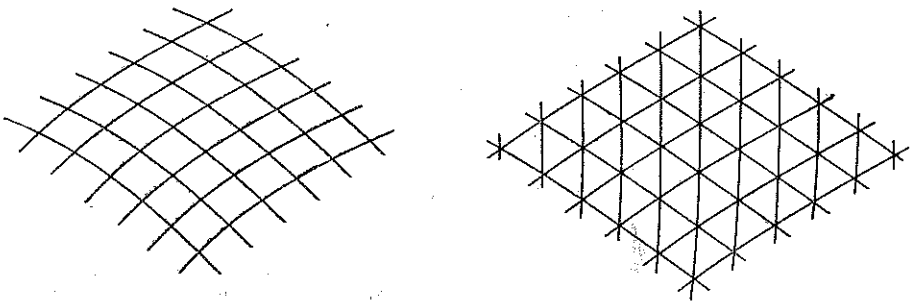


SPRĘŻYSTOŚĆ GĘSTYCH SIATEK O ZŁOŻONEJ STRUKTURZE

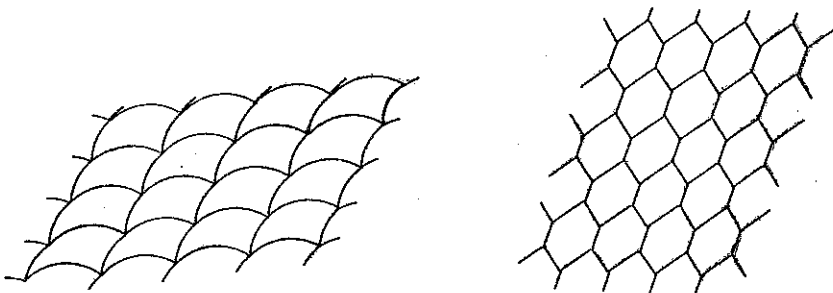
CZESŁAW WOŹNIAK (WARSZAWA) i PIOTR KLEMM (ŁÓDŹ)

Wstęp

Zastosowanie równań ośrodka Cosseratów jako modelu ciągłego gęstych siatek sprężystych o sztywnych węzłach było w ostatnich latach tematem wielu prac. Wyniki większości opracowań zostały zebrane w książce [4], zawierającej także przegląd literatury problemu. Podstawy teoretyczne podane w pracach [1 i 2] oraz liczne przykłady obliczeń dotyczą przede wszystkim siatek o strukturach przedsta-



Rys. 1

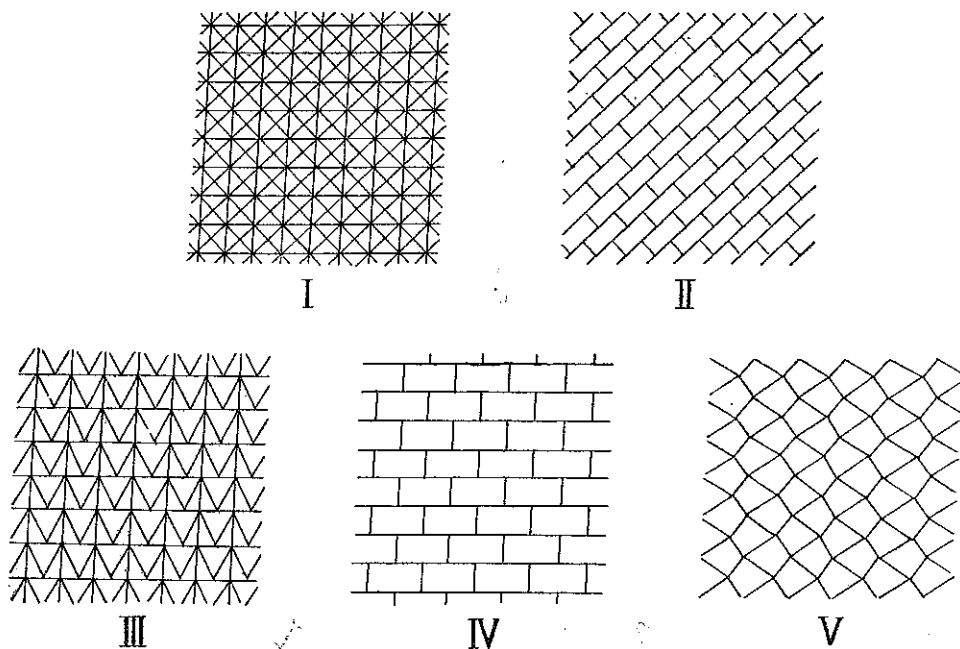


Rys. 2

wionych na rys. 1. Każdy element tych siatek łączący dwa sąsiednie węzły jest jednorodny, prosty i pryzmatyczny. Równania modelu ciągłego siatek, w których elementy łączące sąsiednie węzły mogą być przestrzennie zakrzywione i niejednorodne, zostały wyprowadzone w pracy [3]; rozpatrywane były także modele ciągłe siatek typu «plaster miodu» [5]. Fragmenty takich siatek przedstawia rys. 2. Wszystkie

dotychczasowe rozważania obejmują jednak tylko modele ciągłe siatek, w których każdy nie znajdujący się na brzegu siatki węzeł jest połączony trzema, czterema lub sześcioma łącznikami odpowiednio z trzema, czterema lub sześcioma węzłami sąsiednimi (rys. 1 i 2).

Tematem tej pracy jest zastosowanie równań ośrodka Cosseratów jako ciągłego modelu gęstych powierzchniowych siatek sprężystych o bardziej złożonej strukturze. Fragmenty niektórych z tych siatek przedstawia rys. 3. Zakładamy, że wszystkie węzły siatki są doskonale sztywne, a odcinki prętów łączących każde dwa sąsiednie węzły są pryzmatyczne, jednorodne, izotropowe i liniowo sprężyste. Zakładamy ponadto, że każdy typowy wycinek siatki (np. wycinek $S_{III}S_{IV}S_VS_{VI}$ wyróżniony na rys. 4) można traktować w przybliżeniu jako ukształtowany na płaszczyźnie, która jest zarazem płaszczyzną symetrii sprężystej tego wycinka. Wszystkie założenia dotyczące warunków stosowalności ciągłego modelu siatki (gęstość i regularność struktury siatki oraz regularność obciążenia), omówione np. w książce [4], przyjmujemy jako spełnione.

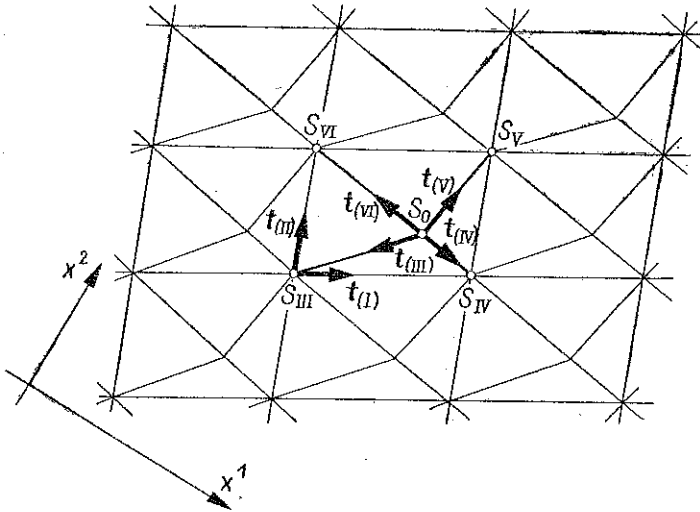


Rys. 3

W pracy wykazujemy, że siatki przedstawione na rys. 3 mogą być traktowane jako przypadki szczególne siatki, której fragment pokazano na rys. 4. Tym samym rozważania ogólne ograniczymy do tej ostatniej. Przy przyjętych założeniach związki konstytutywne modelu ciągłego siatki rozdzielają się na niezależne związki dla zagadnienia «tarczowego» i «pływowego». Każde z tych zagadnień rozważymy osobno, traktując najpierw dla uproszczenia siatkę jako ukształtowaną na płaszczy-

źnie (punkty 1–4). W piątym punkcie pracy uogólnimy rozważania na siatki kształtowane na powierzchni.

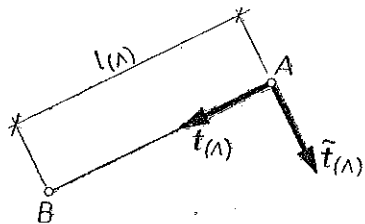
Stosujemy wszędzie konwencję sumacyjną dla wskaźników K, L, M, \dots (każdy z nich przebiega ciąg 1, 2). Pochodną cząstkową oznaczamy przecinkiem oraz stosujemy znane oznaczenia δ_{KL} i ε_{KL} dla symboli Kroneckera i Ricciego. Wskaźniki «martwe» Δ, A, \dots , wszędzie tam gdzie nie zaznaczamy inaczej, przebiegają ciąg I, II, ..., V, VI.



Rys. 4

1. Ogólne równania tarcz siatkowych

Przedmiotem rozważań jest siatka, której geometryczną strukturę przedstawia rys. 4. Przyjmujemy na razie, że siatka jest płaska, a płaszczyzna π , na której kształtujemy siatkę, jest płaszczyzną symetrii sprężystej i płaszczyzną obciążenia. Symbolem x^K oznaczamy prostokątne współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie π . Oznaczamy dalej przez $u_K = u_K(x^1, x^2)$, $v = v(x^1, x^2)$ różniczkowalne funkcje, których wartości we wszystkich punktach płaszczyzny π , w których schodzi się osiem prętów siatki (np. punkty S_{III} , S_{IV} , S_V i S_{VI} na rys. 4), są kolejno równe składowym wektora przesunięcia znajdującego się tam węzła oraz obrotowi tego węzła. Zgodnie z przyjętymi założeniami przesunięcia i obroty zachodzą tylko w płaszczyźnie π . Przyjmując, że układ jest regularny [4], funkcje u_K , v będziemy traktować w przybliżeniu jako liniowe w każdym równoległoboku rozpiętym na wektorach $t_{(I)}l_{(I)}$, $t_{(II)}l_{(II)}$ (rys. 4). Niech $t_{(A)}^K$, $\bar{t}_{(A)}^K$ będą składowymi wektorów jednostkowych (rys. 5) $\bar{t}_{(A)}^K = \varepsilon_L^K t_{(A)}^L$. Oznaczmy przez $u_K(S_A)$, $v(S_A)$, ($A=III, IV, V, VI$), składowe wektorów przesunięcia oraz obroty czterech węzłów S_{III}, \dots, S_{VI}



Rys. 5

zaznaczonego na rys. 4 wycinka siatki. W ramach założonego przybliżenia spełnione są wtedy związki

$$(1.1) \quad u_K(S_A) = u_K + t_{(A)}^L l_{(A)} u_{K,L}, \quad v(S_A) = v + t_{(A)}^L l_{(A)} v_{,L}, \quad A = \text{III, IV, V, VI},$$

w których wartości funkcji u_K , v oraz ich pochodnych należy przyjąć w punkcie płaszczyzny π literą S_0 (rys. 4). Oznaczmy następnie przez $\check{u}_K(S_0)$, $\check{v}(S_0)$ składowe wektora przesunięcia i obrót węzła S_0 . Należy zaznaczyć, że $u_K \neq \check{u}_K$ i $v \neq \check{v}$, gdyż funkcje u_K , v opisują przesunięcie i obrót tylko tych węzłów, w których schodzi się osiem prętów (węzły S_{III} , S_{IV} , S_{V} i S_{VI} na rys. 4). Oznaczmy

$$(1.2) \quad \Delta u_K \equiv \check{u}_K - u_K, \quad \Delta v \equiv \check{v} - v.$$

Niech następnie $N_{(A)}$, $\check{Q}_{(A)}$, $\check{K}_{(A)}$ ($A = \text{III, IV, V, VI}$) oznacza kolejno siłę podłużną, siłę poprzeczną oraz moment zginający (działające w płaszczyźnie π) w przekroju pręta $S_0 S_A$ przy węźle S_0 ; wielkości te działają na węzeł S_0 . Niech $E_{(A)}$, $A_{(A)}$ i $I_{(A)}$ oznaczają kolejno moduł Younga, pole przekroju i centralny moment bezwładności względem osi normalnej do π przekroju pręta, na którego osi leży wektor $t_{(A)}$ (rys. 4). Wpływ odkształceń postaciowych pręta w płaszczyźnie π na jego energię sprężystą będziemy uwzględniać współczynnikiem bezwymiarowym γ_A zgodnie ze wzorem (1.16). Zakładamy, że wszystkie pręty między ograniczającymi je węzłami są przyrządzone, jednorodne, izotropowe i liniowo-sprężyste. Ponadto obciążenie zewnętrzne przyjmujemy jako działające wyłącznie na węzły. W tym przypadku

$$(1.3) \quad \begin{aligned} N_{(A)} &= \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K [u_K(S_A) - \check{u}_K(S_0)] = E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L (u_{K,L} + \varepsilon_{KL} v) - \\ &\quad - \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta u_K, \\ (1+12\gamma_A) \check{Q}_{(A)} &= \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}^2} \left[t_{(A)}^K \frac{u_K(S_A) - \check{u}_K(S_0)}{l_{(A)}} - \frac{v(S_A) + \check{v}(S_0)}{2} \right] = \\ &= \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K t_{(A)}^L (u_{K,L} + \varepsilon_{KL} v) - \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K v_{,K} - \\ &\quad - \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}^3} t_{(A)}^K \Delta u_K - \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}^2} \Delta v, \\ (1+12\gamma_A) \check{K}_{(A)} &= -\frac{2E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}} \left[2\check{v}(S_0) + v(S_A) + 6\gamma_A (\check{v}(S_0) - v(S_A)) - \right. \\ &\quad \left. - 3t_{(A)}^K \frac{u_K(S_A) - \check{u}_K(S_0)}{l_{(A)}} \right] = -2E_{(A)} I_{(A)} (1-6\gamma_A) t_{(A)}^K v_{,K} + \\ &\quad + \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L (u_{K,L} + \varepsilon_{KL} v) - \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \Delta u_K - \frac{4E_{(A)} I_{(A)} (1+3\gamma_A)}{l_{(A)}} \Delta v, \end{aligned}$$

przy czym powyższe wzory są prawdziwe tylko dla $A = \text{III, IV, V, VI}$. Można zauważyć, że $N_{(A)}$, $\check{Q}_{(A)}$ i $\check{K}_{(A)}$ we wzorze (1.3) zależą od Δu_K , Δv oraz od następujących składowych tarczowego stanu odkształcenia [1]:

$$(1.4) \quad \gamma_{KL} = u_{L,K} + \varepsilon_{LK} v, \quad \kappa_K = v_{,K}.$$

W celu wyrugowania z (1.3) różnic Δu_K i Δv wykorzystamy warunki równowagi węzła, w którym schodzą się cztery pręty (węzeł S_0 na rys. 4). Mają one postać

$$(1.5) \quad \sum_{A=III}^{VI} (t_{(A)}^M N_{(A)} + \tilde{t}_{(A)}^M Q_{(A)}) + b_*^M = 0, \quad \sum_{A=III}^{VI} \check{K}_{(A)} + h_* = 0,$$

w której b_*^M oraz h_* są obciążeniami przyłożonymi do tego węzła. Podstawiając do (1.5) wyrażenia (1.3), otrzymamy układ trzech równań dla trzech wielkości Δu_K , Δv :

$$(1.6) \quad \sum_{A=III}^{VI} \left[\begin{array}{cc} \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K & \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^M \\ \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K & \frac{4E_{(A)} I_{(A)} (1+3\gamma_A)}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}} \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} \Delta u_K \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_*^M \\ h_* \end{bmatrix} + \\ + \sum_{A=III}^{VI} \left[\begin{array}{cc} \left(E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K \right) t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K \kappa_K & \\ \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{2E_{(A)} I_{(A)} (1-6\gamma_A)}{1+12\gamma_A} t_{(A)}^K \kappa_K & \end{array} \right]$$

Wprowadzając symetryczną macierz 3×3 , zdefiniowaną przez

$$(1.7) \quad \begin{bmatrix} D_{NM} & D_N \\ D_N & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_1 \\ D_{21} & D_{22} & D_2 \\ D_1 & D_2 & D \end{bmatrix} \equiv \\ \equiv \left(\sum_{A=III}^{VI} \left[\begin{array}{cc} \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K & \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^M \\ \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K & \frac{4E_{(A)} I_{(A)} (1+3\gamma_A)}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}} \end{array} \right] \right)^{-1},$$

rozwiązanie układu równań (1.6) napiszemy w postaci

$$(1.8) \quad \begin{bmatrix} \Delta u_N \\ \Delta v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{NM} & D_N \\ D_N & D \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_*^M \\ h_* \end{bmatrix} + \sum_{A=III}^{VI} \left[\begin{array}{cc} E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^M t_{(A)}^K t_{(A)}^L + \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L & \\ \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L & \end{array} \right] \gamma_{LK} - \right. \\ \left. - \sum_{A=III}^{VI} \left[\begin{array}{cc} \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_A) l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K & \\ \frac{2E_{(A)} I_{(A)} (1-6\gamma_A)}{1+12\gamma_A} t_{(A)}^K & \end{array} \right] \kappa_K \right).$$

Niech $P_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)}$ i $\check{M}_{(A)}$ oznaczają kolejno siłę podłużną, poprzeczną oraz moment zginający w przekrojach połowiących pręty o osi wyróżnionej wektorami stycznymi $t_{(A)}$. Oznaczmy przez $u_K^{(+)}$, $v^{(+)}$ oraz $u_K^{(-)}$, $v^{(-)}$ składowe wektora przesunięcia i obrót kolejno przekroju początkowego (przekrój A na rys. 5) oraz końcowego (przekrój B na rys. 5) dowolnego odcinka pręta łączącego dwa węzły. Dla $A=I, II$, podobnie jak w [1], przyjmujemy

$$(1.9) \quad \begin{aligned} u_K^{(+)} &= u_K + \frac{1}{2} t_{(A)}^L l_{(A)} u_{K,L}, & v^{(+)} &= v + \frac{1}{2} t_{(A)}^L l_{(A)} v_{,L}, \\ u_K^{(-)} &= u_K - \frac{1}{2} t_{(A)}^L l_{(A)} u_{K,L}, & v^{(-)} &= v - \frac{1}{2} t_{(A)}^L l_{(A)} v_{,L}, \end{aligned}$$

gdzie wartości funkcji u_K , v oraz ich pochodnych należy brać w punkcie połowiącym odcinek AB (rys. 5). Wtedy

$$(1.10) \quad \begin{aligned} P_{(A)} &= \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K (u_K^{(+)} - u_K^{(-)}) = E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L u_{K,L} = E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK}, \\ \tilde{P}_{(A)} &= \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_{\Delta}) I_{(A)}^2} \left(t_{(A)}^K \frac{u_K^{(+)} - u_K^{(-)}}{l_{(A)}} - \frac{v^{(+)} + v^{(-)}}{2} \right) = \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_{\Delta}) I_{(A)}^2} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK}, \\ \check{M}_{(A)} &= \frac{E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}} (v^{(+)} - v^{(-)}) = E_{(A)} I_{(A)} t_{(A)}^K \kappa_K, \quad \Delta=I, II. \end{aligned}$$

Dla $\Delta=III, IV, V, VI$ mamy $P_{(A)}=N_{(A)}$, $\tilde{P}_{(A)}=Q_{(A)}$ oraz $\check{M}_{(A)}=\check{K}_{(A)}-0,5\tilde{P}_{(A)}l_{(A)}$, co zgodnie z (1.3) i (1.4) prowadzi do wzorów

$$(1.11) \quad \begin{aligned} P_{(A)} &= E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta u_K, \\ \tilde{P}_{(A)} &= \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_{\Delta}) I_{(A)}^2} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK} - \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_{\Delta}) l_{(A)}} t_{(A)}^K \kappa_K - \\ &\quad - \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_{\Delta}) I_{(A)}^3} t_{(A)}^K \Delta u_K - \frac{6E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_{\Delta}) I_{(A)}^2} \Delta v, \\ \hat{M}_{(A)} &= E_{(A)} I_{(A)} t_{(A)}^K \kappa_K - \frac{E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}} \Delta v, \quad \Delta=III, IV, V, VI, \end{aligned}$$

przy czym Δu_K i Δv należy tu wyrazić przez γ_{LK} i κ_K , zgodnie z (1.8).

Oznaczając dla $\Delta=I, II$

$$(1.12) \quad \begin{aligned} R_{(A)}^{KL} &\equiv E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L, & R_{(A)}^K &\equiv 0, & P_{(A)}^* &\equiv 0; \\ \tilde{R}_{(A)}^{KL} &\equiv \frac{12E_{(A)} I_{(A)}}{(1+12\gamma_{\Delta}) I_{(A)}^2} t_{(A)}^K t_{(A)}^L, & \tilde{R}_{(A)}^K &\equiv 0, & \tilde{P}_{(A)}^* &\equiv 0; \\ \check{S}_{(A)}^K &\equiv E_{(A)} I_{(A)} t_{(A)}^K, & \check{S}_{(A)}^{KL} &\equiv 0, & \check{M}_{(A)}^* &\equiv 0 \end{aligned}$$

oraz dla $\Delta=III, IV, V, VI$

$$R_{(\Delta)}^{KL} \equiv E_{(\Delta)} A_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L - \frac{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^N \left[D_{NM} \sum_{\Lambda=III}^{VI} \left(E_{(\Delta)} A_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} \tilde{t}_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L \right) + D_N \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \right],$$

$$R_{(\Delta)}^K \equiv \frac{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^N \left[D_{NM} \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K + \right. \\ \left. + D_N \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{2E_{(\Delta)} I_{(\Delta)} (1-6\gamma_{\Lambda})}{1+12\gamma_{\Lambda}} t_{(\Delta)}^K \right],$$

$$P_{(\Delta)}^* \equiv -\frac{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^N (D_{NM} b_*^M + D_N h_*)$$

(1.13)

$$\tilde{R}_{(\Delta)}^{KL} \equiv \frac{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L - \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} \left[D_M \sum_{\Lambda=III}^{VI} \left(E_{(\Delta)} A_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} \tilde{t}_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L \right) + D \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \right] - \\ - \frac{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} \tilde{t}_{(\Delta)}^N \left[D_{NM} \sum_{\Lambda=III}^{VI} \left(E_{(\Delta)} A_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} \tilde{t}_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L \right) + D_N \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \right],$$

$$\tilde{R}_{(\Delta)}^K \equiv -\frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K + \frac{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} \tilde{t}_{(\Delta)}^N \times \\ \times \left[D_{NM} \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K + D_N \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{2E_{(\Delta)} I_{(\Delta)} (1-6\gamma_{\Lambda})}{1+12\gamma_{\Lambda}} t_{(\Delta)}^K \right] + \\ + \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} \left[D_N \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^N t_{(\Delta)}^K + \right. \\ \left. + D \sum_{\Lambda=III}^{VI} \frac{2E_{(\Delta)} I_{(\Delta)} (1-6\gamma_{\Lambda})}{1+12\gamma_{\Lambda}} t_{(\Delta)}^K \right],$$

$$\tilde{F}_{(\Delta)}^* \equiv \frac{-12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} \tilde{t}_{(\Delta)}^N (D_{NM} b_*^M + D_N h_*) - \frac{6E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{(1+12\gamma_{\Lambda}) l_{(\Delta)}^2} (D_N b_*^N + D h_*);$$

$$\begin{aligned}
 (1.13) \quad \check{S}_{(d)}^K &\equiv E_{(d)} I_{(d)} t_{(d)}^K + \frac{E_{(d)} I_{(d)}}{l_{(d)}} \left[D_N \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(d)} I_{(d)}}{(1+12\gamma_A) l_{(d)}} \check{t}_{(d)}^N t_{(d)}^K + \right. \\
 &\quad \left. + D \sum_{A=III}^{VI} \frac{2E_{(d)} I_{(d)} (1-6\gamma_A)}{1+12\gamma_A} t_{(d)}^K \right], \\
 \check{S}_{(d)}^{KL} &\equiv -\frac{E_{(d)} I_{(d)}}{l_{(d)}} \left[D_M \sum_{A=III}^{VI} \left(E_{(d)} A_{(d)} t_{(d)}^M t_{(d)}^K t_{(d)}^L + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{12E_{(d)} I_{(d)}}{(1+12\gamma_A) l_{(d)}^2} \check{t}_{(d)}^M t_{(d)}^K \check{t}_{(d)}^L \right) + D \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(d)} I_{(d)}}{(1+12\gamma_A) l_{(d)}} t_{(d)}^K \check{t}_{(d)}^L \right], \\
 \check{M}_{(d)}^* &\equiv -\frac{E_{(d)} I_{(d)}}{l_{(d)}} (D_N b_*^N + D h_*),
 \end{aligned}$$

równania (1.10) i (1.11) można ująć we wspólnym zapisie

$$\begin{aligned}
 (1.14) \quad P_{(d)} &= R_{(d)}^{KL} \gamma_{KL} + R_{(d)}^K \kappa_K + P_{(d)}^*, \\
 \check{P}_{(d)} &= \check{R}_{(d)}^{KL} \gamma_{KL} + \check{R}_{(d)}^K \kappa_K + \check{P}_{(d)}^*, \\
 \check{M}_{(d)} &= \check{S}_{(d)}^K \kappa_K + \check{S}_{(d)}^{KL} \gamma_{KL} + \check{M}_{(d)}^*.
 \end{aligned}$$

Przy wyprowadzeniu związków (1.14) zakładaliśmy, że wszystkie obciążenia zewnętrzne tarczy siatkowej są zaczepione tylko w węzłach. W przypadku bardziej ogólnym zmienia się tylko budowa wyrażeń dla $P_{(d)}^*$, $\check{P}_{(d)}^*$ i $\check{M}_{(d)}^*$.

Oznaczmy przez σ potencjał sprężysty modelu ciągłego tarczy siatkowej, odniesiony do jednostki pola powierzchni π . Niech F będzie polem typowego wycinka tarczy, tj. równoległoboku rozpiętego na wektorach $\mathbf{t}_{(I)} l_{(I)}$, $\mathbf{t}_{(II)} l_{(II)}$. Oznaczmy ponadto

$$(1.15) \quad \check{l}_{(d)} \equiv \frac{F}{l_{(d)}}.$$

Potencjał σ' możemy wyrazić za pomocą funkcji

$$\begin{aligned}
 (1.16) \quad \sigma' &= \frac{1}{F} \sum_{A=I}^{VI} \left[\int_{-0,5l_{(d)}}^{0,5l_{(d)}} \frac{(\check{M}_{(d)} - \check{P}_{(d)} x)^2}{2E_{(d)} I_{(d)}} dx + \int_{-0,5l_{(d)}}^{0,5l_{(d)}} \frac{P_{(d)}^2}{2E_{(d)} A_{(d)}} dx + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-0,5l_{(d)}}^{0,5l_{(d)}} \frac{\gamma_A \check{P}_{(d)}^2 l_{(d)}^2}{2E_{(d)} I_{(d)}} dx \right] = \sum_{A=I}^{VI} \frac{1}{l_{(d)}} \left(\frac{\check{M}_{(d)}^2}{2E_{(d)} I_{(d)}} + \frac{P_{(d)}^2}{2E_{(d)} A_{(d)}} + \frac{(1+12\gamma_A) \check{P}_{(d)}^2 l_{(d)}^2}{24E_{(d)} I_{(d)}} \right),
 \end{aligned}$$

przy czym wielkości $P_{(d)}$, $P_{(d)}^*$ i $\check{M}_{(d)}$ są tu określone przez (1.14). Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{aligned}
 A^{KLMN} &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left(\frac{\check{S}_{(d)}^{KL} \check{S}_{(d)}^{MN}}{E_{(d)} I_{(d)}} + \frac{R_{(d)}^{KL} R_{(d)}^{MN}}{E_{(d)} A_{(d)}} + \frac{(1+12\gamma_d) \check{R}_{(d)}^{KL} \check{R}_{(d)}^{MN} l_{(d)}^2}{12E_{(d)} I_{(d)}} \right) \frac{1}{l_{(d)}}, \\
 'B^{KLM} &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left(\frac{\check{S}_{(d)}^{KL} \check{S}_{(d)}^M}{E_{(d)} I_{(d)}} + \frac{R_{(d)}^{KL} R_{(d)}^M}{E_{(d)} A_{(d)}} + \frac{(1+12\gamma_d) \check{R}_{(d)}^{KL} \check{R}_{(d)}^M l_{(d)}^2}{12E_{(d)} I_{(d)}} \right) \frac{1}{l_{(d)}}, \\
 C^{KL} &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left(\frac{\check{S}_{(d)}^K \check{S}_{(d)}^L}{E_{(d)} I_{(d)}} + \frac{R_{(d)}^K R_{(d)}^L}{E_{(d)} A_{(d)}} + \frac{(1+12\gamma_d) \check{R}_{(d)}^K \check{R}_{(d)}^L l_{(d)}^2}{12E_{(d)} I_{(d)}} \right) \frac{1}{l_{(d)}}, \\
 (1.17) \quad p_*^{KL} &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left(\frac{R_{(d)}^{KL}}{E_{(d)} A_{(d)}} P_{(d)}^* + \frac{(1+12\gamma_d) l_{(d)}^2 \check{R}_{(d)}^{KL}}{12E_{(d)} I_{(d)}} \check{P}_{(d)}^* \right) \frac{1}{l_{(d)}}, \\
 m_*^K &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \frac{\check{S}_{(d)}^K}{E_{(d)} I_{(d)}} \frac{M_{(d)}^*}{l_{(d)}}, \\
 \sigma_* &\equiv \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{VI} \left[\frac{1}{E_{(d)} A_{(d)}} (P_{(d)}^*)^2 + \frac{1}{E_{(d)} I_{(d)}} (M_{(d)}^*)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1+12\gamma_d) l_{(d)}^2}{12E_{(d)} I_{(d)}} (\check{P}_{(d)}^*)^2 \right] \frac{1}{l_{(d)}},
 \end{aligned}$$

otrzymamy ostatecznie dla potencjału sprężystego następujący wzór:

$$(1.18) \quad \sigma' = \frac{1}{2} A^{KLMN} \gamma_{KL} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \gamma_{KL} \kappa_M + \frac{1}{2} C^{KL} \kappa_K \kappa_L + p_*^{KL} \gamma_{KL} + m_*^K \kappa_K + \sigma_*.$$

Zgodnie z rozważaniami wykorzystującymi metody wariacyjne i podanymi np. w [4], jeśli potencjał sprężysty zależy tylko od funkcji γ_{KL} i κ_K zdefiniowanych przez (1.4) (u_K , v są tu trzema niezależnymi różniczkowalnymi funkcjami), to następujące wielkości:

$$(1.19) \quad p^{KL} \equiv \frac{\partial \sigma'}{\partial \gamma_{KL}}, \quad m^K \equiv \frac{\partial \sigma'}{\partial \kappa_K},$$

zwane składowymi «tarczowego» stanu napięcia [1], muszą spełniać następujące warunki równowagi:

$$(1.20) \quad p^{KL}{}_{,K} + b^L = 0, \quad m^K{}_{,K} + \varepsilon_{KL} p^{KL} + h = 0,$$

gdzie b^K i h są wielkościami charakteryzującymi gęstości obciążenia przyłożonego do tych węzłów siatki, w których schodzi się osiem prętów (węzły S_{III} , S_{IV} , S_V , S_{VI} na rys. 4). Zgodnie z (1.18) i (1.19) pomiędzy składowymi tarczowego stanu odkształcenia (1.4) oraz tarczowego stanu napięcia (1.19) zachodzą związki

$$(1.21) \quad p^{KL} = A^{KLMN} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \kappa_M + p_*^{KL}, \quad m^K = C^{KL} \kappa_L + 'B^{LMK} \gamma_{LM} + m_*^K.$$

Związki (1.21), równania równowagi (1.20) oraz zależności geometryczne (1.4) stanowią podstawowy układ równań teorii rozpatrywanych tu tarcz siatkowych. Układ ten różni się od układu równań dla tarcz siatkowych omówionych w [11] (rys. 1) tylko inną postacią tensorów sztywności sprężystej A^{KLMN} , C^{KL} oraz występowaniem dodatkowo tensora sztywności sprężystej B^{KLM} oraz wielkości p_*^{KL} i m_*^K . Tensory sztywności sprężystej obliczamy na podstawie wzorów (1.17) i (1.13) (dla $\Delta=III, IV, V, VI$), wzoru (1.12) (dla $\Delta=I, II$) oraz (1.17). Jeśli węzły, w których schodzą się cztery pręty, nie są obciążone siłami zewnętrznymi ($b_*^M=0$, $h_*=0$), to $p_*^{KL}=0$, $m_*^K=0$. Zagadnienia brzegowe dla powyższego układu równań formułujemy w sposób omówiony w [1].

Na zakończenie punktu określimy jeszcze związki zachodzące między składowymi stanu napięcia p^{KL} , m^K a wielkościami sił i momentów $P_{(\Delta)}$, $\tilde{P}_{(\Delta)}$, $\check{M}_{(\Delta)}$ dla $\Delta=I, \dots, VI$. Związki te otrzymamy od razu z (1.19), (1.16) oraz (1.14):

$$(1.22) \quad p^{KL} = \sum_{\Delta=I}^{VI} \left(\frac{R_{(\Delta)}^{KL}}{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}} \frac{P_{(\Delta)}}{\tilde{l}_{(\Delta)}} + \frac{(1+12\gamma_{\Delta}) \check{R}_{(\Delta)}^{KL} \check{l}_{(\Delta)}^2}{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}} \frac{\tilde{P}_{(\Delta)}}{\tilde{l}_{(\Delta)}} + \frac{\check{S}_{(\Delta)}^{KL}}{E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}} \frac{\check{M}_{(\Delta)}}{\tilde{l}_{(\Delta)}} \right),$$

$$m^K = \sum_{\Delta=I}^{VI} \left(\frac{\check{S}_{(\Delta)}^K}{E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}} \frac{\check{M}_{(\Delta)}}{\tilde{l}_{(\Delta)}} + \frac{R_{(\Delta)}^K}{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}} \frac{P_{(\Delta)}}{\tilde{l}_{(\Delta)}} + \frac{(1+12\gamma_{\Delta}) \check{R}_{(\Delta)}^K \check{l}_{(\Delta)}^2}{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}} \frac{\tilde{P}_{(\Delta)}}{\tilde{l}_{(\Delta)}} \right).$$

Tensor napięć p^{KL} zależy tutaj nie tylko od sił $P_{(\Delta)}$, $\tilde{P}_{(\Delta)}$ lecz także od momentów $\check{M}_{(\Delta)}$; podobnie wektor napięć momentowych m^K zależy także od sił $P_{(\Delta)}$, $\tilde{P}_{(\Delta)}$ w przeciwieństwie do siatek przedstawionych na rys. 1. Jeśli przyjmiemy $E_{(\Delta)}=0$ dla $\Delta=III, IV, V, VI$ (siatka redukuje się wtedy do przedstawionej na pierwszej części rys. 1), to zgodnie z (1.3) i (1.13), wzory (1.22) prowadzą do wzorów $p^{KL} = \sum_{\Delta=I}^{II} (t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L P_{(\Delta)} + t_{(\Delta)}^K \check{t}_{(\Delta)}^L \tilde{P}_{(\Delta)}) \tilde{l}_{(\Delta)}^{-1}$, $m^K = \sum_{\Delta=I}^{II} t_{(\Delta)}^K \check{M}_{(\Delta)} \tilde{l}_{(\Delta)}^{-1}$, tj. do postaci podanej np. w [1].

2. Przypadki szczególne tarcz siatkowych

Struktura siatki rozpatrywanej w poprzednim punkcie pracy (rys. 4) ma znaczenie bardziej teoretyczne niż praktyczne. Tak kształtowanych siatek nie stosuje się ze względu na ich zbyt złożoną budowę. Jednakże przypadkami szczególnymi tych siatek są m.in. wszystkie siatki przedstawione na rys. 3. Dla każdej z nich zestawimy uproszczenia, jakie należy wprowadzić do równań podanych w punkcie 1, aby otrzymać równania tarcz siatkowych o strukturze wyróżnionej na rys. 3 cyframi od I do V.

Siatka I. W wyprowadzonych równaniach należy przyjąć

$$(2.1) \quad \begin{aligned} t_{(III)}^K &= -t_{(V)}^K, & \check{t}_{(III)}^K &= -\check{t}_{(V)}^K, & t_{(IV)}^K &= -t_{(VI)}^K, & \check{t}_{(IV)}^K &= -\check{t}_{(VI)}^K; \\ E_{(III)} &= E_{(V)}, & I_{(III)} &= I_{(V)}, & A_{(III)} &= A_{(V)}, & \gamma_{III} &= \gamma_V; \\ E_{(IV)} &= E_{(VI)}, & I_{(IV)} &= I_{(VI)}, & A_{(IV)} &= A_{(VI)}, & \gamma_{(IV)} &= \gamma_{(VI)}. \end{aligned}$$

Wszystkie wielkości odnoszące się do prętów wyróżnionych wskaźnikami V i VI zastępujemy więc przez odpowiednie wielkości dla prętów wyróżnionych wskaźnikami III i IV. Równanie konstytutywne dla takiej tarczy siatkowej wyprowadzimy w dalszej części tego punktu.

Siatka II. Należy tu przyjąć $E_{(VI)}=0$, co prowadzi do zastąpienia sum wskaźnika Δ od I do VI (lub od III do VI) — sumami dla tego wskaźnika od I do V (lub od III do V) we wzorach (1.7), (1.16), (1.17) i (1.22). Ponadto dla wskaźników (III) i (V) odnoszą się równości podane w (2.1).

Siatka III. Należy tu przyjąć $E_{(I)}=0$ (pomijając we wszystkich sumach wyrazy zaopatrzone martwym wskaźnikiem I) oraz ponadto

$$(2.2) \quad t_{(V)}^K = -t_{(VI)}^K, \quad \tilde{t}_{(V)}^K = -\tilde{t}_{(VI)}^K, \\ E_{(V)} = E_{(VI)}, \quad I_{(V)} = I_{(VI)}, \quad A_{(V)} = A_{(VI)}, \quad \gamma_V = \gamma_{VI}.$$

Odcinki prętów wyróżnione wskaźnikiem VI są tu więc przedłużeniami odcinków wyróżnionych wskaźnikiem V; natomiast nie występują pręty wyróżnione wskaźnikiem I.

Siatka IV. Należy tu przyjąć założenia jak dla siatki II, a ponadto należy jeszcze przyjąć $E_{(I)}=0$ i $E_{(II)}=0$, co prowadzi do pominięcia we wszystkich sumach składników wyróżnionych wskaźnikami I, II i VI.

Siatka V. Wystarczy w równaniach ogólnych przyjąć $E_{(I)}=0$ i $E_{(II)}=0$, pomijając we wszystkich sumach składniki wyróżnione wskaźnikami I i II.

Ponadto przypadkami szczególnymi siatki rozpatrywanej w p.1 są siatki o schematach przedstawionych na rys. 1. Aby otrzymać równanie konstytutywne dla pierwszej z nich, wystarczy przyjąć $E_{(III)}=E_{(IV)}=E_{(V)}=E_{(VI)}=0$; wszystkie sumy ze wskaźnikiem Δ będą wtedy zawierać tylko wyrazy wyróżnione wskaźnikami I i II. Równania konstytutywne dla drugiej z siatek pokazanych na rys. 1 otrzymamy przyjmując

$$E_{(IV)}=E_{(VI)}=0,$$

$$E_{(III)}=E_{(V)}, \quad A_{(III)}=A_{(V)}, \quad I_{(III)}=I_{(V)}, \quad t_{(III)}^K = -t_{(V)}^K, \quad \tilde{t}_{(III)}^K = -\tilde{t}_{(V)}^K, \quad l_{(III)} = l_{(V)}.$$

Przypadek ten zbadaćmy nieco dokładniej, przyjmując $\gamma_\Delta=0$. Zgodnie z (1.7) otrzymamy

$$\begin{bmatrix} D_{NM} & D_N \\ D_N & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2E_{(III)}A_{(III)}}{l_{(III)}} t_{(III)N}^M t_{(III)M}^K + \frac{24E_{(III)}I_{(III)}}{l_{(III)}^3} \tilde{t}_{(III)N}^M \tilde{t}_{(III)M}^K & 0 \\ 0 & \frac{8E_{(III)}I_{(III)}}{l_{(III)}} \end{bmatrix}^{-1},$$

czyli

$$D_{NM} = \frac{l_{(III)}}{2E_{(III)}A_{(III)}} t_{(III)N} t_{(III)M} + \frac{l_{(III)}^3}{24E_{(III)}I_{(III)}} \tilde{t}_{(III)N} \tilde{t}_{(III)M},$$

$$D_N = 0, \quad D = \frac{l_{(III)}}{8E_{(III)}I_{(III)}}.$$

Jeśli przyjmiemy $b_*^M=0$ i $h_*=0$, to z (1.8) otrzymamy

$$\Delta u_N = -D_{NM} \frac{12E_{(III)} I_{(III)}}{l_{(III)}^3} \tilde{t}_{(III)}^M \tilde{t}_{(III)}^K \kappa_K = -\frac{l_{(III)}^2}{2} \tilde{t}_{(III)N} \tilde{t}_{(III)}^K \kappa_K,$$

$$\Delta v = D \frac{12E_{(III)} I_{(III)}}{l_{(III)}} \tilde{t}_{(III)}^K \tilde{t}_{(III)}^L \gamma_{LK} = \frac{3}{2} \tilde{t}_{(III)}^K \tilde{t}_{(III)}^L \gamma_{LK}.$$

Definicje (1.13) prowadzą do następujących formuł:

$$R_{(III)}^{KL} = R_{(V)}^{KL} = E_{(III)} A_{(III)} \tilde{t}_{(III)}^K \tilde{t}_{(III)}^L, \quad R_{(III)}^K = R_{(V)}^K = 0, \quad P_{(III)}^* = P_{(V)}^* = 0;$$

$$\tilde{R}_{(III)}^{KL} = \tilde{R}_{(V)}^{KL} = \frac{3E_{(III)} I_{(III)}}{l_{(III)}^2} \tilde{t}_{(III)}^K \tilde{t}_{(III)}^L, \quad \tilde{R}_{(III)}^K = \tilde{R}_{(V)}^K = 0, \quad \tilde{P}_{(III)}^* = \tilde{P}_{(V)}^* = 0;$$

$$\check{S}_{(III)}^K = -\check{S}_{(V)}^K = E_{(III)} I_{(III)} \tilde{t}_{(III)}^K, \quad \check{S}_{(III)}^{KL} = \check{S}_{(III)}^{KL} = -\frac{3E_{(III)} I_{(III)}}{2l_{(III)}} \tilde{t}_{(III)}^K \tilde{t}_{(III)}^L,$$

$$\check{M}_{(III)}^* = \check{M}_{(V)}^* = 0.$$

Wzory (1.17) dla tensorów sztywności sprężystej, zgodnie z (1.12) oraz powyższymi związkami, przyjmą więc postać

$$A^{KLMN} = \sum_{\Delta=I}^{III} \left(\frac{E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}}{\tilde{L}_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L \tilde{t}_{(\Delta)}^M \tilde{t}_{(\Delta)}^N + \frac{12E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{\tilde{L}_{(\Delta)} L_{(\Delta)}^2} \tilde{t}_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L \tilde{t}_{(\Delta)}^M \tilde{t}_{(\Delta)}^N \right),$$

$$(2.3) \quad B^{KLM} = 0, \quad C^{KL} = \sum_{\Delta=I}^{III} \frac{E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{\tilde{L}_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L,$$

w której zaznaczono $L_{(\Delta)} \equiv l_{(\Delta)}$, $\tilde{L}_{(\Delta)} \equiv \tilde{l}_{(\Delta)}$ dla $\Delta=I, II$ oraz $L_{(III)} \equiv 2l_{(III)}$, $\tilde{L}_{(III)} \equiv 0, 5\tilde{l}_{(III)}$. Związki (2.3) są identyczne z odpowiednimi związkami dla tarczy siatkowej utworzonej z trzech rodzin przecinających się prętów ciągłych (rys. 1), wyprowadzonymi w [1]. W celu otrzymania równań dla siatek typu «plaster miodu» (rys. 2.2) przyjmujemy $E_{(II)} = E_{(III)} = E_{(III)} = 0$.

Na zakończenie tego punktu omówimy nieco dokładniej równania tarczy siatkowej o budowie przedstawionej na pierwszym ze schematów rys. 3. Dla uproszczenia przyjmijmy ponadto $\gamma_{\Delta} = 0$. Korzystając z (2.1), dla macierzy odwrotnej (1.7) otrzymamy zależność

$$\begin{bmatrix} D_{NM} & D_N \\ D_N & D \end{bmatrix} \equiv \left(\sum_{\Delta=III}^{IV} \begin{bmatrix} \frac{2E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L + \frac{24E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^3} \tilde{t}_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L & 0 \\ 0 & \frac{8E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \end{bmatrix} \right)^{-1},$$

z której wynika, że

$$[D_{NM}] = \left[\sum_{\Delta=III}^{IV} \left(\frac{2E_{(\Delta)} A_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \tilde{t}_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L + \frac{24E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^3} \tilde{t}_{(\Delta)}^K \tilde{t}_{(\Delta)}^L \right) \right]^{-1},$$

$$D_N = 0, \quad D = \left(\sum_{\Delta=III}^{IV} \frac{8E_{(\Delta)} I_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \right)^{-1}.$$

Przyjmując dla uproszczenia, że $b_*^M=0$, $h_*=0$, z (1.8) otrzymamy

$$\Delta u_N = -D_{NM} \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K \kappa_K, \quad \Delta v = D \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \gamma_{LK}.$$

Związki (1.12) dla $A=I, II$ nie zmieniają swej postaci, natomiast definicje (1.13) dla $A=III, IV, V, VI$ prowadzą do następujących wzorów:

$$R_{(A)}^{KL} = E_{(A)} A_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L, \quad R_{(A)}^K = \frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^N D_{NM} \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K,$$

$$\tilde{R}_{(A)}^{KL} = \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}^2} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L - \frac{6E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}^2} D \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L,$$

$$\tilde{R}_{(A)}^K = -\frac{6E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K + \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}^3} \tilde{t}_{(A)}^N D_{NM} \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K,$$

$$\check{S}_{(A)}^K = E_{(A)} I_{(A)} t_{(A)}^K, \quad \check{S}_{(A)}^{KL} = -\frac{E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}} D \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}} \tilde{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L,$$

$$P_{(A)}^* = 0, \quad \tilde{P}_{(A)}^* = 0, \quad \check{M}_{(A)}^* = 0, \quad A=III, IV, V, VI.$$

Tak więc na tensory sztywności sprężystej (1.17) otrzymamy ostatecznie następujące wzory:

$$\begin{aligned} A^{KLMN} &= \sum_{A=I}^{II} \left(\frac{E_{(A)} A_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L t_{(A)}^M t_{(A)}^N + \frac{12E_{(A)}I_{(A)}}{l_{(A)}l_{(A)}^2} t_{(A)}^K t_{(A)}^L t_{(A)}^M \tilde{t}_{(A)}^N \right) + \\ &+ 2 \sum_{A=III}^{IV} \left(\frac{\check{S}_{(A)}^{KL} \check{S}_{(A)}^{MN}}{E_{(A)} I_{(A)}} + \frac{R_{(A)}^{KL} R_{(A)}^{MN}}{E_{(A)} A_{(A)}} + \frac{\tilde{R}_{(A)}^{KL} \tilde{R}_{(A)}^{MN} l_{(A)}^2}{12E_{(A)} I_{(A)}} \right) \frac{1}{l_{(A)}}, \\ (2.4) \quad 'B^{KLM} &= 2 \sum_{A=III}^{IV} \left(\frac{\check{S}_{(A)}^{KL} \check{S}_{(A)}^M}{E_{(A)} I_{(A)}} + \frac{R_{(A)}^{KL} R_{(A)}^M}{E_{(A)} A_{(A)}} + \frac{\tilde{R}_{(A)}^{KL} \tilde{R}_{(A)}^M l_{(A)}^2}{12E_{(A)} I_{(A)}} \right) \frac{1}{l_{(A)}}, \\ C^{KL} &= \sum_{A=I}^{II} \frac{E_{(A)} I_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L + 2 \sum_{A=III}^{IV} \left(\frac{\check{S}_{(A)}^K \check{S}_{(A)}^L}{E_{(A)} I_{(A)}} + \right. \\ &\left. + \frac{R_{(A)}^K R_{(A)}^L}{E_{(A)} A_{(A)}} + \frac{\tilde{R}_{(A)}^K \tilde{R}_{(A)}^L l_{(A)}^2}{12E_{(A)} I_{(A)}} \right) \frac{1}{l_{(A)}}. \end{aligned}$$

W podobny sposób otrzymujemy wzory na tensory sztywności sprężystej modeli tarcz siatkowych o schematach II - V, przedstawionych na rys. 3, a także dla innych siatek, które mogą być traktowane jako przypadki szczególne siatki o schemacie rozważanym w pierwszym punkcie pracy.

3. Ogólne równania płyt siatkowych

Stan przemieszczenia płyt siatkowych określamy trzema różniczkowalnymi funkcjami $u=u(x^1, x^2)$, $v_K=v_K(x^1, x^2)$. Wartości tych funkcji w punktach płaszczyzny π , w których schodzi się osiem prętów siatki, przyjmujemy kolejno jako równe przesunięciu węzła (w kierunku normalnym do π) oraz składowym wektora małego obrotu węzła (w płaszczyznach prostopadłych do osi x^1, x^2). Ponadto funkcje u i v_K możemy traktować w przybliżeniu jako liniowe względem argumentów x^1, x^2 w każdym równoległoboku utworzonym przez wektory $t_{(I)}l_{(I)}$, $t_{(II)}l_{(II)}$ (rys. 4).

Siatka przedstawiona na rys. 4 zawiera oprócz węzłów, w których schodzi się osiem prętów, także węzły, w których schodzą się cztery pręty (węzeł S_0 na rys. 4). Oznaczmy przez $u(S_0)$ i $v_K(S_0)$ wartości funkcji u i v_K w punkcie S_0 płaszczyzny π oraz przez $\check{u}(S_0)$ i $\check{v}(S_0)$ przesunięcie i składowe wektora małego obrotu węzła S_0 . Zgodnie ze znaczeniem funkcji u i v_K mamy na ogół $\check{u}(S_0) \neq \check{u}(S_0)$, $v_K(S_0) \neq \check{v}(S_0)$. Oznaczmy

$$(3.1) \quad \Delta u \equiv \check{u}(S_0) - u(S_0), \quad \Delta v_K \equiv \check{v}(S_0) - v_K(S_0),$$

dla każdego węzła S_0 siatki, w którym schodzą się cztery pręty. Zgodnie z przyjętymi założeniami i oznaczeniami przedstawionymi w pierwszym punkcie pracy przesunięcia $\check{u}(S_0)$, $u(S_{\Delta})$, $\Delta = \text{III, IV, V, VI}$, oraz składowe wektora małego obrotu $\check{v}_K(S_0)$, $v_K(S_{\Delta})$, $\Delta = \text{III, IV, V, VI}$, (rys. 4) wynoszą

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \check{u}(S_0) &= u + \Delta u, & \check{v}_K(S_0) &= v_K + \Delta v_K, \\ u(S_{\Delta}) &= u + t_{(\Delta)}^K l_{(\Delta)} u_{,K}, & v_K(S_{\Delta}) &= v_K + t_{(\Delta)}^L l_{(\Delta)} v_{K,L}, \end{aligned}$$

gdzie wartość funkcji u , v_K oraz ich pochodnych należy przyjmować w punkcie S_0 płaszczyzny π . Oznaczmy następnie przez $K_{(\Delta)}$, $\check{K}_{(\Delta)}$ i $\check{Q}_{(\Delta)}$ dla $\Delta = \text{III, IV, V, VI}$ kolejno moment skręcający, moment zginający (działające w płaszczyznach normalnych do π) i siłę poprzeczną (działającą w kierunku prostopadłym do π) w przekroju pręta $S_0 S_{\Delta}$, znajdującym się przy węźle S_0 . Przyjmiemy, że są to wielkości działające na węzeł S_0 . Oznaczmy dalej przez $C_{(\Delta)}$ sztywność skręcania oraz przez $\check{I}_{(\Delta)}$ moment bezwładności przekroju pręta (względem śladu płaszczyzny π na tym przekroju), na którego osi leży wektor o składowych $t_{(\Delta)}^K$, $\Delta = \text{I, ..., VI}$ (rys. 4). Oznaczmy przez $\bar{\gamma}_{\Delta}$ bezwymiarowy współczynnik, który zgodnie z (3.15) uwzględnia wpływ odkształceń postaciowych pręta w płaszczyźnie normalnej do π na energię sprężystą pręta. Przy przyjętych poprzednio założeniach dla $\Delta = \text{III, IV, V, VI}$ mamy

$$(3.3) \quad \begin{aligned} K_{(\Delta)} &= \frac{C_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K [v_K(S_{\Delta}) - \check{v}_K(S_0)] = C_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L v_{K,L} - \frac{C_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K \Delta v_K, \\ (1 + 12\bar{\gamma}_{\Delta}) \check{K}_{(\Delta)} &= \frac{2E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \left[-t_{(\Delta)}^K (2\check{v}_K(S_0) + v_K(S_{\Delta})) - 6\bar{\gamma}_{\Delta} t_{(\Delta)}^K (\check{v}_K(S_0) - \right. \\ &\quad \left. - v_K(S_0)) - 3 \frac{u(S_{\Delta}) - \check{u}(S_0)}{l_{(\Delta)}} \right] = -2E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)} (1 + 6\bar{\gamma}_{\Delta}) t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L v_{K,L} - \\ &\quad - \frac{6E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^L (u_{,L} + \varepsilon_{LM} v^M) + \frac{6E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} \Delta u - \frac{4E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)} (1 + 3\bar{\gamma}_{\Delta})}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K \Delta v_K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.3) \quad (1+12\bar{\gamma}_\Delta)\check{Q}_{(\Delta)} &= \frac{12E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} \left[\frac{u(S_\Delta) - \check{u}(S_0)}{l_{(\Delta)}} + \check{t}_{(\Delta)}^K \frac{v_K(S_\Delta) + \check{v}_K(S_0)}{2} \right] = \\
 [e.d.] \quad &= \frac{12E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^K (u_{,K} + \varepsilon_{KM} v^M) + \frac{6E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L v_{K,L} - \\
 &\quad - \frac{12E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^3} \Delta u + \frac{6E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^K \Delta v_K.
 \end{aligned}$$

Wielkości Δu i Δv_K wyznaczmy z warunków równowagi węzła S_0 . Oznaczając przez b_* i h_*^M składowe obciążenia przyłożonego do tego węzła, znajdziemy

$$(3.4) \quad \sum_{\Delta=III}^{VI} (t_{(\Delta)}^M K_{(\Delta)} + \check{t}_{(\Delta)}^M \check{K}_{(\Delta)}) + h_*^M = 0, \quad \sum_{\Delta=III}^{VI} \check{Q}_{(\Delta)} + b_* = 0.$$

Korzystając z (3.3), po wprowadzeniu następujących składowych płytowego stanu odkształcenia [2]

$$(3.5) \quad \kappa_{KL} = v_{L,K}, \quad \gamma_K = u_{,K} + \varepsilon_{KM} v^M,$$

równania równowagi (3.4) napiszemy w postaci

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad \sum_{\Delta=III}^{VI} \left[\begin{array}{cc} \frac{C_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K + \frac{4E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}(1+3\bar{\gamma}_\Delta)}{(1+12\bar{\gamma})l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^M \check{t}_{(\Delta)}^K; & -\frac{6E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^M \\ -\frac{6E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^K; & \frac{12E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}^3} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta v_K \\ \Delta u \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} h_*^M \\ b_* \end{bmatrix} + \\
 + \sum_{\Delta=III}^{VI} \left[\begin{array}{cc} \left(C_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L - \frac{2E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}(1+6\bar{\gamma}_\Delta)}{1+12\bar{\gamma}_\Delta} \check{t}_{(\Delta)}^M \check{t}_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \right) \kappa_{LK} - \frac{6E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K \gamma_K \\ \frac{6E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \kappa_{LK} + \frac{12E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}^2} t_{(\Delta)}^K \gamma_K \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Wprowadzając macierz symetryczną, odwrotną do macierzy głównej układu równań (3.6),

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad \begin{bmatrix} H_{NM} & H_N \\ H_N & H \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_1 \\ H_{21} & H_{22} & H_2 \\ H_1 & H_2 & H \end{bmatrix} \equiv \\
 &\equiv \left(\sum_{\Delta=III}^{VI} \left[\begin{array}{cc} \frac{C_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K + \frac{4E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}(1+3\bar{\gamma}_\Delta)}{(1+12\bar{\gamma})l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^M \check{t}_{(\Delta)}^K; & -\frac{6E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^M \\ -\frac{6E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}^2} \check{t}_{(\Delta)}^K; & \frac{12E_{(\Delta)}\check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_\Delta)l_{(\Delta)}^3} \end{array} \right] \right)^{-1},
 \end{aligned}$$

otrzymamy

$$(3.8) \quad \begin{bmatrix} \Delta v_N \\ \Delta u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{NM} & H_N \\ H_M & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_*^M \\ b_* \end{bmatrix} + \sum_{\Delta=III}^{VI} \left[\begin{array}{c} C_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L - \frac{2E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)} (1+6\bar{\gamma}_{\Delta})}{1+12\bar{\gamma}_{\Delta}} \check{t}_{(\Delta)}^M \check{t}_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \\ \frac{6E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_{\Delta}) l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \end{array} \right] \kappa_{LK} - \sum_{\Delta=III}^{VI} \left[\begin{array}{c} \frac{6E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}) l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^M t_{(\Delta)}^K \\ - \frac{12E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}) l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K \end{array} \right] \gamma_K.$$

Postępując podobnie jak w pierwszym punkcie tej pracy, oznaczymy przez $M_{(\Delta)}$, $\check{M}_{(\Delta)}$ i $\check{P}_{(\Delta)}$ kolejno moment skracający, moment zginający oraz siłę poprzeczną w przekrojach połowiących pręty o osiach, na których leżą wektory $t_{(\Delta)}$ ($\Delta = I, II, \dots, VI$). Przyjmujemy, że momenty $M_{(\Delta)}$, $\check{M}_{(\Delta)}$ i siły $\check{P}_{(\Delta)}$ działają na przekrój zorientowany zewnętrznym wektorem $t_{(\Delta)}$. Niech następnie $u^{(+)}$, $v_K^{(+)}$ i $u^{(-)}$, $v_K^{(-)}$ będą odpowiednio przesunięciem i składowymi wektora małego obrotu odpowiednio «początkowego» i «końcowego» przekroju dowolnego pręta (przekroje A i B na rys. 5). Dla $\Delta = I, II$ przyjmiemy [2]

$$(3.9) \quad \begin{aligned} u^{(+)} &= u + \frac{1}{2} t_{(\Delta)}^L l_{(\Delta)} u_{,L}, & v_K^{(+)} &= v_K + \frac{1}{2} t_{(\Delta)}^L l_{(\Delta)} v_{K,L}, \\ u^{(-)} &= u - \frac{1}{2} t_{(\Delta)}^L l_{(\Delta)} u_{,L}, & v_K^{(-)} &= v_K - \frac{1}{2} t_{(\Delta)}^L l_{(\Delta)} v_{K,L}, \end{aligned}$$

przy czym wartości funkcji u i v_K oraz ich pochodnych przyjmujemy dla każdego Δ w punkcie połowiącym odpowiedni odcinek AB na rys. 5. Tym samym mamy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} M_{(\Delta)} &= \frac{C_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} t_{(\Delta)}^K (v_K^{(+)} - v_K^{(-)}) = C_{(\Delta)} t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \kappa_{LK}, \\ \check{M}_{(\Delta)} &= \frac{E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{l_{(\Delta)}} \check{t}_{(\Delta)}^K (v_K^{(+)} - v_K^{(-)}) = E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)} \check{t}_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \kappa_{LK}, \\ \check{P}_{(\Delta)} &= \frac{12E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_{\Delta}) l_{(\Delta)}^2} \left(\frac{u^{(+)} - u^{(-)}}{l_{(\Delta)}} + \check{t}_{(\Delta)}^K \frac{v_K^{(+)} + v_K^{(-)}}{2} \right) = \frac{12E_{(\Delta)} \check{I}_{(\Delta)}}{(1+12\bar{\gamma}_{\Delta}) l_{(\Delta)}^2} t_{(\Delta)}^K \gamma_K, \end{aligned}$$

przy czym powyższe zależności dotyczą tylko przypadków $\Delta = I, II$. Jeżeli $\Delta = III, IV, V, VI$, to $M_{(\Delta)} = K_{(\Delta)}$, $\check{M}_{(\Delta)} = \check{K}_{(\Delta)} + 0,5 l_{(\Delta)} \check{Q}_{(\Delta)}$, $\check{P}_{(\Delta)} = \check{Q}_{(\Delta)}$, czyli

$$\begin{aligned}
 M_{(A)} &= C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \kappa_{LK} - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K \Delta v_K, \\
 (3.11) \quad \tilde{M}_{(A)} &= E_{(A)} \check{l}_{(A)} \check{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \kappa_{LK} - \frac{E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^K \Delta v_K, \\
 \check{P}_{(A)} &= \frac{12E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \gamma_K + \frac{6E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \kappa_{LK} + \\
 &\quad + \frac{6E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}^2} \check{t}_{(A)}^K \Delta v_K - \frac{12E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}^3} \Delta u.
 \end{aligned}$$

W (3.10) i (3.11) za Δv_K i Δu należy przyjąć wyrażenia określone za pomocą wzoru (3.8). Wprowadzając następujące oznaczenia $\Delta = I, II$:

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad S_{(A)}^{KL} &\equiv C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L, & S_{(A)}^K &\equiv 0, & M_{(A)}^* &\equiv 0, \\
 \check{S}_{(A)}^{KL} &\equiv E_{(A)} \check{l}_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L, & \check{S}_{(A)}^K &\equiv 0, & \check{M}_{(A)}^* &\equiv 0, \\
 \check{R}_{(A)}^K &\equiv \frac{12E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}^2} t_{(A)}^K, & \check{R}_{(A)}^{KL} &\equiv 0, & \check{P}_{(A)}^* &\equiv 0,
 \end{aligned}$$

oraz dla $\Delta = III, IV, \dots, VI$:

$$\begin{aligned}
 S_{(A)}^{KL} &\equiv C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^N \left[H_{NM} \sum_{A=III}^{VI} \left(C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^M t_{(A)}^L - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2E_{(A)} \check{l}_{(A)} (1+6\bar{\gamma}_A)}{1+12\bar{\gamma}_A} t_{(A)}^K \check{t}_{(A)}^M t_{(A)}^L \right) + H_N \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \right], \\
 S_{(A)}^K &\equiv \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^N \left[H_{NM} \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K - H_N \sum_{A=III}^{VI} \frac{12E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \right], \\
 M_{(A)}^* &\equiv - \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^N (H_{NM} h_*^M + H_N b_*), \\
 (3.13) \quad \check{S}_{(A)}^{KL} &\equiv E_{(A)} \check{l}_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L - \frac{E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^N \left[H_{NM} \sum_{A=III}^{VI} \left(C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^M t_{(A)}^L - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{2E_{(A)} \check{l}_{(A)} (1+6\bar{\gamma}_A)}{1+12\bar{\gamma}_A} t_{(A)}^K \check{t}_{(A)}^M t_{(A)}^L \right) + H_N \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L \right], \\
 \check{S}_{(A)}^K &\equiv \frac{E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^N \left[H_{NM} \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K - H_N \sum_{A=III}^{VI} \frac{12E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{(1+12\bar{\gamma}_A) l_{(A)}^2} t_{(A)}^K \right], \\
 \check{M}_{(A)}^* &\equiv - \frac{E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^N (H_{NM} h_*^M + H_N b_*),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \check{R}_{(d)}^{KL} &\equiv \frac{6E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}} t_{(d)}^K t_{(d)}^L + \frac{6E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^2} \check{I}_{(d)}^N \left[H_{NM} \sum_{A=III}^{VI} \left(C_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M t_{(d)}^L - \right. \right. \\
 (3.13) \quad &\left. \left. - \frac{2E_{(d)}\check{I}_{(d)}(1+6\bar{\gamma}_d)}{1+12\bar{\gamma}_d} t_{(d)}^K t_{(d)}^M t_{(d)}^L \right) + H_N \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}} t_{(d)}^K t_{(d)}^L \right] - \\
 &\left. - \frac{12E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^3} \left[H_M \sum_{A=III}^{VI} \left(C_{(d)} t_{(d)}^K t_{(d)}^M t_{(d)}^L - \frac{2E_{(d)}\check{I}_{(d)}(1+6\bar{\gamma}_d)}{1+12\bar{\gamma}_d} t_{(d)}^K t_{(d)}^M t_{(d)}^L \right) + \right. \\
 &\left. + H \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}} t_{(d)}^K t_{(d)}^L \right], \\
 \check{R}_{(d)}^K &\equiv \frac{12E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^2} t_{(d)}^K + \frac{12E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^2} \left[H_N \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}} t_{(d)}^M t_{(d)}^K - \right. \\
 &\left. - H \sum_{A=III}^{VI} \frac{12E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^2} t_{(d)}^K \right] - \frac{6E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^2} \check{I}_{(d)}^N \times \\
 &\times \left[H_{NM} \sum_{A=III}^{VI} \frac{6E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}} t_{(d)}^M t_{(d)}^K - H_N \sum_{A=III}^{VI} \frac{12E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^2} t_{(d)}^K \right], \\
 \check{P}_{(d)}^* &\equiv \frac{6E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^2} \check{I}_{(d)}^N (H_{NM}h_*^M + H_N b_*) - \frac{12E_{(d)}\check{I}_{(d)}}{(1+12\bar{\gamma}_d)l_{(d)}^3} (H_N h_*^N + H b_*),
 \end{aligned}$$

możemy zależności (3.10) i (3.11), po uwzględnieniu (3.8), napisać w postaci

$$\begin{aligned}
 M_{(d)} &= S_{(d)}^{KL} \kappa_{KL} + S_{(d)}^K \gamma_K + M_{(d)}^*, \\
 \check{M}_{(d)} &= \check{S}_{(d)}^{KL} \kappa_{KL} + \check{S}_{(d)}^K \gamma_K + \check{M}_{(d)}^*, \\
 \check{P}_{(d)} &= \check{R}_{(d)}^K \gamma_K + \check{R}_{(d)}^{KL} \kappa_{KL} + \check{P}_{(d)}^*.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Wyprowadzone tu wzory dotyczą tylko przypadków, w których obciążenie zewnętrzne płyty siatkowej działa wyłącznie na jej węzły. Uwzględnienie jednak innych obciążeń nie przedstawia żadnych trudności [3].

Oznaczmy przez σ'' potencjał sprężysty modelu ciągłego płyty siatkowej, odniesiony do jednostki pola powierzchni π . Jest on równy

$$\begin{aligned}
 (3.15) \quad \sigma'' &= \frac{1}{F} \sum_{d=I}^{VI} \left(\int_{-0,5l_{(d)}}^{0,5l_{(d)}} \frac{(\check{M}_{(d)} - \check{P}_{(d)} x)^2}{2E_{(d)}\check{I}_{(d)}} dx + \int_{-0,5l_{(d)}}^{0,5l_{(d)}} \frac{M_{(d)}^2}{2C_{(d)}} dx + \right. \\
 &\left. + \int_{-0,5l_{(d)}}^{0,5l_{(d)}} \frac{\bar{\gamma}_d \check{P}_{(d)}^2 l_{(d)}^2}{2E_{(d)}\check{I}_{(d)}} dx \right) = \sum_{d=I}^{VI} \left(\frac{M_{(d)}^2}{2C_{(d)}} + \frac{\check{M}_{(d)}^2}{2E_{(d)}\check{I}_{(d)}} + \frac{(1+12\bar{\gamma}_d)\check{P}_{(d)}^2 l_{(d)}^2}{24E_{(d)}\check{I}_{(d)}} \right) \frac{1}{l_{(d)}},
 \end{aligned}$$

przy czym $M_{(d)}$, $\tilde{M}_{(d)}$ i $\check{P}_{(d)}$ są tu funkcjami składowymi stanu odkształcenia κ_{KL} i γ_K . Zgodnie z (3.14) otrzymamy

$$(3.16) \quad \sigma'' = \frac{1}{2} C^{KLMN} \kappa_{KL} \kappa_{MN} + {}''B^{KLM} \kappa_{KL} \gamma_M + \frac{1}{2} A^{KL} \gamma_K \gamma_L + m_*^{KL} \kappa_{KL} + p_*^K \gamma_K + \sigma_*'',$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$(3.17) \quad \begin{aligned} C^{KLMN} &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left(\frac{S_{(d)}^{KL} S_{(d)}^{MN}}{C_{(d)}} + \frac{\tilde{S}_{(d)}^{KL} \tilde{S}_{(d)}^{MN}}{E_{(d)} \check{I}_{(d)}} + \frac{(1+12\bar{\gamma}_d) \check{R}_{(d)}^{KL} \check{R}_{(d)}^{MN} l_{(d)}^2}{12E_{(d)} \check{I}_{(d)}} \right) \frac{1}{\check{I}_{(d)}}, \\ {}''B^{KLM} &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left(\frac{S_{(d)}^{KL} S_{(d)}^M}{C_{(d)}} + \frac{\tilde{S}_{(d)}^{KL} \tilde{S}_{(d)}^M}{E_{(d)} \check{I}_{(d)}} + \frac{(1+12\bar{\gamma}_d) \check{R}_{(d)}^{KL} \check{R}_{(d)}^M l_{(d)}^2}{12E_{(d)} \check{I}_{(d)}} \right) \frac{1}{\check{I}_{(d)}}, \\ A^{KL} &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left(\frac{S_{(d)}^K S_{(d)}^L}{C_{(d)}} + \frac{\tilde{S}_{(d)}^K \tilde{S}_{(d)}^L}{E_{(d)} \check{I}_{(d)}} + \frac{(1+12\bar{\gamma}_d) \check{R}_{(d)}^K \check{R}_{(d)}^L l_{(d)}^2}{12E_{(d)} \check{I}_{(d)}} \right) \frac{1}{\check{I}_{(d)}}, \end{aligned}$$

oraz

$$(3.18) \quad \begin{aligned} m_*^{KL} &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left(\frac{S_{(d)}^{KL}}{C_{(d)}} M_{(d)}^* + \frac{\tilde{S}_{(d)}^{KL}}{E_{(d)} \check{I}_{(d)}} \tilde{M}_{(d)}^* \right) \frac{1}{\check{I}_{(d)}}, \\ p_*^K &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \frac{(1+12\bar{\gamma}_d) \check{R}_{(d)}^K l_{(d)}^2}{12E_{(d)} \check{I}_{(d)}} \frac{\check{P}_{(d)}^*}{\check{I}_{(d)}}, \\ \sigma_*'' &\equiv \sum_{d=1}^{VI} \left[\frac{(M_{(d)}^*)^2}{2C_{(d)}} + \frac{(\tilde{M}_{(d)}^*)^2}{2E_{(d)} \check{I}_{(d)}} + \frac{(1+12\bar{\gamma}_d) l_{(d)}^2 (\check{P}_{(d)}^*)^2}{24E_{(d)} \check{I}_{(d)}} \right] \frac{1}{\check{I}_{(d)}}. \end{aligned}$$

Stosując tok postępowania wariacyjnego podany np. w [4], po wprowadzeniu następujących składowych stanu napięcia

$$(3.19) \quad m^{KL} \equiv \frac{\partial \sigma''}{\partial \kappa_{KL}}, \quad p^K \equiv \frac{\partial \sigma''}{\partial \gamma^K}$$

i uwzględniając (3.5), z zasady stacjonarności działania otrzymamy równania równowagi

$$(3.20) \quad m^{KL}_{,K} + \varepsilon^K_{,K} p^K + h^L = 0, \quad p^K_{,K} + b = 0,$$

w których b, h^L są funkcjami charakteryzującymi gęstości obciążeń (sił i momentów) przyłożonych do węzłów siatki, w których schodzi się osiem prętów. Z (3.16) i (3.19) wynika od razu następująca postać związków między składowymi stanu napięcia m^{KL} , p^K i składowymi stanu odkształcenia κ_{KL} , γ_K :

$$(3.21) \quad m^{KL} = C^{KLMN} \kappa_{MN} + {}''B^{KLM} \gamma_M + m_*^{KL}, \quad p^K = A^{KL} \gamma_L + {}''B^{LMK} \kappa_{LM} + p_*^K.$$

Równanie równowagi (3.20), związki konstytutywne (3.21) oraz związki geometryczne (3.5) tworzą podstawowy układ równań teorii płyt siatkowych. Tensory sztyw-

ności sprężystej C^{KLMN} , B^{KLM} , A^{KL} , występujące w (3.21), wyznaczamy zgodnie z (3.17), (3.12), (3.13) i (3.7), a przy wyznaczeniu m_*^{KL} , p_*^K korzystamy z (3.18). Zagadnienie brzegowe dla rozpatrywanych tu płyt siatkowych formułujemy tak samo jak dla płyt siatkowych omówionych w pracy [2].

Z równań (3.19), (3.15) oraz (3.14) otrzymamy następujące wyrażenia dla składowych stanu napiecia:

$$(3.22) \quad m^{KL} = \sum_{\Delta=I}^{VI} \left(\frac{S_{(\Delta)}^{KL}}{C_{(\Delta)}} \frac{M_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}} + \frac{\tilde{S}_{(\Delta)}^{KL}}{E_{(\Delta)} \check{l}_{(\Delta)}} \frac{\tilde{M}_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}} + \frac{(1+12\bar{\gamma}_{\Delta}) \check{R}_{(\Delta)}^{KL} \check{l}_{(\Delta)}^2}{12E_{(\Delta)} \check{l}_{(\Delta)}} \frac{\check{P}_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}} \right),$$

$$p^K = \sum_{\Delta=I}^{VI} \left(\frac{(1+12\bar{\gamma}_{\Delta}) \check{R}_{(\Delta)}^K \check{l}_{(\Delta)}^2}{12E_{(\Delta)} \check{l}_{(\Delta)}} \frac{\check{P}_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}} + \frac{S_{(\Delta)}^K}{C_{(\Delta)}} \frac{M_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}} + \frac{\tilde{S}_{(\Delta)}^K}{E_{(\Delta)} \check{l}_{(\Delta)}} \frac{\tilde{M}_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}} \right).$$

Związki te stanowią uogólnienie znanych zależności obowiązujących dla płyt siatkowych o schematach jak na rys. 1 [2]:

$$(3.23) \quad m^{KL} = \sum_{\Delta} \left(t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \frac{M_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}} + t_{(\Delta)}^K t_{(\Delta)}^L \frac{\tilde{M}_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}} \right), \quad p^K = \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^K \frac{\check{P}_{(\Delta)}}{\bar{l}_{(\Delta)}},$$

w których $\Delta=I, II$ lub $\Delta=I, II, III$ w zależności od rodzaju siatki.

4. Szczególne przypadki płyt siatkowych

Korzystając ze związków wyprowadzonych w poprzednim punkcie pracy łatwo otrzymać równania konstytutywne dla płyt siatkowych o strukturach przedstawionych na rys. 3. W tym celu we wzorach (3.12), (3.13) i (3.7) należy wprowadzić uproszczenia, które przedstawimy kolejno dla siatek pokazanych na rys. 3:

Siatka I

$$(4.1) \quad \begin{aligned} t_{(III)}^K &= -t_{(V)}^K, & \check{t}_{(III)}^K &= -\check{t}_{(V)}^K, & t_{(IV)}^K &= -t_{(VI)}^K, & \check{t}_{(IV)}^K &= -\check{t}_{(VI)}^K; \\ E_{(III)} &= E_{(V)}, & \check{E}_{(III)} &= \check{E}_{(V)}, & C_{(III)} &= C_{(V)}, & \bar{\gamma}_{III} &= \bar{\gamma}_V; \\ E_{(IV)} &= E_{(VI)}, & \check{E}_{(IV)} &= \check{E}_{(VI)}, & C_{(IV)} &= C_{(VI)}, & \bar{\gamma}_{IV} &= \bar{\gamma}_{VI}. \end{aligned}$$

Siatka II

$$(4.2) \quad \begin{aligned} t_{(III)}^K &= -t_{(V)}^K, & \check{t}_{(III)}^K &= -\check{t}_{(V)}^K; \\ E_{(III)} &= E_{(V)}, & \check{E}_{(III)} &= \check{E}_{(V)}, & C_{(III)} &= C_{(V)}, & \bar{\gamma}_{III} &= \bar{\gamma}_V; \\ E_{(IV)} &= 0, & \check{E}_{(IV)} &= 0. \end{aligned}$$

Siatka III

$$(4.3) \quad \begin{aligned} t_{(V)}^K &= -t_{(VI)}^K, & \check{t}_{(V)}^K &= -\check{t}_{(VI)}^K; \\ E_{(V)} &= E_{(VI)}, & S_{(V)} &= S_{(VI)}, & \check{E}_{(V)} &= \check{E}_{(VI)}, & \bar{\gamma}_V &= \bar{\gamma}_{VI}; \\ E_{(I)} &= 0, & C_{(I)} &= 0. \end{aligned}$$

Siatka IV

$$(4.4) \quad \begin{aligned} t_{(III)}^K &= -t_{(V)}^K, & \check{t}_{(III)}^K &= -\check{t}_{(V)}^K; \\ E_{(III)} &= E_{(V)}, & C_{(III)} &= C_{(V)}, & \check{I}_{(III)} &= \check{I}_{(V)}, & \bar{\gamma}_{III} &= \bar{\gamma}_V; \\ E_{(I)} &= E_{(II)} = E_{(IV)} = 0; \\ C_{(I)} &= C_{(II)} = C_{(IV)} = 0. \end{aligned}$$

Siatka V

$$(4.5) \quad E_{(I)} = E_{(II)} = 0, \quad C_{(I)} = C_{(II)} = 0.$$

Jeśli przyjmiemy $E_{(IV)} = E_{(VI)} = 0$, $C_{(IV)} = C_{(VI)} = 0$ oraz $t_{(III)}^K = -t_{(V)}^K$, $\check{t}_{(III)}^K = -\check{t}_{(V)}^K$, $E_{(III)} = E_{(V)}$, $C_{(III)} = C_{(V)}$, $\bar{\gamma}_{(III)} = \bar{\gamma}_{(V)}$, to dochodzimy do równań płyty siatkowej o strukturze podanej na drugim schemacie rys. 1. Zgodnie z (3.7) dla $\bar{\gamma}_A = 0$ mamy wtedy

$$\begin{bmatrix} H_{NM} & H_N \\ H_N & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2C_{(III)}}{l_{(III)}} t_{(III)}^M t_{(III)}^K + \frac{8E_{(III)} \check{I}_{(III)}}{l_{(III)}} \check{t}_{(III)}^M \check{t}_{(III)}^K & 0 \\ 0 & \frac{24E_{(III)} \check{I}_{(III)}}{l_{(III)}^3} \end{bmatrix}^{-1},$$

czyli

$$\begin{aligned} H_{NM} &= \frac{l_{(III)}}{2C_{(III)}} t_{(III)N} t_{(III)M} + \frac{l_{(III)}}{8E_{(III)} \check{I}_{(III)}} \check{t}_{(III)N} \check{t}_{(III)M}, \\ H_N &= 0, \quad H = \frac{l_{(III)}^3}{24E_{(III)} \check{I}_{(III)}}. \end{aligned}$$

Definicje (3.13) prowadzą wtedy do

$$\begin{aligned} S_{(III)}^{KL} &= S_{(V)}^{KL} = C_{(III)} t_{(III)}^K t_{(III)}^L, \\ S_{(III)}^{KL} &= S_{(V)}^{KL} = 0, \quad M_{(III)}^* = M_{(V)}^* = 0, \\ \tilde{S}_{(III)}^{KL} &= \tilde{S}_{(V)}^{KL} = E_{(III)} \check{I}_{(III)} t_{(III)}^K t_{(III)}^L, \\ \tilde{S}_{(III)}^K &= -\tilde{S}_{(V)}^K = \frac{3E_{(III)} \check{I}_{(III)}}{2l_{(III)}} t_{(III)}^K, \\ \tilde{M}_{(III)}^* &= \tilde{M}_{(V)}^* = 0, \quad \check{R}_{(III)}^{KL} = \check{R}_{(V)}^{KL} = 0, \\ \check{R}_{(III)}^K &= -\check{R}_{(V)}^K = \frac{6E_{(III)} \check{I}_{(III)}}{l_{(III)}^2} t_{(III)}^K, \quad \check{P}_{(III)}^* = \check{P}_{(V)}^* = 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z (3.17) otrzymamy teraz

$$(4.6) \quad \begin{aligned} C^{KLMN} &= \sum_{A=1}^{III} \left(t_{(A)}^K t_{(A)}^L t_{(A)}^M t_{(A)}^N \frac{C_{(A)}}{\bar{L}_{(A)}} + t_{(A)}^K t_{(A)}^L t_{(A)}^M t_{(A)}^N \frac{E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{\bar{L}_{(A)}} \right), \\ {}''B^{KLM} &= 0, \quad A^{KL} = \sum_{A=1}^{III} \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{L_{(A)}^2 \bar{L}_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L, \end{aligned}$$

gdzie oznaczono dodatkowo $L_{(A)} \equiv l_{(A)}$, $\check{L}_{(A)} \equiv \check{l}_{(A)}$ dla $A=I, II$ oraz $L_{(III)} \equiv 2l_{(III)}$, $\check{L}_{(III)} \equiv 0,5\check{l}_{(III)}$. Wzory (4.6) są identyczne z wyprowadzonymi w [2]. Przyjmując $E_{(A)} = C_{(A)} = 0$, $A=I, II, III$, otrzymujemy natomiast płytę siatkową typu «plaster miodu».

Wyprowadzimy jeszcze wyrażenia dla tensorów sztywności sprężystej płyty siatkowej o strukturze przedstawionej na pierwszym miejscu na rys. 3. Korzystając z (4.1) oraz (3.7), dla $\check{\gamma}_A = 0$ otrzymamy

$$\begin{bmatrix} H_{NM}; H_N \\ H_N; H \end{bmatrix} = \left(\sum_{A=III}^{VI} \begin{bmatrix} \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{4E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^M \check{t}_{(A)}^K & 0 \\ 0 & \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}^3} \end{bmatrix} \right)^{-1},$$

czyli

$$\begin{aligned} [H_{NM}] &= \left[\sum_{A=III}^{VI} \left(\frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^M t_{(A)}^K + \frac{4E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^M \check{t}_{(A)}^K \right) \right]^{-1}, \\ H_N &= 0, \quad H = \left(\sum_{A=III}^{VI} \frac{l_{(A)}^3}{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Przyjmując $b_* = 0$ oraz $h_*^N = 0$ na podstawie (3.8) otrzymamy

$$\Delta v_N = -H_{NM} \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K \gamma_K, \quad \Delta u = H \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^K t_{(A)}^L \kappa_{LK}.$$

Postać wzorów (3.12) dla $A=I, II$ nie ulega zmianie, natomiast dla $A=III, IV, V, VI$ zgodnie z (3.13) otrzymamy

$$\begin{aligned} S_{(A)}^{KL} &= C_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L, \\ S_{(A)}^K &= \frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^N H_{NM} \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K, \\ \check{S}_{(A)}^{KL} &= E_{(A)} \check{I}_{(A)} t_{(A)}^K t_{(A)}^L, \\ \check{S}_{(A)}^K &= \frac{E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^N H_{NM} \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K, \\ \check{R}_{(A)}^{KL} &= \frac{6E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L - \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}^3} H \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^L t_{(A)}^K, \\ \check{R}_{(A)}^K &= \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K - \frac{6E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}^2} \check{t}_{(A)}^N H_{NM} \sum_{A=III}^{IV} \frac{12E_{(A)} \check{I}_{(A)}}{l_{(A)}} \check{t}_{(A)}^M t_{(A)}^K. \end{aligned}$$

Tym samym wzory (3.17) dla tensorów sztywności sprężystej prowadzą do formuł następujących:

$$\begin{aligned}
 C^{KLMN} &= \sum_{A=I}^{II} \left(\frac{C_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L t_{(A)}^M t_{(A)}^N + \frac{E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{l_{(A)}} t_{(A)}^K t_{(A)}^L t_{(A)}^M \check{t}_{(A)}^N \right) + \\
 &\quad + 2 \sum_{A=III}^{IV} \left(\frac{S_{(A)}^{KL} S_{(A)}^{MN}}{C_{(A)}} + \frac{\check{S}_{(A)}^{KL} \check{S}_{(A)}^{MN}}{E_{(A)} \check{l}_{(A)}} + \frac{\check{R}_{(A)}^{KL} \check{R}_{(A)}^{MN} l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} \check{l}_{(A)}} \right) \frac{1}{l_{(A)}}, \\
 (4.7) \quad {}''B^{KLM} &= 2 \sum_{A=III}^{IV} \left(\frac{S_{(A)}^{KL} S_{(A)}^M}{C_{(A)}} + \frac{\check{S}_{(A)}^{KL} \check{S}_{(A)}^M}{E_{(A)} \check{l}_{(A)}} + \frac{\check{R}_{(A)}^{KL} \check{R}_{(A)}^M l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} \check{l}_{(A)}} \right) \frac{1}{l_{(A)}}, \\
 A^{KL} &= \sum_{A=I}^{II} \frac{12 E_{(A)} \check{l}_{(A)}}{l_{(A)}^2} t_{(A)}^K t_{(A)}^L + \\
 &\quad + 2 \sum_{A=III}^{IV} \left(\frac{S_{(A)}^K S_{(A)}^M}{C_{(A)}} + \frac{\check{S}_{(A)}^K \check{S}_{(A)}^M}{E_{(A)} \check{l}_{(A)}} + \frac{\check{R}_{(A)}^K \check{R}_{(A)}^M l_{(A)}^2}{12 E_{(A)} \check{l}_{(A)}} \right) \frac{1}{l_{(A)}},
 \end{aligned}$$

co pozwala na napisanie związków konstytutywnych (3.21) dla rozpatrywanej płyty siatkowej.

5. Powłoki siatkowe

Jeżeli minimalne promienie krzywizny powierzchni, na której kształtujemy siatkę są wielokrotnie większe od odległości sąsiednich węzłów siatki, to równanie konstytutywne (1.21) oraz (3.21) można przyjąć jako prawdziwe także dla powłok siatkowych [4]. Wycinek siatki wyróżniony na rys. 4 można wtedy bowiem traktować w przybliżeniu jako leżący na płaszczyźnie stycznej w punkcie S_0 do powierzchni π , na której kształtujemy siatkę. Parametryzujemy powierzchnię π współrzędnymi krzywoliniowymi x^K . Oznaczmy przez a_{KL} , b_{KL} i e_{KL} kolejno składowe kowariantne pierwszego i drugiego tensora metrycznego oraz dwuwektora Ricciego powierzchni π . Związki geometryczne (1.4) i (3.5) przyjmą teraz postać [4]

$$\begin{aligned}
 \gamma_{KL} &= u_L|_K - b_{LK} u + e_{LK} v, \\
 \gamma_K &= u|_K + b_K^L u_L + e_{KL} v^L, \\
 (5.1) \quad \kappa_{KL} &= v_L|_K - b_{LK} v, \\
 \kappa_K &= v|_K + b_K^L v_L,
 \end{aligned}$$

a równania równowagi sprowadzają się do [4] równań

$$\begin{aligned}
 p^{KL}|_K - b_K^L p^K + b^L &= 0, \\
 m^K|_K + e_{KL} p^{KL} + b_{KL} m^{KL} + h &= 0, \\
 (5.2) \quad p^K|_K + b_{KL} p^{KL} + b &= 0, \\
 m^{KL}|_K - b_K^L m^K + e_{KL} p^K + h^L &= 0,
 \end{aligned}$$

przy czym pionowa kreska oznacza pochodną kowariantną.

Równania (5.1) i (5.2) wraz z równaniami konstytutywnymi

$$\begin{aligned}
 p^{KL} &= A^{KLMN} \gamma_{MN} + 'B^{KLM} \kappa_M + p_*^{KL}, \\
 m^K &= C^{KL} \kappa_L + 'B^{LMK} \gamma_{LM} + m_*^K, \\
 m^{KL} &= C^{KLMN} \kappa_{MN} + ''B^{KLM} \gamma_M + m_*^{KL}, \\
 p^K &= A^{KL} \gamma_L + ''B^{LMK} \kappa_{LM} + p_*^K
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

tworzą podstawowy układ równań teorii powłok siatkowych rozpatrywanych w tej pracy. Tensory sztywności sprężystej występujące w (5.3) obliczamy według wzorów podanych w p. 1 i 3 traktując jednakże składowe wszystkich występujących tam wektorów i tensorów jako ich składowe ko- lub kontrawariantne. Przy tym założeniu wszystkie rozważania w p. 2 i 4 są prawdziwe także dla powłok siatkowych.

Warunki brzegowe dla tarcz, płyt i powłok siatkowych omawianych w tej pracy mają taką samą postać jak w pracach [1, 2 i 4], w związku z czym nie będziemy ich omawiać. Przykłady rozwiązań różnych przypadków szczególnych oraz asymptotyczna analiza zagadnienia [4] będą natomiast tematem osobnego opracowania.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Load carrying structures of dense lattice type*, Arch. Mech. Stos., 5, 18 (1966), 581 – 597.
2. Cz. WOŹNIAK, *Bending and stability problems of plates with lattice structure*, Arch. Mech. Stos., 6, 18 (1966), 781 – 796.
3. Cz. WOŹNIAK, *On the equations of lattice-type structures*, Arch. Mech. Stos., 5, 21 (1969).
4. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe. Podstawy teorii i przykłady obliczeń*, PWN, Warszawa 1970.
5. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Gęste siatki sprężyste typu «plaster miodu»*, Mech. Teoret. i Stos. (w druku).

Резюме

УПРУГОСТЬ ГУСТЫХ СЕТОК ОБЛАДАЮЩИХ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ

В работе рассматривается применение уравнений среды Коссера, в качестве сплошной модели густых и регулярных упругих сеток с жесткими узлами. Работа обобщает рассуждения приведенные напр. в [1 и 2], касающиеся сеток показанных на рис. 1 на сетки с более сложной структурой.

Рассуждения проводятся, при предположении, что каждый стержень соединяющий два соседних узла, является призматическим и линейно-упругим, а также что существует плоскость упругой симметрии для каждого типичного вырезка сетки. Выводится основное уравнение для дисков, пластинок и сетчатых оболочек. Особыми случаями являются в данном случае, между прочим, сетки, обладающие структурами представленными на рис. 3.

Summary

THE ELASTICITY OF DENSE GRIDS OF COMPOSITE STRUCTURE

The subject of this paper is the application of Cosserats' equations of medium as a continuous model of dense and elastic regular grids having rigid nodes. The paper generalizes the considerations presented e.g. in [1 and 2] (concerning the grids represented in Fig. 1) to grids of a more complex structure. The considerations were carried out with the assumption that each rod connecting two neighbouring nodes is prismatic and linearly elastic, and that there exists a plane of elastic symmetry for each typical sector of the grid. The basic equations are derived for disks, plates and grid shells. The particular cases are comprised here, among others, of grids having the structures presented in Fig. 3.

INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO
POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 stycznia 1970 r.
