

PEŁZANIE WIOTKICH OBROTOWO-SYMETRYCZNYCH POWŁOK NIESPREŻYSTYCH W ZAKRESIE SKOŃCZONYCH ODKSZTAŁCEN

JÓZEF WILK (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Przyjęcie odpowiedniego prawa pełzania dla materiału powłoki, wykazującego własności reologiczne, stwarza znaczne trudności. Obok komplikacji natury matematycznej brakuje doświadczalnej weryfikacji fizycznych związków teorii pełzania przy dużych odkształceniach. Próbę taką (dla aluminiowej powłoki walcowej w złożonym stanie naprężenia) podjęli J. MARIN, F. H. FAUPEL i J. W. HU [8]. Stwierdzili oni, że rzeczywiste wartości prędkości odkształceń i naprężeń są w dostatecznym stopniu zgodne z wynikami teorii ustalonego płynięcia. Również w zakresie teoretycznych rozważań, dotyczących pełzania powłok, istniejąca szeroka literatura poświęcona jest niemal wyłącznie małym odkształceniom. Natomiast pełzaniu powłok w stanie bezmomentowym, gdzie dopuszcza się duże przemieszczenia, poświęcono zaledwie parę prac. Sz. M. KAC [3], F. P. J. RIMROTT [17] i Ł. M. KACZANOW [4] rozwiązali, opierając się na teorii ustalonego płynięcia i przyjmując prawo potęgowe, kilka najprostszych przypadków takich, jak powłoka sferyczna i nieskończenie długa powłoka cylindryczna, obciążona stałym ciśnieniem wewnętrznym. F. P. J. RIMROTT [19] rozpatrzył również pełzanie wirującej powłoki walcowej, obciążonej siłami inercji, a M. I. ROZOWSKI [20] rozwiązał przypadek powłoki sferycznej lecz przy przyjęciu prawa nieustalonego płynięcia wg Ju. N. RABOTNOWA [15]. Dowolną osiowo-symetryczną powłokę obciążoną stałym ciśnieniem wewnętrznym i siłą osiową rozważył Ł. M. KACZANOW [6 i 7]. Przy zastosowaniu fizycznych związków teorii ustalonego pełzania otrzymał on układ sześciu nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, opisujących formę powłoki, stan naprężeń i odkształceń oraz zaproponował numeryczną metodę rozwiązywania. Sposób ten w świetle pracy J. ORKISZA [13] nie jest jednak poprawny ze względu na to, że rozkład charakterystyk układu równań Ł. M. KACZANOWA nie pokrywa się z liniami, wzdłuż których poszukuje on rozwiązania. Ten sam temat podejmuje J. ORKISZ w pracach [12 i 13] opierając się na szerszych założeniach (dowolne obciążenie, zmienna grubość powłoki oraz strefa fałdów) otrzymując układ równań różniczkowych powłoki prostszy niż odpowiedni układ podany przez Ł. M. KACZANOWA.

Ponadto w pracach J. ORKISZA sformułowany został problem pełzania wiotkich powłok na podstawie teorii starzenia i uogólnionej teorii nieustalonego płynięcia.

Zaproponował on również pewien numeryczny sposób rozwiązywania, lecz w żadnym z tych przypadków nie otrzymał konkretnych rozwiązań. Dlatego przeprowadzona tam analiza stateczności wiotkich powłok w procesie pełzania może odnosić się jedynie do elementarnych przypadków, dla których znane są rozwiązania ścisłe.

Celem niniejszej pracy jest, nawiązując bezpośrednio do pracy [14], podanie numerycznej metody rozwiązania układów równań różniczkowych wyprowadzonych w pracy [13], opracowanie algorytmów, schematów blokowych obliczeń, wykonanie uniwersalnych programów na elektroniczną maszynę cyfrową oraz uzyskanie tym sposobem szeregu wyników liczbowych. Wyniki obliczeń zilustrują zachowanie się powłok ze szczególnym uwzględnieniem problemu stateczności, rozwiązanych wg różnych teorii pełzania.

2. Teoria starzenia

Rozpatrzmy wiotką, osiowo-symetryczną powłokę (rys. 1), która obciążona statycznie w chwili $t=0$ ulega natychmiastowym odkształceniom plastycznym [11], a następnie zaczyna pełzać wg prawa teorii starzenia. Zakładając nieściśliwość materiału, związki fizyczne przyjęto w postaci

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1^c &= \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \Phi^c, & \varepsilon_2^c &= \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_1) \right] \Phi^c, \\ \varepsilon_3^c &= \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \Phi^c, \end{aligned}$$

gdzie σ_j i ε_j dla $j=1, 2, 3$ oznaczają rzeczywiste wielkości naprężeń i odkształceń liczonych w mierze logarytmicznej. Funkcję $\Phi^c = \Phi^c(\sigma_1, t)$ określa wzięta z doświadczenia zależność

$$(2.2) \quad \varepsilon_i^c = \Phi^c(\sigma_1, t) \sigma_i,$$

przy czym σ_i i ε_i oznaczają intensywności rzeczywistych naprężeń i odkształceń. Symbol ε_j^c wyraża tę część całkowitego odkształcenia ε_j , która spowodowana jest pełzaniem. Pozostałą część, która powstała w wyniku natychmiastowych odkształceń plastycznych, oznaczono przez ε_j^p . Jeżeli pominiemy odkształcenia sprężyste jako małe, to

$$(2.3) \quad \varepsilon_j = \varepsilon_j^p + \varepsilon_j^c.$$

W płaskim stanie naprężenia, gdy $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$, związki (2.1) oraz równania geometryczne i równania równowagi podane w pracy [11] dają się sprowadzić do układu czterech równań różniczkowych zwyczajnych:

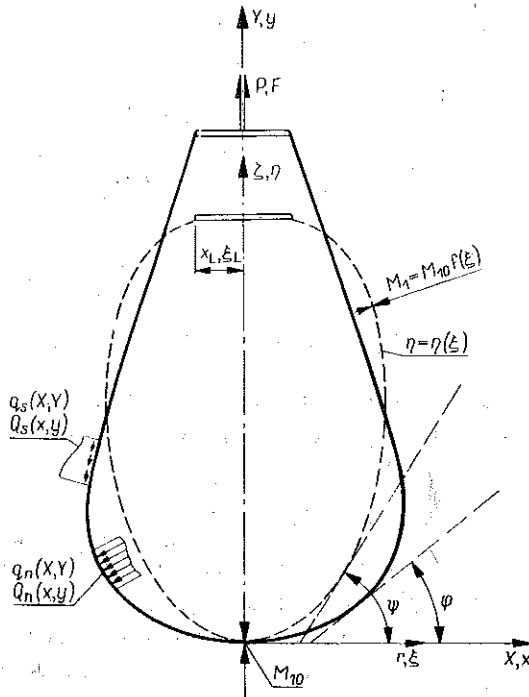
$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{dp_1}{d\xi} &= \frac{1}{W} (c_1 b_2 - c_2 b_1), & \frac{d\varphi}{d\xi} &= \frac{\xi (xQ_n - fp_2 u \sin \varphi)}{fp_1 u^2 x^2 \cos \psi}, \\ \frac{dp_2}{d\xi} &= \frac{1}{W} (a_1 c_2 + a_2 c_1), & \frac{dy}{d\xi} &= \frac{\xi \sin \varphi}{ux \cos \psi}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.5) \quad x = \xi e^{\alpha(2p_2 - p_1)}, \quad u = e^{-\alpha c(p_1 + p_2)},$$

a ponadto

$$(2.6) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{\varkappa'}{2p_1} (2p_2 - p_1) (2p_1 - p_2) - \varkappa, & c_1 &= \frac{\xi}{ux^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} - \frac{1}{\xi}, \\ b_1 &= \frac{\varkappa'}{2p_1} (2p_2 - p_1)^2 + 2x, & c_2 &= \frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} - \left(\frac{p_2 - p_1}{p_1} + \frac{xQ_s}{fp_1 u \cos \varphi} \right) \left(c_1 + \frac{1}{\xi} \right), \\ a_2 &= \frac{\varkappa'}{2p_1} (2p_1 - p_2) (p_1 + p_2) + \varkappa - \frac{1}{p_1}, & W &= \frac{b_1}{p_1} - 3\varkappa (\varkappa + p_1 \varkappa'), \\ b_2 &= \frac{\varkappa'}{2p_1} (2p_2 - p_1) (p_1 + p_2) + \varkappa, & \varkappa' &= \frac{dx}{dp_1}. \end{aligned}$$



Rys. 1

Dalej oznaczono:

$$(2.7) \quad \varkappa = \frac{1}{2} (p_1^{n-1} + k \tau p_1^{m-1}), \quad k = AT = \text{const}, \quad \tau = \frac{t}{T},$$

co wynika z przyjętych zależności potęgowych

$$(2.8) \quad \varepsilon_i^p = \left(\frac{\sigma_i}{M} \right)^n, \quad \varepsilon_i^e = At \left(\frac{\sigma_i}{M} \right)^m, \quad M = \text{const}.$$

Odształcenia główne wyrażają się przez pozostałe funkcje w następujący sposób:

$$(2.9) \quad \varepsilon_1 = \ln \frac{1}{dx/d\xi} \frac{\cos \psi}{\cos \varphi}, \quad \varepsilon_2 = \ln \frac{x}{\xi}, \quad \varepsilon_3 = \ln u,$$

gdzie $\psi = \psi(\xi)$ oznacza kąt zawarty między styczną do południka (przed odkształceniem) a osią x . Pozostałe wielkości (rys. 1) oznaczają: Q_n obciążenie liczone na jednostkę pola powierzchni, skierowane normalnie do ścianki powłoki oraz $f = f(\xi)$ funkcję opisującą zmianę grubości powłoki w stanie nieodkształconym. Wszystkie wyrażenia we wzorach (2.1)–(2.9) napisane są w wielkościach bezwymiarowych [11]. W równaniach (2.4) niewiadomymi są funkcje $y(\xi, \tau)$, $\varphi(\xi, \tau)$, $p_1(\xi, \tau)$ i $p_2(\xi, \tau)$, a różne typy warunków brzegowych [13] są takie same jak dla odkształceń natychmiastowych, lecz muszą być spełnione w każdej chwili τ . Bezwymiarowy czas τ występuje tu tylko jako parametar. Dla przypadku powłoki walcowej o skończonej długości warunki brzegowe można napisać następująco:

$$(2.10) \quad y(\eta_0) = 0, \quad x(\eta_k) = 1, \quad x(\eta_0) = 1, \quad p_1(\eta_0) = 2p_2(\eta_0).$$

W praktyce zamiast drugiego z warunków (2.10) ze względu na symetrię korzystamy z zależności $\varphi(\eta_k/2) = \pi/2$. Dla powłoki walcowej wygodniej jest również przyjąć zamiast współrzędnej ξ zmienną niezależną η .

Układ zwyczajnych równań różniczkowych (2.4) można napisać krótko:

$$(2.11) \quad \frac{dw_i}{d\xi} = b_i(\xi, w_j), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \\ \xi_0 \leq \xi \leq \xi_k,$$

gdzie przez $w_i = w_i(\xi)$ oznaczono funkcje poszukiwane, a przez $b_i(\xi, w_j)$ prawe strony odpowiednich równań. Zadanie opisane przez równania (2.11) jest typu brzegowego. Silna nieliniowość funkcji $b_i(\xi, w_j)$ uniemożliwia uzyskanie rozwiązania ścisłego oraz przekreśla możliwości stosowania tych metod różnicowych, które polegają na sprowadzeniu zagadnienia do rozwiązania układu równań algebraicznych z niewiadomymi wartościami funkcji $w_i(\xi_k)$ w punktach pośrednich ξ przedziału (ξ_0, ξ_k) . Z drugiej strony różne metody sukcesywnego całkowania (krok po kroku) tych równań można stosować do rozwiązywania zadań typu początkowego. Decydując się na wykorzystanie tej ostatniej metody musimy dodatkowo przyjąć brakujące warunki na brzegu $\xi = \xi_0$, tak aby znane były wartości wszystkich funkcji $w_i(\xi_0)$. Ponieważ w tym przypadku nie będą na ogół spełnione warunki brzegowe dla $\xi = \xi_k$, to rozwiązanie równań (2.4) trzeba prowadzić metodą półodwrotną, dobierając wartości dodatkowych parametrów początkowych aż do spełnienia (z żadaną dokładnością) danych warunków na drugim brzegu. W tym celu został opracowany odpowiedni algorytm obliczeń oraz program na maszynę cyfrową Odra 1013.

3. Teoria ustalonego pełzania uogólniona na skończone odkształcenia

Równania teorii ustalonego płynięcia przyjmujemy w postaci [13]

$$(3.1) \quad \dot{\varepsilon}_1^c = \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \Phi^c, \quad \dot{\varepsilon}_2^c = \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \Phi^c, \\ \dot{\varepsilon}_3^c = \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \Phi^c,$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_j^c$ dla $j=1, 2, 3$ są to prędkości odkształceń głównych przy pełzaniu. Dalej zachowany jest związek (2.3), a ponadto zakładamy, że $\dot{\varepsilon}_j^c = \text{const}$, czyli że

$$(3.2) \quad \dot{\varepsilon}_j = \varepsilon_j^c, \quad j=1, 2, 3.$$

Funkcję Φ^c możemy określić na podstawie doświadczalnie ustalonego związku

$$(3.3) \quad \dot{\varepsilon}_i = \Phi^c(\sigma_i) \sigma_i,$$

który przyjmuje się najczęściej w formie funkcji potęgowej

$$(3.4) \quad \dot{\varepsilon}_i = A \sigma_i^m, \quad A = \text{const},$$

przy czym

$$(3.5) \quad \dot{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_1^c - \dot{\varepsilon}_2^c)^2 + (\dot{\varepsilon}_2^c - \dot{\varepsilon}_3^c)^2 + (\dot{\varepsilon}_3^c - \dot{\varepsilon}_1^c)^2}$$

jest intensywnością prędkości rzeczywistych odkształceń.

Rozważamy przypadek, gdy $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 = 0$, oraz posługujemy się podwójnym układem współrzędnych: materialnych ξ, τ i przestrzennych, x, τ . Związki fizyczne (3.3) oraz równania geometryczne i równowagi, które przyjmujemy w takiej samej postaci, jak dla odkształceń natychmiastowych, można sprowadzić do układu sześciu quasi-liniowych równań różniczkowych cząstkowych:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial \xi} + \frac{p_1}{u} \frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{ux^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left(p_2 - p_1 + \frac{x Q_s}{fu \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\xi}{p_1 ux \cos \psi} \left(\frac{Q_u}{fu} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right), \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} &= xg(p_i)(2p_2 - p_1), & \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -ug(p_i)(p_1 + p_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.7) \quad g(p_i) = \frac{1}{2} k p_i^{m-1}, \quad k = ATM^m = \text{const}.$$

Niewiadomymi są tu funkcje $x(\xi, \tau)$, $y(\xi, \tau)$, $\varphi(\xi, \tau)$, $u(\xi, \tau)$, $p_1(\xi, \tau)$ i $p_2(\xi, \tau)$. W szczególnym przypadku, gdy $Q_s = 0$ i $Q_u = Q = \text{const}$, czwarte z równań (3.6) można scałkować efektywnie i rozwiązanie przedstawić w postaci

$$(3.8) \quad \sin \varphi = \frac{xQ}{2fp_1 u}.$$

Rozwiązanie zadań opartych na teorii ustalonego pełzania wymaga określenia stanu wyjściowego powłoki, opisanego przez warunki początkowe dla $t=0$

$$(3.9) \quad x = (\xi, 0) = x_*(\xi), \quad u(\xi, 0) = u_*(\xi), \quad p_1(\xi, 0) = p_{1*}(\xi), \quad p_2(\xi, 0) = p_{2*}(\xi).$$

W naszym przypadku można to uczynić rozwiązując zagadnienie powłoki w taki sposób jak dla odkształceń natychmiastowych lub dla związków fizycznych teorii płynięcia plastycznego [14].

Proponowana numeryczna metoda rozwiązania układu równań (3.6) łączy w sobie elementy metody charakterystyk oraz tzw. «metody prostych» [1, 10 i 14] i polega na sprowadzeniu układu równań cząstkowych do dwóch układów równań różniczkowych zwyczajnych, które dalej możemy rozwiązywać ściśle lub też jedną ze znanych metod numerycznych. Sposób tego sprowadzenia jest uzależniony od rozkładu charakterystyk rozpatrywanego układu równań.

Przystępując do numerycznego całkowania należy więc określić typ równań, znaleźć rozkład charakterystyk (jeśli istnieją) oraz ustalić rodzaj warunków brzegowych.

Rozkład charakterystyk dla układu (3.6) określimy [10] z warunku zerowania się wyznacznika

$$(3.10) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{\xi} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{\tau} \\ 0 & \lambda_{\xi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \lambda_{\xi} & c_3 \lambda_{\xi} & c_2 \lambda_{\xi} \\ 0 & 0 & \frac{p_1}{u} \lambda_{\xi} & \lambda_{\tau} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\xi} & 0 & 0 \end{vmatrix} = c_2 \lambda_{\xi}^4 \lambda_{\tau}.$$

Określając na jego podstawie wektory własne $\bar{\lambda}_I^*(\lambda_{\xi}, 0)$ i $\bar{\lambda}_{II}^*(0, \lambda_{\tau})$ (czterokrotny stwierdzamy, że równania (3.6) stanowią pewien szczególny quasi-liniowy układ hiperboliczny, którego charakterystykami są linie $\xi = \text{const}$ oraz $\tau = \text{const}$ (czterokrotna), co wynika z przyjęcia współrzędnej Lagrange'a ξ (a nie x) jako zmiennej niezależnej.

Warunki zgodności na charakterystyce $\xi = \text{const}$ sprowadzają się do równania

$$(3.11) \quad \frac{du}{d\tau} = -ug(p_1)(p_1 + p_2).$$

Podobnie dla drugiego kierunku charakterystycznego ($\tau = \text{const}$) otrzymamy równania

$$(3.12) \quad \frac{dx}{d\xi} = \frac{\xi}{ux} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{\xi}{ux} \frac{\sin \varphi}{\cos \psi},$$

$$\frac{dp_1}{d\xi} + \frac{p_1}{u} \frac{du}{d\xi} = \frac{\xi}{ux^2} \frac{\cos \varphi}{\cos \psi} \left(p_2 - p_1 + \frac{xQ}{fu \cos \varphi} \right) - \frac{p_1}{f} \frac{df}{d\xi},$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\xi}{p_1 ux \cos \psi} \left(\frac{Qn}{fu} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right).$$

Ostatnie równanie, które pozostaje z układu (3.6),

$$(3.13) \quad \frac{dx}{d\tau} = xg(p_1)(2p_2 - p_1),$$

stanowi już tylko algebraiczny związek ze względu na niewiadomą funkcję $p_2(\xi, \tau)$. W ten sposób zamieniliśmy układ równań (3.6) na jedno równanie algebraiczne oraz dwie grupy równań różniczkowych zwyczajnych. Z postaci warunków zgodności wynika, że funkcję u możemy wyznaczyć z równania (3.11), funkcję x, y, φ, p_1 z (3.12), a p_2 z algebraicznego związku (3.13). Rozwiązanie prowadzimy na drodze numerycznej z tym zastrzeżeniem, że do całkowania równań (3.12) stosujemy metodę Rungego-Kutty (prowadząc obliczenia metodą półodwrotną), a do równań (3.11) ulepszoną metodę Eulera. Całkowanie równań oparte na metodzie Rungego-Kutty jest bardzo wygodne do przeprowadzenia mechanizacji rachunków, umożliwia zmianę kroku całkowania oraz zapewnia stosunkowo dużą dokładność [9].

Obszar całkowania $D(\xi, \tau)$ podzielimy na L części za pomocą linii $\tau = \tau_j = \text{const}$, $j=0, 1, 2, \dots, L$, przeprowadzonych w jednakowych odstępach $\Delta\tau = \tau_j - \tau_{j-1}$, oraz na $2k$ części za pomocą linii $\xi = \xi_i = \text{const}$, $i=0, 1, 2, \dots, 2k$, przeprowadzonych w równych odstępach $(1/2) \Delta\xi = (1/2)(\xi_i - \xi_{i-2})$. Dla uproszczenia zapisu wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$(3.14) \quad B = \frac{\xi \cos \varphi}{ux \cos \psi} = \frac{dx}{d\xi}, \quad C = \frac{B}{p_1 \cos \varphi} \left(\frac{Q_n}{fu} - \frac{p_2}{x} \sin \varphi \right) = \frac{d\varphi}{d\xi},$$

$$D = \frac{B}{u} \left(p_2 - p_1 + \frac{xQ_s}{fu \cos \varphi} \right) - p_1 \left(\frac{1}{f} \frac{df}{d\xi} + \frac{1}{u} \frac{du}{d\xi} \right) = \frac{dp_1}{d\xi},$$

$$E = B \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{d\xi}.$$

W przypadku ogólnym funkcję p_2 będziemy wyznaczać jako rozwiązanie równania przestępnego (3.13), stosując metodę iteracyjną:

$$(3.15) \quad F = F\left(p_1, p_2, \frac{dx}{d\tau}\right) = p_2.$$

Dalej oznaczamy

$$(3.16) \quad M_{ij} = \frac{1}{\Delta\tau} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} x_{i, j-s-1} \approx \left(\frac{dx}{d\tau} \right)_{ij},$$

$$L = \frac{1}{\Delta\xi} \sum_{r=0}^k \beta_{kr} u_{i-s-1, j} \approx \left(\frac{du}{d\xi} \right)_{i-2, j},$$

$$G = -ug(p_1)(p_1 + p_2) = \frac{du}{d\tau},$$

$$M_v(w)_{ij} = \gamma k_v(w)_{ij},$$

$$H(w)_{i-2, j} = \frac{1}{6} \sum_{r=1}^4 \omega k_v(w)_{i-r, j},$$

gdzie

$$(3.17) \quad k_v(w) = \frac{dw}{d\xi} \Delta\xi, \quad v=1, 2, 3, 4.$$

Wielkości $\gamma = \gamma(v)$ i $\omega = \omega(v)$ są współczynnikami występującymi we wzorach Rungego-Kutty [2, 9 i 14] i przybierają wartości dyskretne $1/2, 1/2, 1, 1$ oraz $1, 2, 2, 1$, podobnie jak wyrażenie $\alpha = \alpha(v) = 2, 1, 1, 0$. Przy uwzględnieniu wyżej podanych oznaczeń ostateczne wzory do obliczeń numerycznych przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}
 k_v(x)_{i-\alpha, j} &= B_{i-\alpha, j} \Delta \xi, & k_v(y)_{i-\alpha, j} &= E_{i-\alpha, j} \Delta \xi, \\
 k_v(\varphi)_{i-\alpha, j} &= C_{i-\alpha, j} \Delta \xi, & x_{i+2\gamma-2, j} &= x_{i-2, j} + M_v(x)_{i-\alpha, j}, \\
 y_{i+2\gamma-2, j} &= y_{i-2, j} + M_v(y)_{i-\alpha, j}, & \varphi_{i+2\gamma-2, j} &= \varphi_{i-2, j} + M_v(\varphi)_{i-\alpha, j}, \\
 (3.18) \quad u_{i+2\gamma-2, j} &= u_{i+2\gamma-2, j-2} + \Delta \tau G_{i+2\gamma-2, j-1}, & \left(\frac{du}{d\xi} \right)_{j-\alpha, j} &= L_{i-\alpha, j}, \\
 k_v(p_1)_{i-\alpha, j} &= D_{i-\alpha, j} \Delta \xi, & (p_1)_{i+2\gamma-2, j} &= (p_1)_{i-2, j} + M_v(p_1)_{i-\alpha, j}, \\
 (p_2)_{i+2\gamma-2, j} &= F(p_1, p_2, M)_{i+2\gamma-2, j}, & \left(\frac{du}{d\tau} \right)_{i+2\gamma-2, j} &= G_{i+2\gamma-2, j}.
 \end{aligned}$$

Po uzyskaniu wyników otrzymanych za pomocą wzorów (3.18) dla $v=1, 2, 3, 4$ obliczamy wartości poszukiwanych funkcji w punkcie (ξ_i, τ_j) korzystając ze wzorów

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &= x_{i-2, j} + H(x)_{i-2, j}, & y_{ij} &= y_{i-2, j} + H(y)_{i-2, j}, \\
 \varphi_{ij} &= \varphi_{i-2, j} + H(\varphi)_{i-2, j}, & u_{ij} &= u_{i, j-2} + \Delta \tau G_{i, j-1}, \\
 (3.19) \quad (p_1)_{ij} &= (p_1)_{i-2, j} + H(p_1)_{i-2, j}, & (p_2)_{ij} &= F(p_1, p_2, M)_{ij}, \\
 & & \left(\frac{du}{d\tau} \right)_{ij} &= G_{ij},
 \end{aligned}$$

po czym przechodzimy do punktów $(\xi_{i+2}, \tau_j), (\xi_{i+4}, \tau_j), \dots, (\xi_{2k}, \tau_j)$, a potem na linii $\tau_{j+1} = \text{const}, \tau_{j+2} = \text{const}, \dots, \tau_L = \text{const}$ dopóty, dopóki nie skonstruujemy rozwiązania w całym obszarze $D(\xi, \tau)$.

Autor opracował schemat blokowy algorytmu obliczeń; sporządzony na jego podstawie program na maszynie cyfrową Odra-1013 umożliwia otrzymanie w stosunkowo krótkim czasie rozwiązania dla różnych powłok obrotowo-symetrycznych. Obliczenia przeprowadzimy dla przypadków powłok, dla których są postawione warunki brzegowe (2.10). Możemy wtedy przyjmować powłoki wyjściowe (warunki początkowe) w postaci wyników obliczeń zamieszczonych w pracy [14].

4. Teoria niustalonego pełzania

Podobnie jak poprzednio zakładamy, że w chwili $t=0$ w powłoce pojawiają się natychmiastowe odkształcenia plastyczne, a następnie powłoka zaczyna pełzać. Odkształcenia plastyczne ϵ_j^p nie są jednak ustalone w chwili $t=0$, lecz wraz z upływem czasu mogą się zmieniać. Jeśli nie uwzględnimy odkształceń sprężystych jako bardzo małych, to prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_j$ możemy teraz przedstawić za pomocą wzoru

$$(4.1) \quad \dot{\epsilon}_j = \dot{\epsilon}_j^p + \dot{\epsilon}_j^e, \quad j = 1, 2, 3.$$

Równocześnie zakładamy, że prędkości $\dot{\epsilon}_i^c$ podobnie jak i poprzednio określone są wzorami (3.1), przy czym wyznaczona doświadczalnie funkcja

$$(4.2) \quad \Phi^{(c)} = \Phi^{(c)}(\sigma_i, t),$$

zależy teraz nie tylko od intensywności rzeczywistych naprężeń σ_i , ale i od czasu t .

Równania pełzania napiszemy teraz następująco [13]:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \Phi \right\} + \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \Phi^{(c)}, \\ \dot{\epsilon}_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \Phi \right\} + \left[\sigma_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \right] \Phi^{(c)}, \\ \dot{\epsilon}_3 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \Phi \right\} + \left[\sigma_3 - \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \Phi^{(c)}. \end{aligned}$$

Układ równań różniczkowych, opisujących proces nieustalonego płynięcia powłoki w przypadku gdy $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$, będzie miał postać podobną do układu (3.6) z tym zastrzeżeniem, że zmianie ulegną dwa ostatnie, oparte na związkach fizycznych, równania:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \tau} - x a_1(p_1, p_2) \frac{\partial p_1}{\partial \tau} - x b_1(p_1, p_2) \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= x g(p_i, \tau) (2p_2 - p_1), \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + u a_2(p_1, p_2) \frac{\partial p_1}{\partial \tau} + u b_2(p_1, p_2) \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= -u g(p_i, \tau) (p_1 + p_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.5) \quad \begin{aligned} a_1 &= (2p_2 - p_1) (2p_1 - p_2) \frac{1}{2p_i} \frac{d\chi^p(p_i)}{dp_i} - \chi^p(p_i), \\ b_1 &= (2p_2 - p_1)^2 \frac{1}{2p_i} \frac{d\chi^p(p_i)}{dp_i} + 2\chi^p(p_i), \\ a_2 &= (p_1 + p_2) (2p_1 - p_2) \frac{1}{2p_i} \frac{d\chi^p(p_i)}{dp_i} + \chi^p(p_i), \\ b_2 &= (p_1 + p_2) (2p_2 - p_1) \frac{1}{2p_i} \frac{d\chi^p(p_i)}{dp_i} + \chi^p(p_i). \end{aligned}$$

Funkcje $\chi^p(p_i)$ i $g(p_i, \tau)$ określamy na podstawie (2.7); zwróćmy uwagę, że ostatnia zależy obecnie również od czasu τ .

Układ równań (4.4) posiada te same niewiadome funkcje, co układ (3.6). Zupełnie podobnie mogą być również postawione warunki brzegowe.

Proponowana metoda rozwiązania układu (4.4) będzie analogiczna do metody użytej przy rozwiązywaniu równań (3.6).

Obliczając wyznacznik układu równań (4.4)

$$(4.6) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{\xi} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{\tau} & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_1}{u} \lambda_{\xi} & 0 & 0 & \lambda_{\tau} \\ 0 & 0 & \lambda_{\xi} & 0 & -xa_1 \lambda_{\tau} & ua_2 \lambda_{\tau} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -xb_1 \lambda_{\tau} & ub_2 \lambda_{\tau} \end{vmatrix} = \lambda_{\xi}^4 \lambda_{\tau}^2 x [b_1 + p_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)] = 0,$$

wniosujemy, że jest to również układ hiperboliczny o charakterystykach $\xi = \text{const}$ (dwukrotna) i $\tau = \text{const}$ (czterokrotna).

Warunki zgodności na liniach $\xi = \text{const}$ są następujące:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} - xa_1 \frac{dp_1}{d\tau} - xb_1 \frac{dp_2}{d\tau} &= xg(p_1, \tau) (2p_2 - p_1), \\ \frac{du}{d\tau} + ua_2 \frac{dp_1}{d\tau} + ub_2 \frac{dp_2}{d\tau} &= -ug(p_1, \tau) (p_1 + p_2), \end{aligned}$$

natomiast na liniach $\tau = \text{const}$ są takie same jak w przypadku ustalonego pełzania (3.12), a więc możemy obliczać na ich podstawie niewiadome funkcje x, y, φ i p_1 . Pozostałe funkcje u i p_2 będziemy wyznaczać z równań (4.7), które w tym celu przekształcimy do postaci (4.8), eliminując z pierwszego z nich pochodną $dp_2/d\tau$, a z drugiego $dp_1/d\tau$:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= W \frac{u}{b_1} \frac{dp_1}{d\tau} - \frac{3u}{b_1} p_1 x^p(p_1) g(p_1, \tau) - \frac{b_2 u}{xb_1} \frac{dx}{d\tau}, \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \frac{3p_2}{W} x^p(p_1) g(p_1, \tau) - \frac{a_2}{Wx} \frac{dx}{d\tau} - \frac{a_1}{uW} \frac{du}{d\tau}, \end{aligned}$$

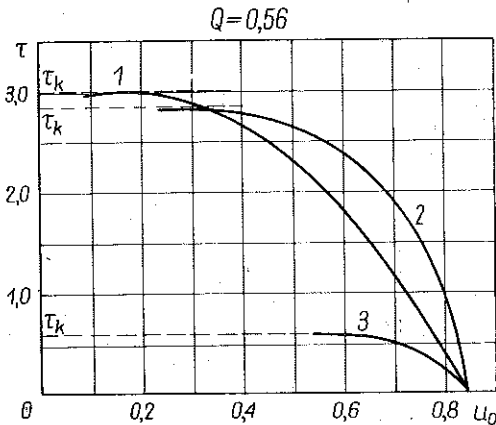
gdzie

$$(4.9) \quad W = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

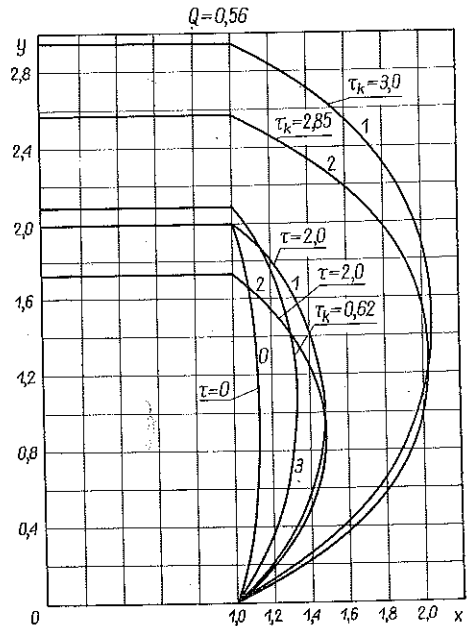
W dalszym ciągu posługujemy się wprowadzonym w poprzednim punkcie podziałem obszaru całkowania $D(\xi, \tau)$ oraz pozostawiamy przyjęte tam oznaczenia. Analogicznie do poprzednio omawianych przypadków sprowadzamy problem typu brzegowego do zagadnień początkowych zakładając na brzegu wyjściowym pewne dodatkowe warunki i rozwiązując zadanie metodą półdwrotną. W celu uzyskania rozwiązań liczbowych opracowano zmodyfikowaną wersję programu na maszynę cyfrową. Zasadnicza różnica w stosunku do programu rozwiązywania równań ustalonego pełzania dotyczy tylko podprogramu głównego.

5. Przykłady liczbowe

Obliczenia przeprowadzono dla przypadku powłoki o kształcie walca kołowego (w stanie nieodkształconym) o długości $\eta=2$, zakończonej dwoma sztywnymi swobodnie przesuwными denkami, obciążonej równomiernym parciem wewnętrznym. Ścianka powłoki nieobciążonej ma stałą grubość ($f=1$). Wyniki obliczeń przedstawione są na rysunkach 2-7. Na wszystkich tych rysunkach cyfrą 1 oznaczono krzywe odpowiadające teorii ustalonego pełzania, 2 — krzywe dla teorii nieustalonego płynięcia, 3 — dla teorii starzenia, a cyfrą 0 oznaczono stan powłoki wyjściowej. Rysunek 2 pokazuje, jakie wartości przybiera w zależności od czasu τ parametr u_0 (grubość powłoki przy denku). Równocześnie rzuca on światło na zagadnienie stateczności powłoki w procesie pełzania. Łatwo jest przewidzieć, że utrata stateczności powłoki obciążonej stałym ciśnieniem wewnętrznym może dopro-



Rys. 2



Rys. 3

wadzić do jej zniszczenia. Ł. M. KACZANOW [4, 5 i 7] oraz JU. N. RABOTNOW [16] wyróżniają dwa możliwe mechanizmy takiego zniszczenia: kruche i lepkie. W przypadku rozpatrywanych przez nas wiotkich powłok mamy do czynienia ze zniszczeniem lepkiem.

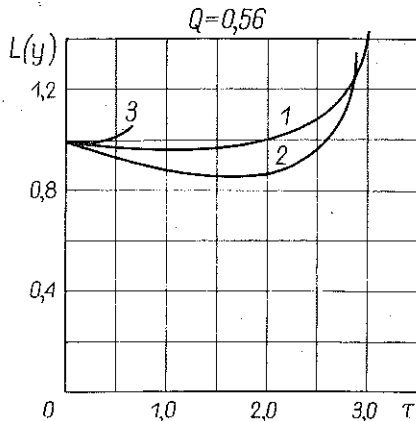
Charakteryzujemy go przez wprowadzenie pojęcia tzw. krytycznych wartości rozmiarów powłoki i krytycznego czasu τ_k , który możemy wyznaczyć z równania

$$(5.1) \quad \frac{d\tau}{dv} = 0;$$

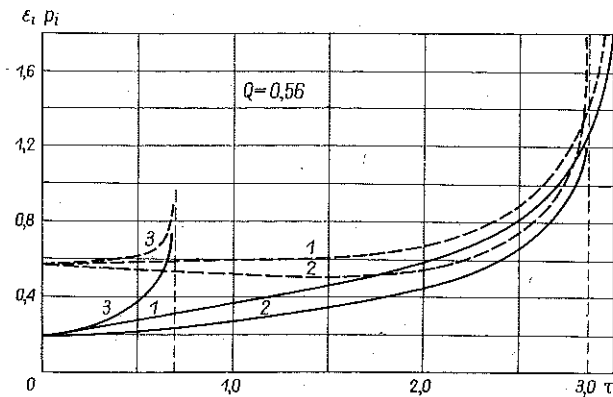
gdzie przez v oznaczamy parametr charakteryzujący wielkość odkształceń w powłoce.

W naszym przypadku, gdy możliwe są tylko numeryczne sposoby rozwiązywania, o tym, że powłoka traci stateczność, przekonujemy się dopiero w trakcie obliczeń, gdy w procesie całkowania przyrostowi $\Delta\tau$ towarzyszy gwałtowny wzrost odkształceń i przemieszczeń.

Rysunek 3 ilustruje zmianę formy powłoki w procesie pełzania. W miarę wzrostu czasu τ (aż do $\tau = \tau_k$) różnice w kształcie powłoki obliczanej w myśl równań (2.4), (3.6) i (4.4) znacznie się pogłębiają, przy czym dla przypadków 1 i 2 powłoka w istotny sposób zmienia swoje rozmiary początkowe. Podobny wniosek nasuwa analiza rys. 4, gdzie przedstawione są krzywe opisujące zmianę długości powłoki w zależności od czasu.



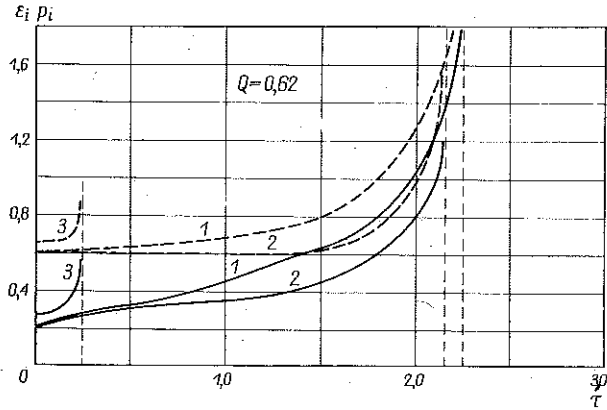
Rys. 4



Rys. 5

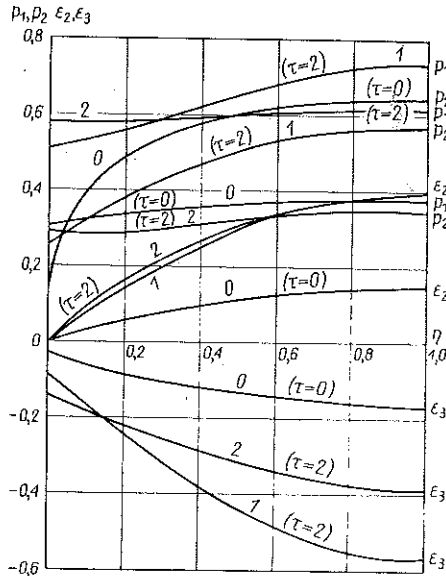
Na rysunkach 5 i 6 pokazano przebieg intensywności naprężeń (linia przerywana) oraz odkształceń (linia ciągła) wybranego punktu w środku powłoki ($\eta = 1$) w zależności od czasu τ . Przedstawione na rys. 6 krzywe 1 i 2 obliczono przy obciążeniu $Q = 0,62$, przy czym stan wyjściowy powłoki uzyskano przy zastosowaniu fizycznych związków teorii płynięcia plastycznego. Natomiast powłoka wyjściowa dla krzywych z rys. 5 jest obliczona wg teorii deformacyjnej.

W tym ostatnim przypadku obciążenie ($Q=0,56$) zostało tak dobrane, że wyniki uzyskane wg obydwu teorii plastyczności są do siebie bardzo zbliżone [14]. Rysunek 7 ilustruje rozkład naprężeń i odkształceń głównych w powłoce wzdłuż współrzędnej η .



Rys. 6

Analiza przytoczonych przykładów wykazuje, że ilościowa zgodność pomiędzy różnymi teoriami pełzania istnieje tylko w zakresie niewielkich odkształceń, natomiast różnice wyraźnie pogłębiają się wraz z upływem czasu. Przy obciążeniu



Rys. 7

$Q = \text{const}$ wszystkie teorie przewidują utratę stateczności powłoki, przy czym najwyższe wartości czasów krytycznych daje teoria ustalonego pełzania. Dla przyjętego czasu, przy którym istnieją rozwiązania, teoria nieustalonego pełzania daje niższe

wartości naprężeń i odkształceń niż teoria ustalonego płynięcia. Dla teorii starzenia naprężenia krytyczne są równe naprężeniom, przy których następuje utrata stateczności powłoki w procesie natychmiastowym, a tym samym bardzo znacznie różnią się od wartości uzyskanych wg obydwu pozostałych teorii pełzania.

W związku z bardzo dużą pracochłonnością obliczeń wiele uwagi poświęcono optymalizacji programów na maszynę cyfrową. Każdy program zapewnia pełną automatyzację rachunków (schematy blokowe) oraz maksymalną, możliwą do uzyskania szybkość operacji dzięki zastosowaniu języka wewnętrznego maszyny i odpowiedniemu wykorzystaniu pamięci ferrytowej. Obliczenia zostały wykonane w Ośrodku Maszyn Cyfrowych przy Katedrze Mechaniki Teoretycznej Politechniki Krakowskiej.

Literatura cytowana w tekście

1. И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, Физматгиз., 2, Москва 1962.
2. L. COLLATZ, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
3. С. М. Кац, *Ползучесть и разрушение труб под действием внутреннего давления*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Наук, 10 (1957), 68–89.
4. Л. М. Качанов, *Теория ползучести*, Физматгиз., Москва 1960.
5. Л. М. Качанов, *Время разрушения в условиях ползучести*, Пробл. мех. сплош. среды, Изд. АН СССР, Москва 1961.
6. Л. М. Качанов, *Ползучесть безмоментных оболочек вращения при больших деформациях*, Сб. Исслед. по упругости и пластичности, Изд. ЛГУ, 4 (1965).
7. Л. М. Качанов, *О времени разрушения оболочек в условиях ползучести*, Материалы летней школы по проблеме «Физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек», Изд. ТГУ, Тарту 1966.
8. J. MARIN, F. H. FAUPEL, L. W. HU, *Combined tension-torsion creep-time relations for aluminium alloy 2S-0*, Proc. ASTM 50, 1950, 1054–1961.
9. D. W. MARTIN, *Runge-Kutta methods for integrating differential equations on high speed digital computers*, The Computer J., 1 (1959).
10. R. MISES, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*, Academic Press INC, New York 1958.
11. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia obrotowo-symetrycznych powłok w stanie blonowym przy pewnych typach fizycznej nieliniowości*, Rozpr. Inżyn., 4, 13 (1965).
12. J. ORKISZ, *Creeping of inelastic shells with relation-symmetry in membrane state at finite deformations in the light of the theory of ageing*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série. Sci. tech., 11–12, 14 (1966).
13. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materiału*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, nr 11, Kraków 1968.
14. J. ORKISZ, J. WILK, *Numeryczne obliczenie wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu płynięciu w zakresie dużych odkształceń*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 7 (1969).
15. Ю. Н. Работнов, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Вестник МГУ, 10 (1948).
16. Ю. Н. Работнов, *Опытные данные по ползучести*, Журн. ПЛТФ, 1 (1965).
17. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Изд. Наука, Москва 1966.
18. F. P. J. RIMROTT, *Versagen bei Kriechen*, Ing. Arch., 3, 27 (1959).
19. F. P. J. RIMROTT, *On the plastic behaviour of rotating cylinders*, Trans. ASME, E 27 (1960).
20. М. И. Розовский, *Влияние фактора времени на прочность сферической оболочки подвергнутой внутреннему давлению*, Изв. АН СССР, ОТН, Мех. Маш., 4 (1961).

Резюме

ПОЛЗУЧЕСТЬ ГИБКИХ СИММЕТРИЧЕСКИХ НЕУПРУГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ
В ОБЛАСТИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

В работе, представлены численные способы решения, систем дифференциальных уравнений (2.4), (3.6) и (4.4), выведенных на основе разных физических зависимостей (теория старения, установившейся ползучести и неустановившегося течения), описывающих форму, напряженные и деформированные состояния, в процессе ползучести гибких симметрических оболочек вращения в области больших деформаций. На основании, приведенных в работе блок-схем, составлены универсальные программы для счетных электронных машин Одра-1013, при помощи которых получено конкретные решения для случая цилиндрической оболочки, нагруженной постоянным внутренним давлением. Результаты расчетов иллюстрируют поведение оболочек, со специальным учетом вопросов устойчивости, решенных согласно разным теориям ползучести.

Summary

CREEPING OF FRAIL ROTATIONALLY-SYMMETRICAL INELASTIC SHELLS IN THE
RANGE OF FINITE DEFORMATIONS

Presented here are numerical methods of solving systems of differential Eqs. (2.4), (3.6) and (4.4), derived on the basis of various physical relations (the theory of ageing, steady and unsteady flow), describing the form, state of stresses and deformations in the process of creeping of frail rotationally-symmetrical shells in the range of large deformations. On the basis of the block schemes included in the paper, universal programmes were made for the electronic computer Odra-1013, by means of which concrete solutions were obtained for the case of a cylindrical shell loaded with a constant internal pressure. The results of the calculations illustrate the behaviour of the shells, with special reference to the problem of stability solved according to different theories of creeping.

KATEDRA MECHANIKI TEORETYCZNEJ
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 listopada 1969 r.