

## PEWNE NIELINIOWE ROZWIĄZANIE DWUPASOWYCH WSTĘPNIE SPRĘŻONYCH UKŁADÓW LINOWYCH

MARIAN ŁUKOWIAK, EUGENIUSZ SAS (ŁÓDŹ)

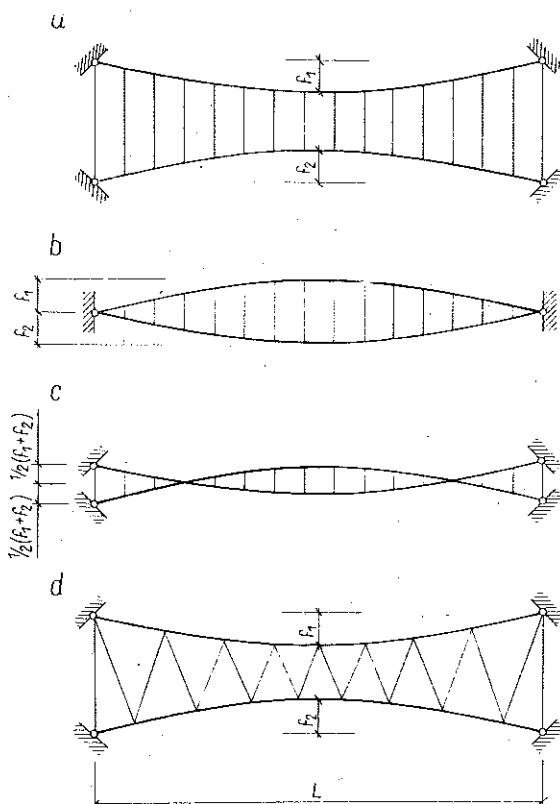
### 1. Wstęp

Liny już od dawna stosowane były jako elementy nośne w konstrukcjach mostowych, lecz stosunkowo niedawno zaczęto je stosować jako elementy nośne przekryć dachowych. Jednym z możliwych przypadków realizacji takiego przekrycia jest układ płaski dwupasowy: lina nośna i lina napinająca, obie o przeciwnych krzywiznach. Połączenie pomiędzy tymi linami może być w postaci pionowych wieszaków, pionowych prętów rozpierających lub w postaci ukośnych skratowań prętowych (rys. 1a, b, c i d). Układy takie m.in. zastosowano w rozwiązaniu konstrukcyjnym przekrycia dworca lotniczego w Amsterdamie oraz dworca autobusowego w Berlinie. Również ukazał się cały szereg prac teoretycznych dotyczących obliczeń statystycznych wyżej przedstawionych układów linowych.

Zakładając, że rozłożenie słupków lub wieszaków jest dostatecznie gęste oraz że ugięcia pionowe obu lin są jednakowe (w pracy [1]), rozwiązanie doprowadzono do układu dwóch równań rzędu drugiego na siły w linie nośnej i napinającej. Współczynniki tych równań to całki, których funkcje podcałkowe zależne są od kształtu geometrycznego lin oraz rozkładu obciążenia zewnętrznego i wstępnego naciągu. Przy analogicznych założeniach, co uprzednio, autor pracy [2] otrzymał rozwiązanie w postaci równania piątego stopnia ze względu na wypadkową siłę w pasach dźwigara linowego. Współczynniki tego równania zawierają charakterystyki geometryczne i fizyczne układu.

Pewną modyfikacją pracy [2] jest opracowanie [3], które przy tych samych właściwościach doprowadza do dwóch równań stopnia trzeciego na siły w linach nośnej i napinającej. Mniej dokładne rozwiązanie rozpatrywanych układów podają prace [4] i [5].

Wszystkie wyżej cytowane prace w podstawowych równaniach równowagi elementów dźwigara aproksymują krzywizny głównych lin z dokładnością do drugich pochodnych. We wzorach na krzywizny w stanie odkształconym w niniejszej pracy, podobnie jak w opracowaniu [6], uwzględniono pewne wyrazy nieliniowe. Rozwiązano przykład liczbowy i otrzymane wyniki porównano z rezultatami uzyskanymi dla tegoż przykładu na podstawie wyżej cytowanych prac z eksperymentalnymi danymi z pracy [7].



Rys. 1

## 2. Równania podstawowe

Rozważmy dla przykładu układ przedstawiony na rys. 2, gdzie liną nośną jest lina o polu przekroju poprzecznego  $F_2$  oraz liną napinającą lina o polu przekroju poprzecznego  $F_1$ . Założenie, że pionowe pręty ściskane są dostatecznie gęste i nieskracalne, prowadzi do wspólnego dla obu lin ugięcia pionowego, a w konsekwencji do różniczkowej formy rozwiązania zagadnienia. Oznaczając przez  $r$  wektor wodzący dla poszczególnych lin, możemy za pomocą jego różniczkowania wzdłuż krzywej otrzymać wektory jednostkowe trójścianu Freneta:

$$(2.1) \quad \frac{dr}{ds} = \tau_0, \quad \frac{d\tau_0}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \nu_0 = \frac{v_0}{\rho},$$

gdzie  $\tau_0$  oznacza wektor jednostkowy styczny do krzywej,  $\nu_0$  wektor jednostkowy prostopadły do krzywej płaskiej oraz  $k=1/\rho$  krzywizna krzywej. Równowaga wektorowa elementu w stanie odkształconym przedstawionego na rys. 3 ma postać

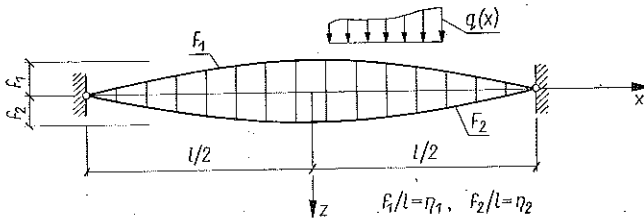
$$(2.2) \quad \frac{dT_1}{ds} + \frac{dT_2}{ds} = -q \cdot n.$$

Wyrażając wektor siły w linii przez jednostkowy wektor styczny oraz wielkość skalarną

$$\mathbf{T}_1 = T_1 \boldsymbol{\tau}_{01}, \quad \mathbf{T}_2 = T_2 \boldsymbol{\tau}_{02}$$

oba wyrazy lewej strony równania można przedstawić w postaci

$$(2.3) \quad \frac{d\mathbf{T}_i}{ds} = \frac{d}{ds} (T_i \boldsymbol{\tau}_0) = \frac{dT_i}{ds} \boldsymbol{\tau}_{0i} + T_i \frac{d\boldsymbol{\tau}_{0i}}{ds} = \frac{dT_i}{ds} \boldsymbol{\tau}_{0i} + \frac{T_i}{\rho} \boldsymbol{\nu}_{0i}.$$



Rys. 2

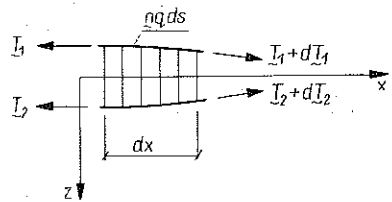
Wstawiając (2.3) do (2.2) otrzymamy

$$(2.4) \quad \frac{dT_1}{ds} \boldsymbol{\tau}_{01} + k_1 T_1 \boldsymbol{\nu}_{01} + \frac{dT_2}{ds} \boldsymbol{\tau}_{02} + k_2 T_2 \boldsymbol{\nu}_{02} = -q\mathbf{n}.$$

Z założenia małej wyniosłości wynika, że elementy  $\boldsymbol{\tau}_{01}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{02}$  oraz  $\boldsymbol{\nu}_{01}$ ,  $\boldsymbol{\nu}_{02}$  są do siebie równoległe.

Mnożąc równanie (2.4) skalarnie przez wektor  $\boldsymbol{\tau}_{01}$  lub  $\boldsymbol{\tau}_{02}$  oraz wektor  $\boldsymbol{\nu}_{01}$  lub  $\boldsymbol{\nu}_{02}$  i przyjmując, że  $q_n$  oznacza składową obciążenia prostopadłą do linii (pionowej) oraz  $q_H$  składową poziomą obciążenia zewnętrznego, otrzymamy

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{dT_1}{ds} + \frac{dT_2}{ds} + q_H &= 0, \\ k_1 T_1 + k_2 T_2 + q_n &= 0. \end{aligned}$$



Rys. 3

Ponieważ łączniki pomiędzy liniami 1 i 2 nie przenoszą sił ścinających, to równanie (2.5)<sub>1</sub> może być rozbite na niezależne dwa równania

$$(2.6) \quad \frac{dT_1}{ds} + q_{1H} = 0, \quad \frac{dT_2}{ds} + q_{2H} = 0,$$

przy czym przez  $q_{1H}$  oznaczono poziomą składową obciążenia zewnętrznego, przyłożonego do linii napinającej, a przez  $q_{2H}$  poziomą składową obciążenia zewnętrznego, przyłożoną do linii nośnej.

W przypadku braku obciążenia poziomego, co ma miejsce w większości przypadków w praktyce, z równań (2.6) wynika, że  $T_1 = \text{const}$ ,  $T_2 = \text{const}$ .

Współrzędne lin po odkształceniu wyrazić można jako sumy:

$$z_1 = z_{01} + w, \quad z_2 = z_{02} + w,$$

gdzie  $z_{0i}$  oznacza odkształcenie liny w stanie nieodkształconym, a  $w$  przemieszczenie pionowe układu.

Krzywizna  $i$ -tej liny w stanie odkształconym wynosi

$$(2.7) \quad k_i = \frac{z_i''}{[\sqrt{1+(z_i')^2}]^3} = \frac{z_{0i}'' + w''}{[\sqrt{1+(z_{0i}'+w')^2}]^3} \approx k_{0i} + w''.$$

Wstawiając (2.7) do (2.5)<sub>2</sub> otrzymamy

$$(2.8) \quad T_1 \left( k_{10} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + T_2 \left( k_{20} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + q_n = 0.$$

Siły w linach powiązane są z przemieszczeniami następującymi związkami fizycznymi (por. np. [2]):

$$(2.9) \quad \begin{aligned} T_1 &= T_{10} + \frac{EF_1}{l} \int_1 \frac{dz_{01}}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \frac{EF_1}{2l} \int_1 \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \\ T_2 &= T_{20} + \frac{EF_2}{l} \int_1 \frac{dz_{02}}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \frac{EF_2}{2l} \int_1 \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

gdzie  $T_{i0}$  oznacza siłę wstępną napięcia w  $i$ -tej linie,  $l$  rozpiętość dźwigara oraz  $E$  moduł Younga materiału liny.

Równania (2.8) i (2.9) tworzą układ równań opisujących zachowanie dźwigara linowego.

### 3. Przypadek dźwigarów o linach parabolicznych

Najczęściej występującym obciążeniem w przekryciach dachowych jest obciążenie równomiernie rozłożone, dla którego linią ciśnien jest parabola. Również stan wstępnego napięcia w przypadku kształtu parabolicznego spełnia warunki równowagi w każdym węźle dźwigara i wielkość sił napinających jest stała na całej długości liny.

Założmy więc, że w stanie wstępnego napięcia osie lin opisane są następującymi równaniami:

$$(3.1) \quad z_{10} = f_1(4\xi^2 - 1), \quad z_{20} = -f_2(4\xi^2 - 1),$$

gdzie  $\xi = x/l$ ; wówczas ich krzywizny opisane są zależnościami

$$(3.2) \quad k_{i0} = \frac{8\eta_i}{l(1+64\eta_i^2\xi^2)^{3/2}}.$$

Po wyznaczeniu z (2.8) drugiej pochodnej przemieszczenia pionowego i oznaczeniu

$$(3.3) \quad T = T_1 + T_2, \quad N = T_2 - T_1$$

otrzymamy

$$(3.4) \quad \frac{d^2 w}{(ld\xi)^2} = -\frac{1}{T} (T_1 k_{10} + T_2 k_{20} + q_n).$$

Całkując dwukrotnie równanie (3.4) otrzymamy

$$(3.5) \quad w = -\frac{1}{T} \left( \frac{T_1 l}{8\eta_1} \sqrt{1+64\eta_1^2 \xi^2} - \frac{T_2 l}{8\eta_2} \sqrt{1+64\eta_2^2 \xi^2} - M^b \right) + C_1 \xi + C_2,$$

gdzie  $M^b$  oznacza moment «belkowy» od obciążenia zewnętrznego, a  $C_1$  i  $C_2$  są stałymi całkowania, które wyznaczymy z warunków brzegowych.

Zakładając niepodatność podparć oraz symetrię obciążenia zewnętrznego mamy

$$(3.6) \quad \left[ \frac{dw}{ld\xi} \right]_{\xi=0} = 0, \quad [w]_{\xi=1/2} = 0,$$

co w konsekwencji prowadzi do wartości na stałe:

$$(3.7) \quad C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{T} \left( \frac{T_1 l}{8\eta_1} \sqrt{1+16\eta_1^2} - \frac{T_2 l}{8\eta_2} \sqrt{1+16\eta_2^2} \right).$$

Wstawiając wartości (3.7) do (3.8) otrzymamy

$$(3.8) \quad w = \frac{T_1 l}{8T\eta_1} (\sqrt{1+16\eta_1^2} - \sqrt{1+64\eta_1^2 \xi^2}) - \frac{T_2 l}{8T\eta_2} (\sqrt{1+16\eta_2^2} - \sqrt{1+64\eta_2^2 \xi^2}) + \frac{M^b}{T}.$$

Zakładając, że liny posiadają jednakową strzałkę wyniosłości ( $f_1 = f_2 \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ), otrzymamy wzór na ugięcie w postaci

$$(3.9) \quad w = \frac{IN}{8\eta T} (\sqrt{1+16\eta^2} - \sqrt{1+64\eta^2 \xi^2}) + \frac{M^b}{T}.$$

Wyznaczając pochodną przemieszczenia przy wykorzystaniu zależności  $dM^b/ld\xi = Q^b$  i wstawiając ją do wzorów (2.9) otrzymamy

$$(3.10) \quad \begin{aligned} 2(T_1 - T_{10}) \psi_1 &= A_1 \frac{N}{T} - A_2 \frac{1}{T} + A_3 \frac{N^2}{T^2} + A_4 \frac{1}{T^2} - \frac{N}{T^2} A_5, \\ 2(T_2 - T_{20}) \psi_2 &= -A_1 \frac{N}{T} + A_2 \frac{1}{T} + A_3 \frac{N^2}{T^2} + A_4 \frac{1}{T^2} - \frac{N}{T^2} A_5, \end{aligned}$$

gdzie  $\psi_1$  i  $\psi_2$  oznaczają odwrotności sztywności podłużnej lin oraz gdzie  $\psi_1 = 1/EF_1$ ,  $\psi_2 = 1/EF_2$ ,

$$(3.11) \quad \begin{aligned} A_1 &= 128\eta^3 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{1+64\eta^2 \xi^2}} = \eta \sqrt{1+16\eta^2} + \ln \sqrt{\frac{-4\eta + \sqrt{1+64\eta^2}}{4\eta + \sqrt{1+64\eta^2}}}, \\ A_2 &= 16\eta \int_{-1/2}^{1/2} Q^b \xi d\xi, \end{aligned}$$

$$(3.11) \quad A_3 = 64\eta^4 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\xi^2 d\xi}{1+64\eta^2 \xi^2} = \eta^2 - \frac{1}{4} \eta \operatorname{arctg} 4\eta,$$

[c.d.]

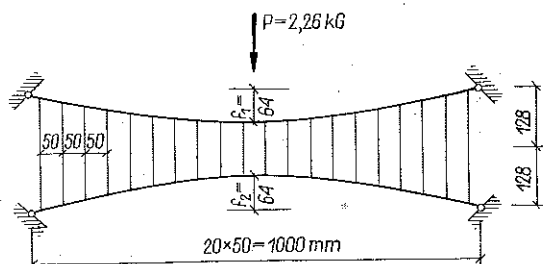
$$A_4 = \int_{-1/2}^{1/2} (Q^b)^2 d\xi, \quad A_5 = 16\eta^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{Q^b \xi d\xi}{\sqrt{1+64\eta^2 \xi^2}}.$$

Równania (3.10) mają podobną postać w przypadku, kiedy  $\eta_1 \neq \eta_2$ , lecz współczynniki obliczone za pomocą wzorów (3.11) sprowadzają się do dość skomplikowanych całek typu eliptycznego.

Dokonyjąc linearyzacji funkcji (3.9) możemy otrzymać wzory podane np. w pracy [1].

#### 4. Przykład liczbowy i porównanie wyników

Rozpatrzmy dźwigar linowy o schemacie podanym na rys. 4, obciążony siłą skupioną  $P$ , którego liny w stanie wstępnego napięcia przyjmują kształt paraboli drugiego stopnia. Przyjmijmy następujące dane dla rozpatrywanego dźwigara: rozpiętość  $l=1000$  mm, odległość zakotwiczenia lin  $e=254$  mm, strzałka w środku rozpiętości  $f_1=f_2=64$  mm, średnice lin  $d_1=d_2=1,62$  mm, wstępny naciąg w linach  $T_{10}=T_{20}=22$  kG, średnica wieszaków pionowych  $d_w=0,25$  mm, odstęp między wieszakami  $b=50$  mm oraz moduł Younga lin  $E=2,1 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>. Obrany schemat dźwigara całkowicie pokrywa się z dźwigarem, który został poddany badaniom eksperymentalnym, wyniki których zostały opublikowane w pracy [7].



Rys. 4

Korzystając ze wzorów (3.11) dla przypadku obciążenia w postaci siły skupionej w środku otrzymamy:

$$A_2 = -2\eta P = -0,2919 \text{ [kG]},$$

$$A_4 = \frac{P^2}{4} = 1,276 \text{ [kG}^2\text{]},$$

$$A_5 = \frac{P}{4} (1 - \sqrt{1+16\eta^2}) = 0,2884 \text{ [kG]},$$

$$A_1 = 0,044, \quad A_3 = 0,018.$$

Równania (3.10) mają więc postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} F_1 &= T^3 - 44T^2 - 740N^2 + 11840N - 52500 = 0, \\ F_2 &= TN + 1770N - 11980 = 0. \end{aligned}$$

Nieliniowy układ równań (4.1) rozwiązano metodą iteracji, podaną w pracy [8].

Oznaczając przez  $t$  i  $n$  kolejne przyrosty sił  $T$  i  $N$  stwierdzimy, że spełnione są równania

$$(4.2) \quad \begin{aligned} t_1 \frac{\partial F_1}{\partial T} + n_1 \frac{\partial F_1}{\partial N} &= -F_1(T^0, N^0), \\ t_1 \frac{\partial F_2}{\partial T} + n_1 \frac{\partial F_2}{\partial N} &= -F_2(T^0, N^0). \end{aligned}$$

Przyjmując jako pierwsze przybliżenie wartości wstępnego napięcia  $T^0 = 22 + 22 = 44$  kG oraz  $N^0 = 0$  i wykonując obliczenia przypisane równaniem (4.2), znajdziemy następujący układ równań liniowych:

$$\begin{aligned} 1936 t_1 + 11840 n_1 &= 52500, \\ 1814 n_1 &= 11980; \end{aligned}$$

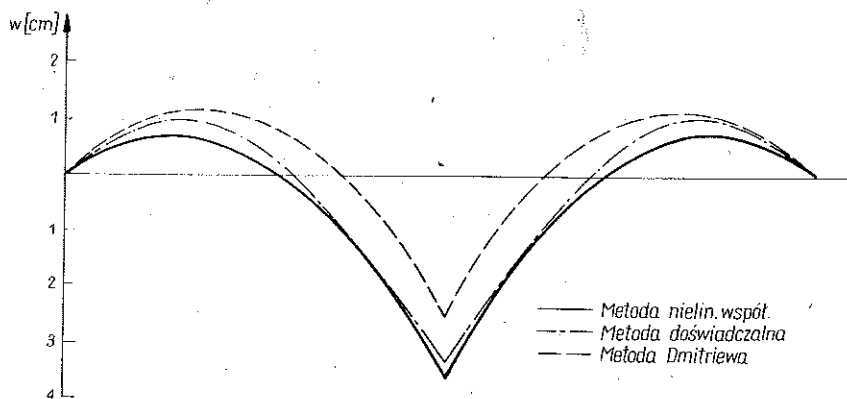
stąd  $n_1 = 6,6$  i  $t_1 = -13,27$  kG.

Po pierwszej iteracji mamy więc

$$T^1 = T^0 + t_1 = 44 - 13,27 = 30,73 \text{ i } N^1 = N^0 + n_1 = 0 + 6,60 = 6,60 \text{ kG}.$$

Wykonując cztery kolejne przybliżenia otrzymamy

$$T^4 = 46,70 \text{ kG} \quad \text{oraz} \quad N^4 = 6,40 \text{ kG}.$$



Rys. 5

Z równania (3.3) obliczamy wartości sił w linie nośnej  $T_2 = 26,55$  kG oraz siły w linie napinającej  $T_1 = 20,15$  kG. Wykorzystując wzór (3.9) otrzymujemy wielkości ugięcia dźwigara pod obciążeniem, które zostały przedstawione na rys. 5. Na tym samym rysunku podano ugięcia uzyskane z badań doświadczalnych, opublikowanych w [7] oraz wielkości przemieszczeń uzyskanych metodą zlinearyzowaną podaną w [2].

## 5. Wnioski

Rozbieżność uzyskanych wyników w porównaniu z wynikami doświadczalnymi oraz wynikami opartymi na metodzie zlineryzowanej jest stosunkowo niewielka. Wynika to z faktu, że przyjęty do rozważań układ jest silnie wstępnie napięty i zmiany sił w linach spowodowane obciążeniem zewnętrznym są stosunkowo niewielkie w porównaniu z siłami sprężającymi. Układ taki pracuje w sposób bardzo zbliżony do układu liniowo-sprężystego.

Dla sił napinających lub większych obciążeń zewnętrznych metoda podana w niniejszej pracy lepiej opisuje rzeczywisty stan pracy dźwigara, którego zachowanie staje się coraz bardziej liniowe.

## Literatura cytowana w tekście

1. Г. Э. Райнус, *Принципы расчета висячих покрытий с несущей конструкцией из гибких нитей*, Сб. «Висячие покрытия», Москва 1962.
2. Я. Г. Дмитриев, А. В. Касялов, *Вантовые покрытия*, Киев 1968.
3. L. G. MUCHADZE, *Przybliżone rozwiązanie ustrojów ciągnowych dwupojasowych wstępnie naprężonych*, Arch. Inż. Bud., 3, 14 (1968).
4. В. К. Качурин, *Теория висячих систем*, Москва 1962.
5. З. Сobotka, *Висячие покрытия* [tłum. z czeskiego] Москва 1964.
6. Э. Н. Кузнецов, *Расчет висячих покрытий круглого очертания в плане*, Москва 1962.
7. P. KRISHNA, S. R. SPARKES, *Analysis of pretensioned cable systems*, Proc. Inst. Civil Engin., 39 (1968).
8. A. ANGOT, *Compléments de mathematiques*, Paris 1957.

## Резюме

НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУПОЯСНЫХ,  
ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Дается нелинейное решение двупоясных предварительно напряженных вантовых ферм. Результаты описанного метода сравниваются на примере с результатами экспериментальных работ и других известных линейных решений.

## Summary

A CERTAIN NONLINEAR SOLUTION OF TWO-BELT PRE-COMPRESSED LINEAR  
SYSTEMS

A solution is given here of a pre-tensioned two-belt cable girder. The results of the paper are confronted in an example with the results of experimental works and other known linear solutions.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 listopada 1969 r.