2n^2 - n^2 l_d^2 + \beta l_d^4)}{-24 l_d^4}, \\
& \dots \dots \dots \\
a(j) &= \frac{\beta l^8}{-j(j-1)(j-2)(j-3)l_d^4}.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (2.8) można również uzyskać w nieco innej postaci. Ponieważ dla $0 \leq \rho \leq 1$ wyrażenie $(l_d + l\rho)$ jest różne od zera, równanie (2.8) możemy podzielić przez $(l_d + l\rho)^4$. Otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned}
(2.13) \quad w_n^{IV} + 2 \frac{l}{l_d + l\rho} w_n''' - (1+2n^2) \frac{l^2}{(l_d + l\rho)^2} w_n'' + (1+2n^2) \frac{l^3}{(l_d + l\rho)^3} w_n' + \\
+ (n^4 - 4n^2) \frac{l^4}{(l_d + l\rho)^4} w_n + \alpha l^2 \left[w_n'' + \frac{l}{l_d + l\rho} w_n' - n^2 \frac{l^2}{(l_d + l\rho)^2} w_n \right] + \beta l^4 w_n = 0.
\end{aligned}$$

Rozwijając funkcję

$$\left(\frac{l}{l_d + l\rho} \right)^k, \quad k=1, \dots, 4$$

w szeregi Mac-Laurina, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \frac{l}{l_a+l\rho} &= \sum_{z=0}^{\infty} (-1)^z \left(\frac{l}{l_a}\right)^{1+z} \rho^z, \\
 \frac{l^2}{(l_a+l\rho)^2} &= \sum_{z=0}^{\infty} (-1)^z \left(\frac{l}{l_a}\right)^{2+z} (z+1)\rho^z, \\
 \frac{l^3}{(l_a+l\rho)^3} &= \frac{1}{2} \sum_{z=0}^{\infty} (-1)^z \left(\frac{l}{l_a}\right)^{3+z} (z+1)(z+2)\rho^z, \\
 \frac{l^4}{(l_a+l\rho)^4} &= \frac{1}{6} \sum_{z=0}^{\infty} (-1)^z \left(\frac{l}{l_a}\right)^{4+z} (z+1)(z+2)(z+3)\rho^z.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Można łatwo wykazać, że promienie zbieżności szeregów (2.14) są nie mniejsze od jedności, jeśli zachodzi zależność $l \leq l_a$.

Podstawiając zależności (2.5) do równań (2.13) oraz uwzględniając związki (2.14) otrzymamy teraz dla każdego n i $j \geq 4$ następujące wzory na poszczególne współczynniki wyrazów szeregów (2.5):

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad -j(j-1)(j-2)(j-3)w_j &= 2[A_0(j-1)(j-2)(j-3)w_{j-1} + \\
 &+ A_1(j-2)(j-3)(j-4)w_{j-2} + \dots] - (1+2n^2)[B_0(j-2)(j-3)w_{j-2} + \\
 &+ B_1(j-3)(j-4)w_{j-3} + \dots] + (1+2n^2)[C_0(j-3)w_{j-3} + C_1(j-4)w_{j-4} + \dots] + \\
 &+ (n^4 - 4n^2)[D_0w_{j-4} + D_1w_{j-5} + \dots] + \alpha l^2 \{(j-2)(j-3)w_{j-2} + \\
 &+ [A_0(j-1)w_{j-1} + A_1(j-2)w_{j-2} + \dots] - n^2[B_0w_{j-4} + B_1w_{j-5} + \dots]\} + \beta l^4 w_{j-4},
 \end{aligned}$$

gdzie $A_0, A_1, \dots; B_0, B_1, \dots; C_0, C_1, \dots; D_0, D_1, \dots$ są współczynnikami kolejnych wyrazów szeregów (2.14).

Przyjmując jako stałe całkowania w_0, w_1, w_2 i w_3 , a więc liczby będące wartością funkcji w_n dla $\rho=0$ oraz wartościami proporcjonalnymi do pochodnych tej funkcji w przekroju $\rho=0$, możemy poszczególne wyrazy szeregu (2.5) uzależnić od tych stałych. Zależność taką podano w tablicy 1. Znajdujące się w tej tablicy parametry w_s^t są liczbami występującymi w kolumnach t ($t=1, 2, 3, 4$) oraz w wierszach s . Możemy więc napisać

$$\begin{aligned}
 w_n(\rho) &= w_0 A_1 + w_1 A_2 + w_2 A_3 + w_3 A_4, \\
 w'_n(\rho) &= w_0 A'_1 + w_1 A'_2 + w_2 A'_3 + w_3 A'_4, \\
 w''_n(\rho) &= w_0 A''_1 + w_1 A''_2 + w_2 A''_3 + w_3 A''_4, \\
 w'''_n(\rho) &= w_0 A'''_1 + w_1 A'''_2 + w_2 A'''_3 + w_3 A'''_4,
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

gdzie

$$A_t = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \rho^j, \quad t=1, \dots, 4.
 \tag{2.17}$$

Tablica 1. Współczynniki wyrazów szeregu

Stale cał- kowania	w_0	w_1	w_2	w_3
współ- czynniki wyr. szer.	1	2	3	4
w_0	1	0	0	0
w_1	0	1	0	0
w_2	0	0	1	0
w_3	0	0	0	1
w_4	$a(4)w_0$	$b(4)w_1$	$c(4)w_2$	$d(4)w_3$
w_5	$a(5)w_0 + e(5)w_4$	$b(5)w_1 + e(5)w_4$	$c(5)w_2 + e(5)w_4$	$d(5)w_3 + e(5)w_4$
w_6	$a(6)w_0 + e(6)w_4 + f(6)w_5$	$b(6)w_1 + e(6)w_4 + f(6)w_5$	$c(6)w_2 + e(6)w_4 + f(6)w_5$	$d(6)w_3 + e(6)w_4 + f(6)w_5$
w_7	$a(7)w_0 + e(7)w_4 + f(7)w_5 + g(7)w_6$	$b(7)w_1 + e(7)w_4 + f(7)w_5 + g(7)w_6$	$c(7)w_2 + e(7)w_4 + f(7)w_5 + g(7)w_6$	$d(7)w_3 + e(7)w_4 + f(7)w_5 + g(7)w_6$
$w_j \quad j \geq 8$	$\frac{1}{w_j}$	$\frac{1}{w_j}$	$\frac{1}{w_j}$	$\frac{1}{w_j}$

$${}^t w_j = a(j)w_{j-8} + \dots + h(j)w_{j-1}, \quad t=1, \dots, 4$$

Można wykazać, że promień zbieżności szeregów potęgowych (2.17) jest dla podanych rozwiązań nie mniejszy od jedności w przypadku, gdy $l \leq 4l_d$. Dla przypadków zaś, gdy $l > 4l_d$, promień zbieżności tych szeregów jest mniejszy od jedności. Ponieważ obliczamy wartości szeregów (2.17) dla $\rho=1$, otrzymane rozwiązanie odnosi się do tych przypadków, dla których spełniony jest warunek $l \leq 4l_d$.

Znając wartości funkcji w_{n0d} oraz wartości w_{n1d} , w_{n2d} , w_{n3d} w przekroju i po stronie oznaczonej literą d oraz znając wartości funkcji A_i oraz ich pochodnych dla $\rho=1$, możemy określić w'_{ng} , w''_{ng} , w'''_{ng} i w''''_{ng} na końcu rozważanego przedziału po stronie oznaczonej literą g w następujący sposób:

$$(2.18) \quad w_{ng} = S w_{nd},$$

gdzie

$$(2.19) \quad S = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ A'_1 & A'_2 & A'_3 & A'_4 \\ A''_1 & A''_2 & A''_3 & A''_4 \\ A'''_1 & A'''_2 & A'''_3 & A'''_4 \end{bmatrix}_{\rho=1},$$

$$(2.20) \quad w_{ng} = \begin{bmatrix} w_{ng} \\ w'_{ng} \\ w''_{ng} \\ w'''_{ng} \\ w''''_{ng} \end{bmatrix}, \quad w_{nd} = \begin{bmatrix} w_{n0d} \\ w_{n1d} \\ w_{n2d} \\ w_{n3d} \end{bmatrix}.$$

Przy przejściu w danym przekroju $i+1$ ze strony oznaczonej literą g do strony oznaczonej literą d muszą być spełnione następujące warunki:

$$(2.21) \quad w(r, \varphi)_{i+1g} = w(r, \varphi)_{i+1d}, \quad \left[\frac{dw(r, \varphi)}{dr} \right]_{i+1g} = \left[\frac{dw(r, \varphi)}{dr} \right]_{i+1d}$$

oraz

$$(2.22) \quad m_{r i+1g} = m_{r i+1d},$$

$$\left[q_r - \frac{\partial m_{r\varphi}}{r \partial \varphi} \right]_{i+1g} - N_{i+1g} \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]_{i+1g} = \left[q_r - \frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial r \varphi} \right]_{i+1d} - N_{i+1d} \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right]_{i+1d}.$$

Równania (2.21) otrzymujemy z równości ugięć oraz kątów obrotu w kierunkach promieniowych w przekroju $i+1$, a równania (2.22) — z równości promieniowych momentów zginających i sił poprzecznych.

Dla płyt kołowych o stałej grubości mamy (por. np. [8], str. 499):

$$(2.23) \quad m_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right],$$

$$q_r - \frac{\partial m_{r\varphi}}{r \partial \varphi} = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) -$$

$$- \frac{\partial}{r \partial \varphi} \left[(1-\nu) D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Po uwzględnieniu zależności (2.2) i (2.7) otrzymamy więc

$$(2.24) \quad m_r = -\frac{D}{l^2} \sum_{j=0}^{\infty} \left[w_n'' + v \left(\frac{l}{l_d + l\rho} w_n' - \frac{n^2 l^2}{(l_d + l\rho)^2} w_n \right) \right] \cos \varphi,$$

$$q_r - \frac{\partial m_{r\varphi}}{r \partial \varphi} = -\frac{D}{l^3} \left[w_n''' + \frac{l}{l_d + l\rho} w_n'' - \frac{l^2}{(l_d + l\rho)^2} K_n w_n' + \frac{2l^3 n^2}{(l_d + l\rho)^3} L_n w_n \right] \cos n\varphi.$$

gdzie

$$K_n = 1 + 2n^2 - \nu n^2, \quad L_n = 3n^2 + \nu n^2.$$

Z równań (2.22), po uwzględnieniu zależności (2.24), otrzymamy dla każdego n następujące wzory:

$$(2.25) \quad w_{2, i+1d} = \frac{1}{2} w_{n, i+1d}'' = w_{n, i+1g}' B_1 + w_{n, i+1g}' B_2 + w_{n, i+1g} B_3,$$

$$w_{3, i+1d} = \frac{1}{6} w_{n, i+1d}''' = w_{n, i+1g}''' C_1 + w_{n, i+1g}'' C_2 + w_{n, i+1g}' C_3 + w_{n, i+1g} C_4,$$

gdzie

$$B_1 = \frac{D_i l_{i+1}^2}{2l_i^2 D_{i+1}}, \quad B_2 = v \left(\frac{D_i}{l_i (l_{di} + l_i)} - \frac{D_{i+1}}{l_{d+1} l_i} \right) \frac{l_{i+1}^2}{2D_{i+1}},$$

$$B_3 = - \left(\frac{D_i l_i^2 l_{i+1}^2 n^2}{2D_{i+1} l_i^2 (l_{di} + l_i)^2} - \frac{l_{i+1}^2 n^2}{2l_{d+1}} \right),$$

$$C_1 = \frac{D_i l_{i+1}^3}{6l_i^3 D_{i+1}}, \quad C_2 = \frac{D_i l_{i+1}^3}{6D_{i+1} l_i^2 (l_{di} + l_i)} - \frac{l_{i+1} B_1}{3l_{d+1}},$$

$$C_3 = K_n \left[\frac{l_{i+1}^3}{6l_{d+1} l_i} - \frac{D_i l_{i+1}^3}{6D_{i+1} l_i (l_{di} + l_i)^2} - \frac{N_{i+1g} - N_{i+1d}}{D_{i+1} K_n l_i} \frac{l_{i+1}^3}{l_i} \right] - \frac{l_{i+1}}{3l_{d+1}} B_2,$$

$$C_4 = L_n \left[\frac{D_i l_{i+1}^3}{6D_{i+1} (l_{di} + l_i)^3} - \frac{l_{i+1}^3}{6l_{d+1}^3} \right] - \frac{l_{i+1}}{3l_{d+1}} B_3.$$

Z równań (2.21) wynikają zaś formuły

$$(2.26) \quad w_{ni+1d} = w_{ni+1g}, \quad w_{li+1d} = w_{ni+1d}' = w_{ni+1g}' \frac{l_{i+1}}{l_i}.$$

Możemy więc napisać

$$(2.27) \quad w_{ni+1d} = U_{i+1} w_{ni+1g} = U_{i+1} S_i w_{nid},$$

gdzie

$$(2.28) \quad U_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_{i+1}}{l_i} & 0 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 & 0 \\ C_4 & C_3 & C_2 & C_1 \end{bmatrix}.$$

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie dla wszystkich odcinków płyty otrzymamy

$$(2.29) \quad w_{m+1} = R w_1,$$

gdzie

$$(2.30) \quad R = S_m U_m S_{m-1} U_{m-1} \dots U_3 S_2 U_2 S_1,$$

$$(2.31) \quad w_{m+1} = \begin{bmatrix} w_{m+1} \\ w'_{m+1} \\ w''_{m+1} \\ w'''_{m+1} \\ w_{m+1} \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} w_{01} \\ w_{11} \\ w_{21} \\ w_{31} \end{bmatrix}.$$

W zależności od warunków brzegowych na krawędziach $r=l_0$ i $r=l_0+l$ możemy określić interesujące nas częstości kątowe drgań swobodnych z warunków znikania odpowiednich wyznaczników (minorów) macierzy (2.30).

Tak więc w przypadku krawędzi $r=l_0$ i $r=l_0+l$ swobodnie podpartych mamy

$$(2.32) \quad w_{01} = m_{r1} = w_{0m+1} = m_{rm+1} = 0.$$

Po uwzględnieniu zależności (2.2) i (2.23) możemy obliczyć kwadrat częstości kątowej drgań swobodnych układu z warunku

$$(2.33) \quad \begin{vmatrix} S_{12} - \frac{\nu l_1}{2} S_{13} & S_{14} \\ S_{32} - \frac{\nu l_1}{2} S_{33} + \nu l_m \left(S_{22} - \frac{\nu l_1}{2} S_{23} \right) & S_{34} + \nu l_m S_{24} \end{vmatrix} = 0,$$

gdzie S_{ab} są elementami macierzy (2.30).

Jeśli krawędź $r=l_0$ jest utwierdzona, a krawędź $r=l_0+l$ jest swobodnie podparta, to mamy

$$w_{01} = w_{11} = 0$$

oraz

$$w_{0m} = m_{rm} = 0.$$

Kwadrat częstości kątowej drgań swobodnych układu możemy więc obliczyć w tym przypadku z warunku znikania wyznacznika

$$(2.34) \quad \begin{vmatrix} S_{13} & S_{14} \\ \nu l_m S_{23} + S_{33} & \nu l_m S_{24} + S_{34} \end{vmatrix}.$$

Podobne wzory do obliczania częstości drgań swobodnych rozpatrywanych płyt pierścieniowych można łatwo uzyskać dla innych kombinacji warunków brzegowych na ich krawędziach.

3. Obliczenia numeryczne

Podane w niniejszej pracy rozwiązania problemu umożliwiają prowadzenie obliczeń numerycznych według prostego algorytmu. Obliczenia te są jednak, w przypadku posługiwania się tradycyjnymi urządzeniami liczącymi, bardzo czasochłonne.

W związku z powyższym uruchomiono dwa programy dla elektronicznej maszyny cyfrowej «Odra 1204». Pomijając szczegółowe opisy tych programów oraz rezultaty obliczeń festujących, ograniczymy się tu do przytoczenia wyników obliczeń przeprowadzonych dla dwóch przykładów liczbowych.

Celem dotychczas przeprowadzonych obliczeń było przede wszystkim porównanie podanych dwóch wersji rozwiązania problemu oraz sprawdzenie dla konkretnych przykładów jak szybko są zbieżne stosowane szeregi potęgowe.

Przykład 1. Określić dla $n=0$ podstawową częstotliwość drgań swobodnych płyty pierścieniowej o stałej grubości, utwierdzonej na krawędziach, mając następujące dane (rys. 2): $l_d=40$ m; $l=10$ m; $h=0,1$ m; $E=2 \cdot 10^6$ T/m²; $\nu=0,2$; $\mu=0,0244$ Ts²/m³; $k_t=k_z=N=0$.

Za pomocą programu obliczeń otrzymano dla tej płyty podstawowe częstości kątowe drgań swobodnych, które w zależności od liczby szeregu (2.5) podano w tablicy 2. Poszczególne wartości wyznaczono z dokładnością do 0,001 rd/s.

Tablica 2. Zależność ω od liczby wyrazów szeregu przy $n_t=k_z=k_t=N=0$

Liczba wyrazów szeregu		9	13	18	28	48	88
ω , rd/s	rozwiązanie (2.10)	16,006	17,510	18,816	18,838	18,829	18,829
	rozwiązanie (2.15)	16,250	17,310	18,820		18,830	

Z liczb podanych w tablicy 2 wynika, że stosowane szeregi potęgowe są stosunkowo szybko zbieżne. Przy liczbie wyrazów szeregu większej od trzydziestu otrzymane wyniki praktycznie nie różnią się. Ponadto można stwierdzić, iż wyniki uzyskane w tym przykładzie dla dwóch podanych wersji rozwiązania są praktycznie takie same.

Dla porównania obliczono podstawową częstość kołową drgań swobodnych dla sztywno zamocowanego na końcach pręta o jednostkowej szerokości. Zastępując sztywność giętną pręta sztywnością walcową otrzymano ze znanego wzoru (por. np. [9], str. 284) $\omega_0=18,8$ rd/s. Wyniki otrzymane dla płyty pierścieniowej różnią się więc w tym przypadku nieznacznie od tej ostatniej wartości.

W tablicy 3 podano podstawowe częstości kołowe drgań swobodnych, otrzymane przy różnych wartościach współczynnika podatności k_z ($n=0$). W tablicy 4 przedstawiono zaś wartości ω_0 , otrzymane przy kilku różnych liczbach n .

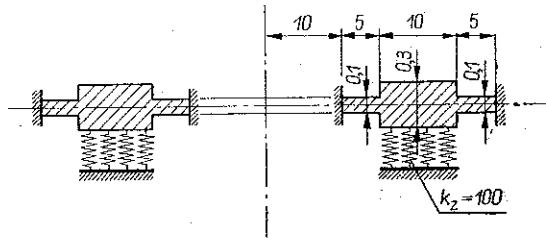
Tablica 3. Zależność ω od k_z przy $n=k_t=N=0$, liczba wyrazów szeregu 48

k_z , T/m ³	0	10	100
ω , rd/s	18,83	27,69	66,67

Tablica 4. Zależność ω_0 od n przy $k_z=k_t=N=0$, liczba wyrazów szeregu 48

n	0	1	2	3
ω_0 , rd/s	18,83	18,90	19,13	19,52

Przykład 2. Określić przy $n=1$ zawarte w przedziale $0 \leq \omega \leq 100$ rd/s częstości kątowe drgań swobodnych płyty przedstawionej na rys. 3, jeśli $E=2 \cdot 10^6$ T/m²; ciężar objętościowy materiału płyty $\gamma=2,4$ T/m³, $\nu=0,2$.



Rys. 3

W wyniku przeprowadzonych na EMC «Odra 1204» obliczeń otrzymano $\omega_0=53,90$ rd/s oraz $\omega_1=76,55$ rd/s.

Literatura cytowana w tekście

1. В. С. ГОНТРЕВИЧ, *Собственные колебания пластинок и оболочек*, Наукова Думка, Киев 1964.
2. H. WAGNER, *Die Stabilitätsberechnung abgesetzter Knickstäbe mit Hilfe der Laplace-Transformation und der Matrizenrechnung*, Z. VDI, 1957, 1251 - 1257.
3. H. WAGNER, *Die Stabilität der axial gedrückten Kreiszyinderschale mit veränderlicher Wandstärke*, Österr. Ing.-Archiv, 4, 1960.
4. O. MATEJA, *Niesymetryczne drgania swobodne kołistej powłoki walcowej o zmiennej grubości*, Arch. Inżyn. Łądown., 2, 1970.
5. O. MATEJA, *Zastosowanie macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej pręta ściśkanego, zanurzonego w ośrodku sprężystym*, Inż. i Bud., 2, 1970.
6. A. GOMULIŃSKI, *Determination of eigenvalues for circular plates resting on elastic foundation with two moduli*, Arch. Inżyn. Łądown., 2, 1969.
7. В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев, *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*, Физматгиз, Москва 1960.
8. S. KALISKI i in., *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.
9. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa 1964.

Резюме

ИЗ ВОПРОСОВ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРУГОВЫХ ПЛАСТИНОК

В работе решается вопрос свободных колебаний однородной изотропной пластинки с переменной скачкообразной толщиной по радиусу. Предполагается, что пластинка покоится на двухпараметрическом упругом основании типа Винклера или Леонтьева-Власова.

Кроме того принимается, что пластинка загружена силами, действующими в ее плоскости. Решение задачи получено при использовании так называемого метода матрицы переноса. Пластинка была разделена на конечное число соосных колец. Принимая, что толщина каждого кольца постоянная, получено решение дифференциального уравнения, применяя разложение поверхности прогиба в бесконечный одинарный тригонометрический ряд. Затем определено общий интеграл уравнения, стараясь найти решение в виде бесконечного степенного ряда. На основе полученного для каждого кольца решения, получено матрицу переноса R — формула (2.30). Затем из элементов этой матрицы, в зависимости от краевых условий на краях пластинки, были составлены уравнения частоты.

Приводятся результаты числовых расчетов, проведенных для двух числовых примеров.

Summary

FROM THE PROBLEMS OF EINGENVALUES OF RING PLATES

In this paper is solved the problem of the free vibration of uniform isotropic ring plate having a discontinuously varying thickness along the radii. It was assumed that the plate is resting on a two-parameter elastic base of the Winkler or Leontiev-Vlasov type. Moreover, it is assumed that the plate is under the load of forces acting in its plane. Solution of the problem is obtained by means of the method of transfer matrix. The plate is divided into a finite number of concentric rings. Assuming that the thickness of each ring is constant the solution of the differential equation is obtained using the development of the surface of bending into an infinite single trigonometrical series. Next, the general integral of the equation is determined by seeking the solution in the form of an infinite power series. On the basis of the solution obtained for each ring, the transfer matrices R are formed (formula 2.30). Subsequently, from the elements of this matrix, depending on the boundary conditions on the edges of the plate, the equations of frequency are built up.

The results of numerical calculations for two numerical examples are given.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA
W OPOLU

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1970 r.