

**KSZTAŁTOWANIE NIEKOŁOWYCH CYLINDRÓW GRUBOŚCIENNYCH
WYKAZUJĄCYCH PEŁNE UPLASTYCZNIENIE W STADIUM ZNISZCZENIA**

ZDZISŁAWA KORDAS I MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Teoria i metody optymalnego projektowania konstrukcji ze względu na nośność graniczną (minimum objętości przy warunku pobocznym ustalonej nośności granicznej) rozwijane są od kilkunastu lat; omówienie osiągnięć z tego zakresu można znaleźć w pracach przeglądowych Z. WASIUTYŃSKIEGO i A. BRANDTA [14], W. OLSZAKA, Z. MROZA i P. PERZYNY [8], M. I. REJTMANA i G. S. SZAPIRO [9], C. Y. SHEU i W. PRAGERA [10]. W podstawowych pracach D. C. DRUCKERA i R. T. SHIELDA [1 i 2] oraz Z. MROZA [6 i 7] stwierdzono, że w optymalnej konstrukcji rozpraszana moc odkształceń plastycznych powinna być stała bądź w całym obszarze ciała, bądź też w warstwach skrajnych, o ile sformułowanie zagadnienia dopuszcza taką możliwość. W każdym razie w stadium zniszczenia uplastycznione być powinno bądź całe ciało, bądź też możliwie wielki podobszar tego ciała.

Obecna praca nie jest poświęcona bezpośrednio optymalnemu kształtowaniu, jednak jej celem jest zbadanie problemu pokrewnego, jakim jest poszukiwanie ciał podlegających całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia.

Istnieje oczywiście wiele trywialnych rozwiązań postawionego zagadnienia, np. rozciąganie jednorodnego pręta pryzmatycznego, skręcanie pręta pryzmatycznego itp. W niniejszej pracy zajęto się możliwie prostym, ale nietrywialnym zagadnieniem tego typu, mianowicie poszukiwaniem takich kształtów niekołowych cylindrów grubościennych, które w warunkach płaskiego stanu odkształcenia wykazują pełne uplastycznienie przy wyczerpaniu nośności granicznej pod działaniem stałego ciśnienia wewnętrznego i zewnętrznego.

W zastosowanej metodzie wykorzystano rozwinięcia w szereg małego parametru zarówno naprężeń i odkształceń, jak i funkcji określającej kształt niekołowego cylindra. Dla pierwszego przybliżenia otrzymano problem wartości własnych. Warunek na istnienie rozwiązań niezerowych określił kształt ciała.

Podobną metodę małego parametru we współrzędnych walcowych stosował do zagadnień sprężysto-plastycznych D. D. IWLEW [4], który rozwijał ponadto w szereg funkcję $\rho(\vartheta)$, określającą granicę między strefą sprężystą a plastyczną. A. J. M. SPENCER [13] badał perturbacje charakterystyk, związane z odchyłkami kształtu rozpatrywanego ciała od kształtów regularnych.

2. Założenia i równania podstawowe

Rozpatrzmy cylinder grubościenny o zmiennych promieniach: wewnętrznym $a(\vartheta)$ i zewnętrznym $b(\vartheta)$ pod działaniem stałych ciśnień p_a i p_b (rys. 1).

Zadanie będziemy rozwiązywać w układzie współrzędnych biegunowych r, ϑ , dogodnych z uwagi na przyjętą metodę małego parametru. Przyjęty bowiem parametr będzie charakteryzował perturbacje kształtu kołowego cylindra.

Założymy dalej płaski stan odkształcenia i nieściśliwość materiału. Stan naprężenia więc w dowolnym punkcie cylindra określony będzie trójką składowych $\sigma_r, \sigma_\vartheta, \tau_{r\vartheta}$ ($\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\vartheta)/2$), spełniających następujące dwa warunki równowagi wewnętrznej, napisane we współrzędnych biegunowych:

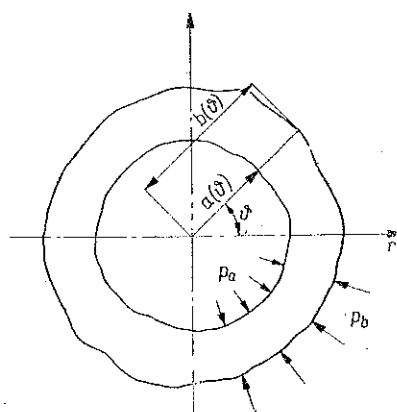
$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{2\tau_{r\vartheta}}{r} = 0$$

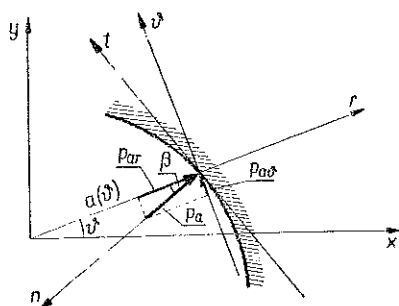
oraz warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego (który wobec przyjętego kryterium kształtowania powinien być spełniony w każdym punkcie)

$$(2.2) \quad (\sigma_r - \sigma_\vartheta)^2 + 4\tau_{r\vartheta}^2 = \frac{4}{3} Q^2,$$

gdzie Q oznacza granicę plastyczności materiału przy jednoosiowym rozciąganiu.



Rys. 1



Rys. 2

Trzy równania (2.1) i (2.2) określają trzy niewiadome, zatem problem jest wewnętrznie statycznie wyznaczalny; ściślej można by go nazwać «pseudo-wyznaczalnym», gdyż wyprowadzenie równania (2.2) wymaga wykorzystania praw fizycznych, i to zarówno prawa zmiany objętości jak i prawa zmiany postaci.

Związki pomiędzy składowymi stanu naprężenia a obciążeniami zewnętrznymi określimy z naprężeniowych warunków brzegowych, które we współrzędnych biegunowych są następujące:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p_{nr} &= \sigma_r \cos(\widehat{nr}) + \tau_{r\vartheta} \cos(\widehat{n\vartheta}), \\ p_{n\vartheta} &= \tau_{r\vartheta} \cos(\widehat{nr}) + \sigma_\vartheta \cos(\widehat{n\vartheta}), \end{aligned}$$

gdzie p_{nr} i $p_{n\vartheta}$ są składowymi ciśnieniami w kierunku promieniowym i obwodowym.

Na powierzchni wewnętrznej (rys. 2) cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej w układzie r, ϑ są następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \cos(\widehat{nr}) &= -\cos \beta = \frac{-a(\vartheta)}{\sqrt{[a'(\vartheta)]^2 + [a(\vartheta)]^2}}, \\ \cos(\widehat{n\vartheta}) &= -\sin \beta = \frac{a'(\vartheta)}{\sqrt{[a'(\vartheta)]^2 + [a(\vartheta)]^2}}. \end{aligned}$$

Składowe ciśnienia wewnątrzono natomiast są odpowiednio równe

$$(2.5) \quad \begin{aligned} p_{nr} &= p_a \cos \beta, \\ p_{n\vartheta} &= p_a \sin \beta. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe (2.3) mają więc ostatecznie na powierzchni wewnętrznej następującą postać:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} p_a &= -\sigma_r + \frac{a'(\vartheta)}{a(\vartheta)} \tau_{r\vartheta}, \\ p_a &= -\sigma_\vartheta + \frac{a(\vartheta)}{a'(\vartheta)} \tau_{r\vartheta}, \end{aligned}$$

gdzie $a'(\vartheta)$ oznacza pochodną promienia wewnętrznego $a(\vartheta)$ względem ϑ .

Podobnie przedstawimy warunki brzegowe na powierzchni zewnętrznej, mianowicie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} p_b &= -\sigma_r + \frac{b'(\vartheta)}{b(\vartheta)} \tau_{r\vartheta}, \\ p_b &= -\sigma_\vartheta + \frac{b(\vartheta)}{b'(\vartheta)} \tau_{r\vartheta}, \end{aligned}$$

gdzie $b'(\vartheta)$ oznacza pochodną promienia zewnętrznego $b(\vartheta)$ względem ϑ .

3. Zastosowanie metody małego parametru

3.1. Równania podstawowe. Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu parametru α , który charakteryzuje niekołowość cylindra. Zakładamy mianowicie, że

$$(3.1) \quad \begin{aligned} a(\vartheta) &= a_0 + \alpha a_1(\vartheta) + \alpha^2 a_2(\vartheta) + \dots, \\ b(\vartheta) &= b_0 + \alpha b_1(\vartheta) + \alpha^2 b_2(\vartheta) + \dots, \end{aligned}$$

gdzie a_0 i b_0 są promieniami wewnętrznym i zewnętrznym cylindra kołowego, stanowiącego zerowe przybliżenie rozwiązania; $a_1(\vartheta)$, $b_1(\vartheta)$, $a_2(\vartheta)$ i $b_2(\vartheta)$ są to pierwsze i drugie poprawki tych promieni. Okazuje się, że stosunek a_0/b_0 nie może być dowolny. Stosunek ten, jak również wielkości $a_1(\vartheta)$, $b_1(\vartheta)$, ..., zostaną później określone w wyniku zastosowanej metody.

Zakładamy również

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r_0} + \sigma_{r_1} \alpha + \sigma_{r_2} \alpha^2 + \dots, \\ \sigma_\vartheta &= \sigma_{\vartheta_0} + \sigma_{\vartheta_1} \alpha + \sigma_{\vartheta_2} \alpha^2 + \dots, \\ \tau_{r\vartheta} &= \tau_{r\vartheta_0} + \tau_{r\vartheta_1} \alpha + \tau_{r\vartheta_2} \alpha^2 + \dots, \end{aligned}$$

gdzie wielkości ze znaczkami 0 są składowymi stanu naprężenia dla cylindra kołowego, mianowicie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{r_0} &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b_0} - p_b, \\ \sigma_{\vartheta_0} &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 \right] - p_b, \\ \tau_{r\vartheta_0} &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając założone rozwiązania (3.2) do równań podstawowych (2.1) i (2.2), porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach α otrzymujemy ciąg układów trzech równań, w których niewiadomymi są odpowiednie poprawki składowych stanu naprężenia. Ciąg ten ma następującą postać:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r_i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta i}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_{r_i} - \sigma_{\vartheta i}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\vartheta i}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\vartheta i}}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\tau_{r\vartheta i}}{r} &= 0, \end{aligned}$$

$$\sigma_{r_i} - \sigma_{\vartheta_i} = f_i(\sigma_{r_0}, \sigma_{\vartheta_0}, \dots, \sigma_{r_{i-1}}, \sigma_{\vartheta_{i-1}}, \tau_{r\vartheta_{i-1}}),$$

gdzie $i=1, 2, \dots$

Dwa pierwsze równania układu (3.4) mają dla każdego przybliżenia identyczną postać z wyjściowymi warunkami równowagi (2.1), które są równaniami liniowymi. Trzecie równanie układu (3.4) jest dla i -tego przybliżenia warunkiem plastyczności. Należy zauważyć, że nieliniowy warunek plastyczności (2.2) w każdym kolejnym przybliżeniu staje się warunkiem liniowym.

3.2. Całkowanie równań podstawowych w pierwszym przybliżeniu. W pierwszym przybliżeniu, tzn. dla $i=1$, prawa strona rozwiniętego warunku plastyczności $f_1=0$; oznacza to, że pierwsze poprawki naprężenia promieniowego i obwodowego są jednakowe, mianowicie z trzeciego z równań (3.4) wynika $\sigma_{r_1} = \sigma_{\vartheta_1}$. Dwa pozostałe

równania układu (3.4) można łatwo sprowadzić do jednego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu na pierwszą poprawkę naprężenia stycznego $\tau_{r\theta 1}$ mianowicie

$$(3.5) \quad r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta 1}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tau_{r\theta 1}}{\partial \vartheta^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\theta 1}}{\partial r} = 0.$$

Podobne równania typu hiperbolicznego uzyskano w pracy [11] przy badaniu niesymetrycznych schematów zniszczenia symetrycznie obciążonych cylindrów kołowych. Równanie powyższe rozwiązujemy metodą Fouriera; zakładamy mianowicie, że

$$(3.6) \quad \tau_{r\theta 1} = F_1(r) F_2(\vartheta).$$

Rozdzielenie zmiennych prowadzi do równości

$$(3.7) \quad r^2 \frac{F_1''(r)}{F_1(r)} + 3r \frac{F_1'(r)}{F_1(r)} = \frac{F_2''(\vartheta)}{F_2(\vartheta)} = -\lambda^2,$$

a tym samym do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, określających funkcje $F_1(r)$ i $F_2(\vartheta)$. Jak się okaże, przyjęcie dodatniej stałej po prawej stronie równości (3.7) byłoby sprzeczne z wymaganiami periodiczności rozwiązania względem zmiennej ϑ .

Otrzymujemy zatem równanie Eulera o postaci

$$(3.8) \quad r^2 F_1''(r) + 3r F_1'(r) + \lambda^2 F_1(r) = 0$$

oraz równanie drgań harmoniczych

$$(3.9) \quad F_2''(\vartheta) + \lambda^2 F_2(\vartheta) = 0.$$

Ponadto wymaganie periodiczności ogranicza wartości λ do liczb całkowitych dodatnich. Przyjmijmy $\lambda \geq 2$, ponieważ $\lambda = 1$ nie prowadzi do nowych rozwiązań.

Całką ogólną równania (3.8) jest następująca funkcja promienia:

$$(3.10) \quad F_1(r) = \frac{C_{11}}{r} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \frac{C_{21}}{r} \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right).$$

Całką ogólną równania (3.9) jest natomiast następująca kombinacja funkcji trygonometrycznych:

$$(3.11) \quad F_2(\vartheta) = D_{11} \sin(\lambda \vartheta) + D_{21} \cos(\lambda \vartheta).$$

Przez odpowiedni obrót układu można jedną ze stałych otrzymać równą zeru; założymy więc, że $D_{21} = 0$.

Pierwszą poprawkę naprężenia stycznego określimy ostatecznie następująco:

$$(3.12) \quad \tau_{r\theta 1} = \left[\frac{A_1}{r} \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \frac{B_1}{r} \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin(\lambda \vartheta),$$

gdzie

$$(3.13) \quad A_1 = C_{11} D_{11}, \quad B_1 = C_{21} D_{11}.$$

Przez całkowanie dwóch pierwszych równań (3.4) (dla $i=1$) i przy wykorzystaniu warunku zgodności określimy pierwsze poprawki naprężenia promieniowego i obwodowego:

$$(3.14) \quad \sigma_{r1} = \sigma_{\theta 1} = \left\{ [A_1 - \sqrt{\lambda^2 - 1} B_1] \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + [\sqrt{\lambda^2 - 1} A_1 + B_1] \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right\} \frac{\cos(\lambda \vartheta)}{\lambda r} + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą całkowania. Stała ta odpowiada nałożeniu dodatkowego ciśnienia hydrostatycznego; w dalszym ciągu przyjęto $C=0$.

3.3. Wykorzystanie warunków brzegowych w pierwszym przybliżeniu. Rozwiemy teraz w szereg parametru α warunki brzegowe (3.1) i (3.2). Pierwszy z warunków na powierzchni wewnętrznej przedstawia się po rozwinięciu następująco:

$$(3.15) \quad (a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots) p_a = - (a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots) \left\{ \left[[\sigma_{r_0}]_{r=a_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{\partial \sigma_{r_0}}{\partial r} \right]_{r=a_0} (a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots) + \left[\frac{\partial^2 \sigma_{r_0}}{\partial r^2} \right]_{r=a_0} \frac{a_1^2}{2!} \alpha^2 + \dots \right] + \right. \\ \left. + \left[[\sigma_{r_1}]_{r=a_0} + \left[\frac{\partial \sigma_{r_1}}{\partial r} \right]_{r=a_0} a_1 \alpha + \dots \right] \alpha + [\sigma_{r_2}]_{r=a_0} \alpha^2 + \dots \right\} + \\ + (a'_1 \alpha + a'_2 \alpha^2 + \dots) \left\{ \left[[\tau_{r\theta_0}]_{r=a_0} + \left[\frac{\partial \tau_{r\theta_0}}{\partial r} \right]_{r=a_0} (a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[\frac{\partial^2 \tau_{r\theta_0}}{\partial r^2} \right]_{r=a_0} \frac{a_1^2}{2!} \alpha^2 + \dots \right] + \left[[\tau_{r\theta_1}]_{r=a_0} + \left[\frac{\partial \tau_{r\theta_1}}{\partial r} \right]_{r=a_0} a_1 \alpha + \dots \right] \alpha + [\tau_{r\theta_2}]_{r=a_0} \alpha^2 + \dots \right\}.$$

Pozostałe warunki brzegowe rozwijają się podobnie.

Porównanie współczynników α^1 prowadzi do warunków brzegowych w pierwszym przybliżeniu, które mają następującą postać:

na powierzchni wewnętrznej:

$$(3.16) \quad \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{a_1(\vartheta)}{a_0} + [\sigma_{r_1}]_{r=a_0} = 0, \\ \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{a'_1(\vartheta)}{a_0} - [\tau_{r\theta_1}]_{r=a_0} = 0;$$

na powierzchni zewnętrznej

$$(3.17) \quad \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{b_1(\vartheta)}{b_0} + [\sigma_{r_1}]_{r=b_0} = 0, \quad \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{b'_1(\vartheta)}{b_0} - [\tau_{r\theta_1}]_{r=b_0} = 0.$$

Zarówno równania (3.4) jak i wymienione powyższe warunki brzegowe są oczywiście spełnione przez funkcje $\sigma_{r1} \equiv \tau_{r\theta 1} \equiv a_1 \equiv b_1 \equiv 0$, co prowadzi do rozwiązania wyjściowego dla cylindra kołowego. Będziemy jednak poszukiwali rozwiązań niezerowych, sprowadzając zagadnienie do problemu wartości własnych.

Z warunków (3.16) i (3.17) wyliczamy odpowiednio pierwsze poprawki promienia wewnętrznego i zewnętrznego:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} a_1(\vartheta) &= -a_0 \frac{\sqrt{3}}{2Q} [\sigma_{r_1}]_{r=a_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2Q\lambda} \left\{ [A_1 - \sqrt{\lambda^2 - 1} B_1] \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) + \right. \\ &\quad \left. + [\sqrt{\lambda^2 - 1} A_1 + B_1] \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) \right\} \cos(\lambda\vartheta), \\ b_1(\vartheta) &= -b_0 \frac{\sqrt{3}}{2Q} [\sigma_{r_1}]_{r=b_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2Q\lambda} [\sqrt{\lambda^2 - 1} A_1 + B_1] \cos(\lambda\vartheta). \end{aligned}$$

Różniczkując wyrażenia (3.18) względem ϑ oraz wstawiając odpowiednio pochodne $a_1'(\vartheta)$ i $b_1'(\vartheta)$ do warunków (3.16)₂ i (3.17)₂ otrzymujemy układ dwóch równań jednorodnych ze względu na stałe A_1 i B_1 , typowy dla problemu wartości własnych:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[A_1 \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) - B_1 \sin \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) \right] &= 0, \\ \sqrt{\lambda^2 - 1} A_1 &= 0. \end{aligned}$$

Przypadek $\lambda^2 = 1$ nas nie interesuje, odpowiada on bowiem całkowitemu uplastycznieniu cylindra kołowego. Zadaniem naszym natomiast jest wyszukiwanie kształtów różnych od kołowego, podlegających całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia.

Z równania (3.19)₂ otrzymujemy więc $A_1 = 0$. Ponieważ B_1 nie może być zerem, równanie (3.19)₁ daje więc następujące równanie przestępne na wartości własne λ :

$$(3.20) \quad \sin \left[-\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right] = 0.$$

Równanie (3.20) określa podwójny ciąg stosunków wymiarów cylindra:

$$\ln \frac{a_0}{b_0} = -\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}},$$

skąd

$$(3.21) \quad \frac{a_0}{b_0} = e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}},$$

gdzie $n=1, 2, 3, \dots$; $\lambda=2, 3, 4, \dots$.

Tablica 1 podaje liczbowe wartości a_0/b_0 dla kilku wartości λ i n .

Kształty odbiegające od kołowych o tak wyznaczonym stosunku a_0/b_0 ulegną zniszczeniu w sensie przyjętego kryterium.

Ponieważ $A_1 = 0$ oraz $\cos(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln a_0/b_0) = (-1)^n$ wobec równania (3.21), a stała B_1 pozostanie do końca niewyznaczona (będzie spełniała rolę parametru,

który uda się później włączyć w parametr a), przeto pierwsze poprawki promienia wewnętrznego i zewnętrznego są ostatecznie następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(3.22) \quad \begin{aligned} a_1(\vartheta) &= (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{3}}{2Q} \frac{B_1}{\lambda} \cos(\lambda\vartheta), \\ b_1(\vartheta) &= -\frac{\sqrt{3}}{2Q} \frac{B_1}{\lambda} \cos(\lambda\vartheta), \end{aligned}$$

gdzie n przyjmuje wartości 1, 2, 3, ... Należy zauważyć, że dla n nieparzystych pierwsze poprawki promienia $a_1(\vartheta)$ i $b_1(\vartheta)$ mają przeciwne znaki, co wskazuje na uzyskiwanie kształtów wykazujących całkowite uplastycznienie w stadium zniszczenia, posiadających zwięzienia na grubości ścianki cylindra.

Tablica 1

Wartości a_0/b_0 dla różnych wartości λ i n

$\lambda \backslash n$	1	2	3	4
2	0,1630	0,0265	0,0043	0,0007
3	0,3292	0,1084	0,0358	0,0118
4	0,4444	0,1975	0,0877	0,0392
5	0,5268	0,2773	0,1460	0,0769
6	0,5904	0,3484	0,2056	0,1214
7	0,6354	0,4037	0,2565	0,1630

Pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia określone są natomiast następującymi funkcjami promienia r i kąta ϑ :

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \tau_{r\vartheta_1} &= \frac{B_1}{r} \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \sin(\lambda\vartheta), \\ \sigma_{r_1} = \sigma_{\vartheta_1} &= -\frac{B_1}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \right] \cos(\lambda\vartheta). \end{aligned}$$

Ze względu na uzyskany problem wartości własnych suma rozwiązań (3.6), uzyskanych dla różnych λ , czyli suma funkcji (3.23), nie będzie stanowiła rozwiązania, co stanowi pewne ograniczenie. Nie można bowiem przedstawić rozwiązania w postaci szeregu funkcji (3.6).

3.4. Całkowanie równań podstawowych w drugim przybliżeniu. Dla uzyskania dokładniejszych wyników zajęto się dalej rozwiązaniem zagadnienia w drugim przybliżeniu. Dla $i=2$ prawa strona rozwiniętego warunku plastyczności (3.4) ma następującą postać:

$$(3.24) \quad f_2 = \frac{\sqrt{3}}{Q} \tau_{r\vartheta_1}^2.$$

Układ równań (3.4) (dla $i=2$) przez odpowiednie rugowanie można sprowadzić do jednego równania cząstkowego drugiego rzędu, niejednorodnego, określającego drugą poprawkę naprężenia stycznego. Równanie to ma następującą postać:

$$(3.25) \quad r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_2}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_2}}{\partial \vartheta^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\theta_2}}{\partial r} = \frac{2\sqrt{3}}{Q} \left(r\tau_{r\theta_1} \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_1}}{\partial r \partial \vartheta} + \right. \\ \left. + \tau_{r\theta_1} \frac{\partial \tau_{r\theta_1}}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial \tau_{r\theta_1}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \tau_{r\theta_1}}{\partial r} \right).$$

Ponieważ $\tau_{r\theta_1}$ określono powyżej [pierwsze z równań (3.23)], równanie (3.25) po podstawieniu i uporządkowaniu ma postać

$$(3.26) \quad r^2 \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_2}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \tau_{r\theta_2}}{\partial \vartheta^2} + 3r \frac{\partial \tau_{r\theta_2}}{\partial r} = -\frac{\sqrt{3}}{2Q} \lambda \frac{B_1^2}{r^2} \left[1 + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + 2\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \sin(2\lambda\vartheta).$$

Poszukujemy rozwiązania równania (3.26) w postaci

$$(3.27) \quad \tau_{r\theta_2} = F(r) \sin(2\lambda\vartheta),$$

gdzie $F(r)$ jest całką ogólną następującego równania różniczkowego, zwyczajnego, niejednorodnego:

$$(3.28) \quad r^2 F''(r) + 3rF'(r) + 4\lambda^2 F(r) = \\ = -\frac{\sqrt{3}}{2Q} \frac{B_1^2}{r^2} \lambda \left[1 + \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + 2\sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right].$$

Całkę tę znajdziemy przez sumę całki ogólnej równania jednorodnego (Eulera) i całki szczególnej równania niejednorodnego.

Ostatecznie więc rozwiązaniem równania (3.26) będzie następująca funkcja $\tau_{r\theta_2} = \tau_{r\theta_2}(r, \vartheta)$, określająca drugą poprawkę naprężenia stycznego:

$$(3.29) \quad \tau_{r\theta_2} = \left[\frac{A_2}{r} \sin \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \frac{B_2}{r} \cos \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + \frac{C_{32}}{r^2} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \frac{C_{42}}{r^2} \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \frac{C_{52}}{r^2} \right] \sin(2\lambda\vartheta),$$

gdzie

$$(3.30) \quad C_{32} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{B_1^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}}{Q}, \quad C_{42} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{B_1(2\lambda^2 - 1)}{Q}, \\ C_{52} = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{B_1^2}{Q},$$

a stałe A_2 i B_2 są nieoznaczonymi dotychczas stałymi całkowania. Zostaną one później określone z warunków brzegowych w drugim przybliżeniu.

Całkując dwa pozostałe równania z układu (3.4) (dla $i=2$) otrzymamy drugie poprawki naprężenia obwodowego i promieniowego. Są to następujące funkcje promienia i kąta:

$$(3.31) \quad \sigma_{\theta_2} = \left[(A_2 - \sqrt{4\lambda^2 - 1} B_2) r^{-1} \sin \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + (\sqrt{4\lambda^2 - 1} A_2 + B_2) r^{-1} \cos \left(\sqrt{4\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + 2\sqrt{\lambda^2 - 1} C_{32} r^{-2} \times \right. \\ \left. \times \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - 2\sqrt{\lambda^2 - 1} C_{42} r^{-2} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \frac{\cos(2\lambda\vartheta)}{2\lambda} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{3}}{8Q} \frac{B_1^2}{\lambda^2} r^{-2} \left[\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 - 1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (2\lambda^2 - 1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] + D, \right. \\ \left. \sigma_{r_2} = \sigma_{\theta_2} + \frac{\sqrt{3}}{Q} B_1^2 r^{-2} \cos^2 \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \sin^2(\lambda\vartheta), \right.$$

gdzie D jest dowolną stałą całkowania, którą dalej przyjęto za zero (podobnie jak stałą C w p. 3.2); stałe C_{32} , C_{42} i C_{52} określone są wzorami (3.30).

3.5. Wykorzystanie warunków brzegowych w drugim przybliżeniu. Z porównania współczynników przy α^2 w rozwiniętych warunkach brzegowych otrzymamy warunki brzegowe w drugim przybliżeniu. Mają one następującą postać:

na powierzchni wewnętrznej

$$(3.32) \quad a'_1 [\tau_{r\theta_1}]_{r=a_0} - \frac{a_1^2}{a_0} \frac{Q}{\sqrt{3}} - a_2 \frac{2Q}{\sqrt{3}} - a_0 a_1 \left[\frac{\partial \sigma_{r_1}}{\partial r} \right]_{r=a_0} - a_0 [\sigma_{r_2}]_{r=a_0} - a_1 [\sigma_{r_1}]_{r=a_0} = 0, \\ a_1 [\tau_{r\theta_1}]_{r=a_0} + a_0 a_1 \left[\frac{\partial \tau_{r\theta_1}}{\partial r} \right]_{r=a_0} + a_0 [\tau_{r\theta_2}]_{r=a_0} - a_2 \frac{2Q}{\sqrt{3}} - \frac{a_1 a'_1}{a_0} \frac{2Q}{\sqrt{3}} - \\ - a'_1 [\sigma_{\theta_1}]_{r=a_0} = 0;$$

na powierzchni zewnętrznej

$$(3.33) \quad b'_1 [\tau_{r\theta_1}]_{r=b_0} - \frac{b_1^2}{b_0} \frac{Q}{\sqrt{3}} - b_2 \frac{2Q}{\sqrt{3}} - b_0 b_1 \left[\frac{\partial \sigma_{r_1}}{\partial r} \right]_{r=b_0} - b_0 [\sigma_{r\theta_2}]_{r=b_0} - b_1 [\sigma_{r_1}]_{r=b_0} = 0, \\ b_1 [\tau_{r\theta_1}]_{r=b_0} + b_0 b_1 \left[\frac{\partial \tau_{r\theta_1}}{\partial r} \right]_{r=b_0} + b_0 [\tau_{r\theta_2}]_{r=b_0} - b'_2 \frac{2Q}{\sqrt{3}} - \frac{b_1 b'_1}{b_0} \frac{2Q}{\sqrt{3}} - \\ - b'_1 [\sigma_{\theta_1}]_{r=b_0} = 0.$$

Warunki (3.32) i (3.33) wykorzystamy podobnie jak w p. 3.3. Mianowicie z równania (3.32)₁ i (3.33)₁ wyliczymy drugie poprawki promienia wewnętrznego i zewnętrznego,

a dwa pozostałe równania (3.32)₂ i (3.33)₂ dadzą układ równań jednorodnych na stałe całkowania A_2 i B_2 :

$$(3.34) \quad \sqrt{4\lambda^2-1} \left[B_2 \sin \left(\sqrt{4\lambda^2-1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) - A_2 \cos \left(\sqrt{4\lambda^2-1} \ln \frac{a_0}{b_0} \right) \right] = 0,$$

$$\sqrt{4\lambda^2-1} A_2 = 0.$$

Z równania (3.34)₂ wynika, że $A_2 = 0$ ($\sqrt{4\lambda^2-1} \neq 0$ dla λ całkowitych). Wobec tego, że $\ln a_0/b_0 = -n\pi/\sqrt{\lambda^2-1}$ (wynik rozważań w pierwszym przybliżeniu, wyrażenie (3.21)), równanie (3.34)₁ jest następującym równaniem przestępnym:

$$(3.35) \quad B_2 \sin \left[-n\pi \frac{\sqrt{4\lambda^2-1}}{\sqrt{\lambda^2-1}} \right] = 0.$$

Ponieważ dla λ całkowitych wyrażenie $\sqrt{4\lambda^2-1}/\sqrt{\lambda^2-1}$ nie może być całkowite, zatem sinus nie jest równy zero; aby równanie było spełnione, musi więc również stała B_2 przyjmować wartość zera.

Ostatecznie więc drugie poprawki promienia wewnętrznego i zewnętrznego (obliczone z równania (3.32)₁ i (3.33)₁ i przy uwzględnieniu (3.29), (3.30), (3.31) oraz faktu, że $A_2 = B_2 = 0$) są następującymi funkcjami kąta:

$$(3.36) \quad a_2(\vartheta) = -\frac{3}{8Q^2} \frac{B_1^2}{a_0} \sin^2(\lambda\vartheta), \quad b_2(\vartheta) = -\frac{3}{8Q^2} \frac{B_1^2}{b_0} \sin^2(\lambda\vartheta).$$

Drugie poprawki składowych stanu naprężenia zaś określone są następująco:

$$(3.37) \quad \tau_{r\vartheta_2} = -\frac{\sqrt{3}}{8Q} \frac{B_1^2}{\lambda r^2} \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \right. \\ \left. + (2\lambda^2-1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + 1 \right] \sin(2\lambda\vartheta),$$

$$\sigma_{r_2} = \frac{\sqrt{3}}{8Q} \frac{B_1^2}{\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2-1) \sqrt{\lambda^2-1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (3\lambda^2-1) \cos \left(\sqrt{2\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - 2\lambda^2 \right] \cos(2\lambda\vartheta) + \right. \\ \left. + \left[\cos \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \sqrt{\lambda^2-1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + \lambda^2 \right] \right\},$$

$$\sigma_{\vartheta_2} = \frac{\sqrt{3}}{8Q} \frac{B_1^2}{\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2-1) \sqrt{\lambda^2-1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\lambda^2-1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] - \cos(2\lambda\vartheta) - \right. \\ \left. - \left[\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2-1} \sin \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) + (2\lambda^2-1) \cos \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) \right] \right\}.$$

3.6. Zestawienie wzorów końcowych. Wykorzystując uzyskane wyniki w p. 3.3 i 3.5 przedstawimy wyrażenia na promienie wewnętrzny i zewnętrzny kształtowanego cylindra, który całkowicie zostanie uplastyczniony w stadium zniszczenia. Są to następujące funkcje kąta ϑ (z dokładnością do drugiego przybliżenia)

$$(3.38) \quad \begin{aligned} a(\vartheta) &= a_0 + (-1)^{n+1} \frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \cos(\lambda\vartheta) - \frac{\bar{\alpha}^2}{2a_0} \sin^2(\lambda\vartheta) + \dots, \\ b(\vartheta) &= b_0 - \frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \cos(\lambda\vartheta) - \frac{\bar{\alpha}^2}{2b_0} \sin^2(\lambda\vartheta) + \dots, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.39) \quad \bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2Q} B_1 \alpha$$

jest nowym parametrem charakteryzującym niekołowość cylindra.

Składowe stanu naprężenia z dokładnością do drugiego przybliżenia określane są następującymi funkcjami kąta ϑ i promienia r :

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \tau_{r\vartheta} &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\alpha}}{r} \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \sin(\lambda\vartheta) - \\ &\quad - \frac{Q}{2\sqrt{3}} \frac{\bar{\alpha}^2}{\lambda r^2} \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin\left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + \right. \\ &\quad \left. + (2\lambda^2-1) \cos\left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + 1 \right] \sin(2\lambda\vartheta) + \dots, \\ \sigma_r &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{b_0} - \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \right] \cos(\lambda\vartheta) + \frac{Q}{2\sqrt{3}} \frac{\bar{\alpha}^2}{\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2-1) \sqrt{\lambda^2-1} \sin \times \right. \right. \\ &\quad \times \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - (3\lambda^2-1) \cos\left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - 2\lambda^2 \right] \cos(2\lambda\vartheta) + \\ &\quad \left. \left. + \cos\left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - \sqrt{\lambda^2-1} \sin\left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + \lambda^2 \right] \right\} + \dots, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{r}{b_0} + 1 \right) - \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{\bar{\alpha}}{\lambda r} \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \right] \cos(\lambda\vartheta) + \frac{Q}{2\sqrt{3}} \frac{\bar{\alpha}^2}{\lambda^2 r^2} \left\{ \left[(2\lambda^2-1) \sqrt{\lambda^2-1} \sin \times \right. \right. \\ &\quad \times \left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0} \right) - (\lambda^2-1) \cos\left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) \right] \cos(2\lambda\vartheta) - \\ &\quad \left. \left. - \left[\sqrt{\lambda^2-1} \sin\left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + (2\lambda^2-1) \cos\left(2\sqrt{\lambda^2-1} \ln \frac{r}{b_0}\right) + \lambda^2 \right] \right\} + \dots \end{aligned}$$

4. Przykłady liczbowe

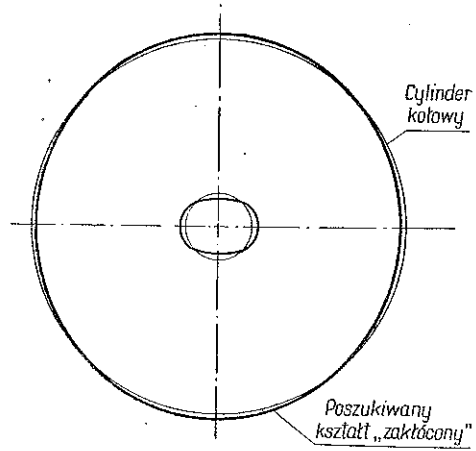
Wykorzystując wyprowadzone wyżej wzory, podamy poniżej dwa przykłady liczbowe określania kształtów cylindrów podlegających pełnemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia.

Przykład 1. Zakładamy $\lambda=2$, $n=1$, $\bar{\alpha}=0,06$ oraz $b_0=1$ (zerowe przybliżenie promienia zewnętrznego). Z równości (3.21) obliczamy zerowe przybliżenie promienia wewnętrznego cylindra: $a_0=0,1630$.

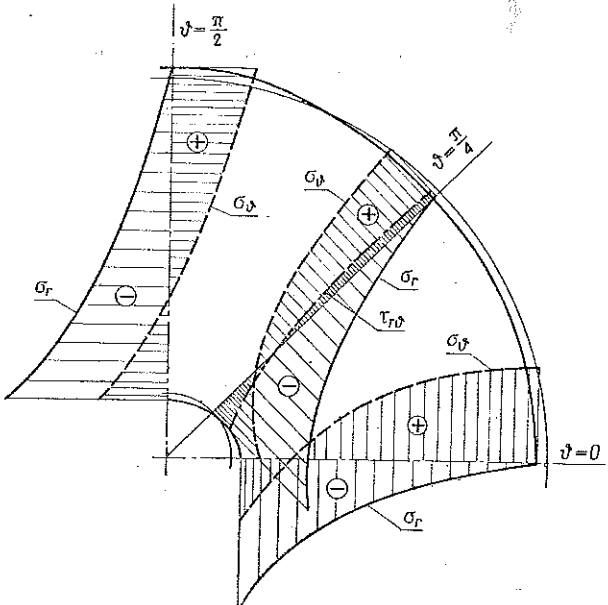
Kształt cylindra określony jest [z równań (3.38)] następującymi funkcjami kąta ϑ :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} a(\vartheta) &= 0,1630 + 0,0300 \cos 2\vartheta - \\ &\quad - 0,0110 \sin^2 2\vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) &= 1,0000 - 0,03000 \cos 2\vartheta - \\ &\quad - 0,0018 \sin^2 2\vartheta + \dots \end{aligned}$$

Na rysunku 3 przedstawiono znaleziony kształt cylindra, który, jak widać, posiada zważenia na grubości ścianki, pierwsze poprawki promieni mają bowiem przeciwne znaki (n nieparzyste). Rozkład naprężeń w przekrojach ścianki cylindra dla $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi/4$ i $\vartheta=\pi/2$ pokazano na rys. 4.



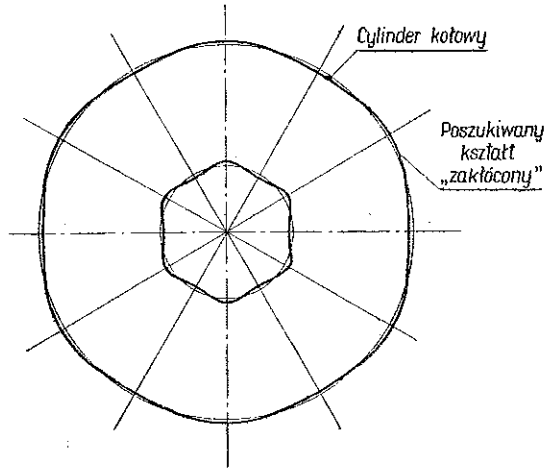
Rys. 3



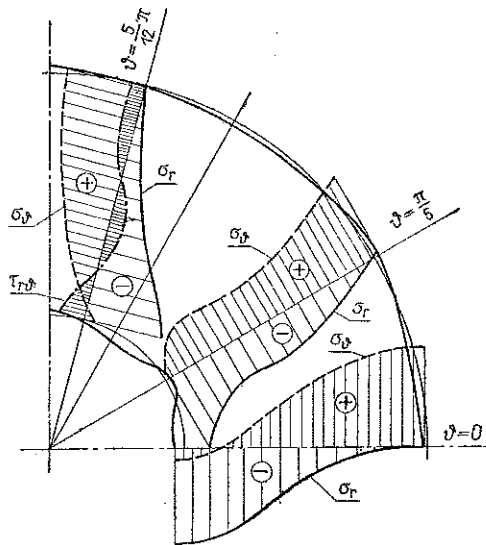
Rys. 4

Przykład 2. Przyjmujemy $\lambda=6$, $n=2$, $\alpha=0,12$, $b_0=1$. Z równości (3.18)₂ wynika teraz $a_0=0,3484$, a kształt cylindra określają następujące funkcje kąta ϑ :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} a(\vartheta) &= 0,3484 - 0,0200 \cos 6\vartheta - 0,0206 \sin^2 6\vartheta + \dots, \\ b(\vartheta) &= 1,0000 - 0,0200 \cos 6\vartheta - 0,0072 \sin^2 6\vartheta + \dots \end{aligned}$$



Rys. 5



Rys. 6

Znaleziony kształt pokazano na rys. 5, natomiast rozkład naprężeń w przekrojach $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi/6$ i $\vartheta=5\pi/12$ (co odpowiada przekrojowi $\vartheta=\pi/12$) pokazano na rys. 6.

Podane tu przykładowo kształty odpowiadają «zakłóconym» cylindrom kołowym tylko o pewnych oznaczonych wartościach stosunku a_0/b_0 .

Można stąd wysnuć wniosek, że całkowite uplastycznienie cylindrów niekołowych w stadium zniszczenia występuje niezmiernie rzadko; wniosek ten jest oczywiście związany z założeniem jedynie normalnych, równomiernych ciśnień na obu ściankach cylindra oraz, w pewnym stopniu, z zastosowaniem metody rozdzielania zmiennych, (3.6).

5. Siatki Hencky'ego-Prandtla

Aby uzyskać pewną graficzną interpretację rozwiązania, podamy jeszcze metodę określenia siatek Hencky'ego-Prandtla dla przekroju poprzecznego rozważanych cylindrów oraz naszkicujemy taką siatkę dla jednego z przykładów.

W przypadku płaskiego stanu odkształcenia rodziny charakterystyk tworzące siatki Hencky'ego-Prandtla pokrywają się z trajektoriami największych naprężeń stycznych τ_{\max} (por. np. R. HILL [3]). Trajektorie te określimy w sposób analityczny. Odpowiednie równanie różniczkowe we współrzędnych walcowych posiada mianowicie postać (W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI [5])

$$(5.1) \quad r'^2 (\sigma_\theta - \sigma_r) - 4\tau_{r\theta} r r' - r^2 (\sigma_\theta - \sigma_r) = 0.$$

Ponieważ składowe stanu naprężenia σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ określone są szeregami parametru $\bar{\alpha}$ (3.40), równanie (5.1) rozwiążemy również metodą małego parametru. Założymy mianowicie, że

$$(5.2) \quad r = r(\vartheta) = r_0(\vartheta) + r_1(\vartheta)\bar{\alpha} + r_2(\vartheta)\bar{\alpha}^2 + \dots$$

Podstawiając do równania (5.1) rozwinięcia (3.40) i (5.2) otrzymujemy

$$(5.3) \quad (r_0'^2 + 2r_0' r_1' \bar{\alpha} + \dots) \left(\frac{2Q}{\sqrt{3}} + \dots \right) - 4 \left\{ \frac{2Q}{\sqrt{3}} \bar{\alpha} \cos \left[\sqrt{\lambda^2 - 1} \left(\ln \frac{r_0}{b_0} + \frac{r_1}{r_0} \bar{\alpha} + \dots \right) \right] \sin(\lambda\vartheta) - \dots \right\} (r_0' + r_1' \bar{\alpha} + \dots) - (r_0^2 + 2r_0 r_1 \bar{\alpha} + \dots) \left(\frac{2Q}{\sqrt{3}} + \dots \right) = 0,$$

gdzie pozostawiono efektywne wyrazy rzędu zerowego i pierwszego ze względu na mały parametr $\bar{\alpha}$. Porównując w równaniu (5.3) współczynniki przy $\bar{\alpha}$, otrzymujemy dla zerowego przybliżenia równanie:

$$(5.4) \quad r_0'^2 - r_0^2 = 0,$$

z którego wynika, że $r_0' = \pm r_0$. Zatem po rozwiązaniu określimy w zerowym przybliżeniu dwie rodziny charakterystyk wzorami:

$$(5.5) \quad r_0 = C_0 e^{\pm\vartheta} = \begin{cases} C_{01} e^\vartheta \\ C_{02} e^{-\vartheta} \end{cases}.$$

Są to dwie ortogonalne rodziny spirali logarytmicznych dla stanów kołowo-symetrycznych, w szczególności dla cylindra grubościennego (por. np. W. W. SOKOŁOWSKI [12]).

Dla pierwszego przybliżenia [z porównania w równaniu (5.3) współczynników przy $\bar{\alpha}^1$] otrzymujemy następujące równanie niejednorodne:

$$(5.6) \quad r'_0 r'_1 - r_0 r_1 = 2r'_0 \cos \left(\sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{r_0}{b_0} \right) \sin(\lambda \vartheta).$$

Zakładając najpierw, że $r_0 = C_{01} e^{+\vartheta}$, otrzymujemy metodą wariacji stałej rozwiązanie równania (5.6) w postaci:

$$(5.7) \quad r_1 = \frac{1}{2\lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left\{ -\sin \left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta + \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{01}}{b_0} \right] - \right. \\ \left. - (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos \left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta + \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{01}}{b_0} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{2\lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left\{ -\sin \left[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta - \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{01}}{b_0} \right] - \right. \\ \left. - (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos \left[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta - \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{01}}{b_0} \right] \right\} + C_{11} e^\vartheta.$$

Zakładając dalej, że $r_0 = C_{02} e^{-\vartheta}$, otrzymujemy podobnie drugie rozwiązanie równania (5.6) w postaci:

$$(5.8) \quad r_1 = \frac{1}{2\lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left\{ \sin \left[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta + \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{02}}{b_0} \right] - \right. \\ \left. - (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos \left[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta + \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{02}}{b_0} \right] \right\} + \\ + \frac{1}{2\lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left\{ \sin \left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta - \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{02}}{b_0} \right] - \right. \\ \left. - (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos \left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta - \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{02}}{b_0} \right] \right\} + C_{12} e^{-\vartheta}.$$

Przybliżonymi rozwiązaniami równania (5.1) będą więc dwie rodziny charakterystyk opisane następującymi równaniami:

$$(5.9) \quad r = C_{01} e^\vartheta + \frac{\bar{\alpha}}{2\lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left\{ -\sin \left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta + \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{01}}{b_0} \right] - \right. \\ \left. - (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos \left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta + \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{01}}{b_0} \right] \right\} + \\ + \frac{\bar{\alpha}}{2\lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left\{ -\sin \left[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta - \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{01}}{b_0} \right] - \right. \\ \left. - (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos \left[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta - \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{01}}{b_0} \right] \right\} + C_{11} e^\vartheta \bar{\alpha} + \dots$$

oraz

$$(5.10) \quad r = C_{02} e^{-\vartheta} + \frac{\bar{\alpha}}{2\lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left\{ \sin \left[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta + \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{02}}{b_0} \right] - \right. \\ \left. - (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos \left[(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta + \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{02}}{b_0} \right] \right\} + \\ + \frac{\bar{\alpha}}{2\lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left\{ \sin \left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta - \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{02}}{b_0} \right] - \right. \\ \left. - (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos \left[(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \vartheta - \sqrt{\lambda^2 - 1} \ln \frac{C_{02}}{b_0} \right] \right\} + C_{12} e^{-\vartheta} \bar{\alpha} + \dots$$

Występujące w równaniach (5.9) i (5.10) stałe wyznaczmy z warunków brzegowych przez parametr danej rodziny charakterystyk. Za parametr ten przyjmiemy kąt ϑ_0 , wyznaczający punkt przecięcia charakterystyki z zewnętrznym konturem niekołowego cylindra. Założymy mianowicie, że na konturze wewnętrznym dla ustalonego kąta $\vartheta = \vartheta_0$

$$(5.11) \quad r(\vartheta_0) = a(\vartheta_0),$$

gdzie $a(\vartheta_0)$ jest promieniem wewnętrznym określonym pierwszym równaniem spośród równań (3.46). Warunek ten jest następujący:

$$(5.12) \quad r_0(\vartheta_0) + r_1(\vartheta_0) \bar{\alpha} + \dots = a_0 + (-1)^{n+1} \frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \cos(\lambda \vartheta_0) + \dots$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach $\bar{\alpha}$ w równaniu (5.12), otrzymujemy warunki określające stałe C_i , $i=0, 1, 2, \dots$ dla obu rodzin charakterystyk. Są to równania

$$(5.13) \quad r_0(\vartheta_0) = a_0,$$

$$(5.14) \quad r_1(\vartheta_0) = (-1)^{n+1} \frac{\cos(\lambda \vartheta_0)}{\lambda},$$

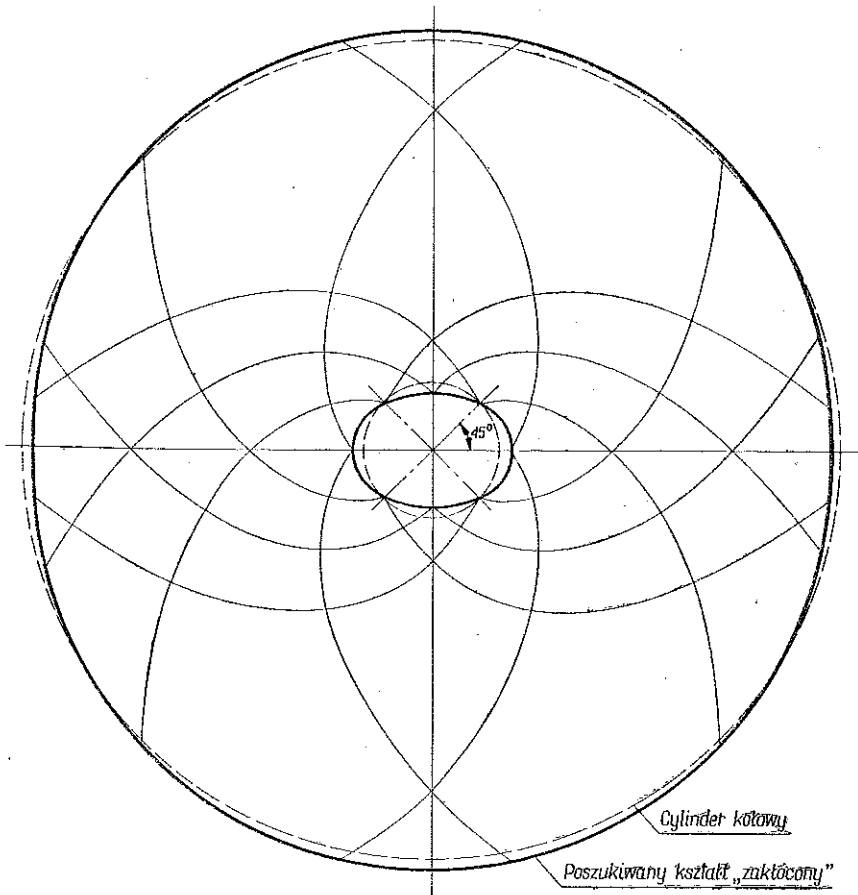
.....

Dla rodziny charakterystyk (5.9) otrzymujemy następujące formuły na stałe C_{01} , C_{11}, \dots :

$$(5.15) \quad C_{01} = a_0 e^{-\vartheta_0}, \\ C_{11} = (-1)^{n+1} \frac{e^{-\vartheta_0}}{\lambda} \cos(\lambda \vartheta_0) + \frac{e^{-\vartheta_0}}{2\lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left[\sin(\lambda \vartheta_0 - n\pi) + \right. \\ \left. + (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos(\lambda \vartheta_0 - n\pi) \right] + \frac{e^{-\vartheta_0}}{2\lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})} \left[\sin(\lambda \vartheta_0 + n\pi) + \right. \\ \left. + (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos(\lambda \vartheta_0 + n\pi) \right], \\ \dots$$

Dla rodziny charakterystyk (5.10) stałe C_{02}, C_{12}, \dots określone są następująco:

$$(5.16) \quad \begin{aligned} C_{02} &= a_0 e^{\vartheta_0}, \\ C_{12} &= (-1)^{n+1} \frac{e^{\vartheta_0}}{\lambda} \cos(\lambda \vartheta_0) + \frac{e^{\vartheta_0}}{2\lambda(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1})} [-\sin(\lambda \vartheta_0 - n\pi) + \\ &+ (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos(\lambda \vartheta_0 - n\pi)] + \frac{e^{\vartheta_0}}{2\lambda(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})} [-\sin(\lambda \vartheta_0 + n\pi) + \\ &+ (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \cos(\lambda \vartheta_0 + n\pi)], \\ &\dots \end{aligned}$$



Rys. 7

Szczegółowo przeanalizujemy przykład I z p. 4. Przyjmijmy mianowicie: $\lambda=2$, $n=1$, $\bar{\alpha}=0,06$, $b_0=1$. Rysunek 7 pokazuje dla tego przykładu przybliżoną siatkę Hencky'ego-Prandtla (z dokładnością do pierwszego przybliżenia), przy czym charakterystyki przecinają kontur wewnętrzny cylindra w punktach $\vartheta_0=0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \dots$

Zgodnie z przewidywaniami charakterystyki te przecinają z dość dużą dokładnością niekołowy kontur cylindra pod kątem 45° i są wzajemnie ortogonalne.

Literatura cytowana w tekście

1. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Design for minimum weight*, Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mech., 5 Brussels 1956, 212 – 222.
2. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 15 (1957), 269 – 281.
3. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford Univ. Press, 1950.
4. Д. Д. Ивлев, *Приближенное решение методом малого параметра плоских упруго-пластических задач теории идеальной пластичности*, Вестник Моск. Унив., № 5, 1957, 17 – 26.
5. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność — wybór zadań i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
6. Z. MRÓZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 19 (1961), 127 – 135.
7. Z. MRÓZ, *Limit analysis of plastic structures subject to boundary variations*, Arch. Mech. Stos., 1, 15 (1963), 63 – 76.
8. W. OLSZAK, Z. MRÓZ, P. PERZYNA, *Recent trends in the development of the theory of plasticity*, Pergamon Press — PWN, Oxford — Warszawa 1963.
9. М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро, *Теория оптимального проектирования в строительной механике, теории упругости и пластичности*, Итоги Науки, Механика, Упругость и пластичность 1964, Москва 1966.
10. C. Y. SHEU, W. PRAGER, *Recent developments in optimal structural design*, Appl. Mech. Reviews, 10, 21 (1968), 985 – 992.
11. J. SKRZYPEK, M. ŻYCZKOWSKI, *Non-symmetrical plastic collapse modes of a symmetrically loaded circular cylinder*, Acta Mechanica, 2 – 3, 7 (1969), 213 – 223.
12. В. В. Соколовский, *Теория пластичности*, Гостехиздат, Москва 1950; tłum. pol.: PWN, Warszawa 1957.
13. A. J. M. SPENCER, *Perturbation methods in plasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 3, 9 (1961), 279 – 288; 1, 10 (1962), 17 – 26; 2, 10 (1962), 165 – 177.
14. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures*, Appl. Mech. Rev., 5, 16 (1963), 341 – 350.

Резюме

ПРОЕКТИРОВАНИЕ НЕКРУГОВЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ
ПРОЯВЛЯЮЩИХ, В СТАДИИ РАЗРУШЕНИЯ,
ПОЛНОЕ ПРИВЕДЕНИЕ В ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

В настоящей работе обсуждается вопрос определения формы некруговых толстостенных цилиндров, проявляющих полное приведение в пластическое состояние под действием постоянных внешнего и внутреннего давлений.

Рассматривается толстостенный цилиндр с переменными радиусами $a(\vartheta)$ и $b(\vartheta)$ в виде ряда параметра α , характеризующего некруговое сечение цилиндра [формулы (3.1)]. Предполагая плоское деформированное состояние и несжимаемость материала, определяя напряженное состояние в цилиндрической координатной системе тремя составляющими σ_r , σ_ϑ и $\tau_{r\vartheta}$, которые удовлетворяют двум уравнениям внутреннего равновесия (2.1) и условию пластичности (2.2).

Применяя метод малого параметра (напряжения σ_r , σ_ϑ и $\tau_{r\vartheta}$ разлагаются в ряды параметра α) получено для первого приближения задачу собственных значений. Условие, для существования ненулевых решений, определило двойную последовательность отношений размеров цилиндра [формулы (3.25)].

В пункте 3.6 дается сопоставление полученных формул с точностью второго приближения. Именно, формулы (3.46) определяют форму цилиндра, как функцию угла ϑ , тогда как формулы (3.48) определяют составляющие напряженного состояния как функцию угла ϑ и радиуса r .

В пункте 4, дается точный анализ двух числовых примеров, тогда как в пункте 5 предлагается метод определения сеток Генки-Прандтля, для рассматриваемых цилиндров, а для одного из особых случаев дается рисунок такой сетки.

Summary

THE SHAPING OF NON-CIRCULAR THICK-WALLED CYLINDERS SHOWING FULL PLASTICIZATION IN THE STAGE OF COLLAPSE

This paper deals with the problem of seeking the shapes of non-circular thick-walled cylinders which indicate full plasticization upon reaching the limiting load capacity, under a constant external and internal pressure.

A thick-walled cylinder is considered with variable radii $a(\vartheta)$ and $b(\vartheta)$ in the form of a series of the parameter α which characterizes the non-circularity of the cylinder [formulae (3.1)]. Assuming a plane state of deformation and incompressibility of the material, the state of stress is determined in cylindrical coordinates by means of three components σ_r , σ_ϑ and $\tau_{r\vartheta}$, satisfying two equations of internal equilibrium (2.1) and the condition of plasticity (2.2).

Using the small parameters method (the stresses σ_r , σ_ϑ , and $\tau_{r\vartheta}$ were expanded into a series of the parameter α), the problem of eigenvalues is obtained in the first approximation. The condition for the existence of non-zero solutions is determined by the double sequence of the ratios of the cylinder dimensions [formulae (3.25)].

In paragraph 3.6 a compilation is given of the obtained formulae with an accuracy to the second approximation. Namely, the formulae (3.46) determine the shape of the cylinder as a function of the angle ϑ , whilst formulae (3.48) determine the components of the state of stress as a function of the angle ϑ and radius r .

Two numerical examples are analyzed in detail in p. 4, whilst in 5 the method is given of determining the Hencky-Prandtl nets for the cylinders under consideration, and such a net is shown in one of the particular cases.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 października 1969 r.