

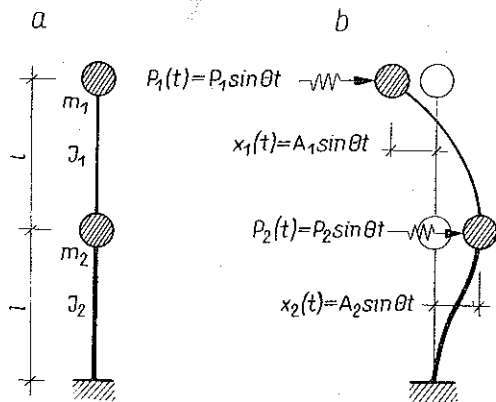
OPTIMALIZACJA PARAMETRYCZNA UKŁADU DRGAJĄCEGO O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

Ostatnio coraz więcej uwagi poświęca się optymalizacji konstrukcji poddanych obciążeniom zmiennym w czasie. Mimo że literatura zagadnienia liczy na razie zaledwie kilka pozycji, zaczynają się już jednak wyróżniać trzy zasadnicze grupy problemowe. Do grupy pierwszej zaliczyć można prace [1, 2, 3, 4 i 5], dotyczące optymalizacji amortyzacji przeciwwstrząsowej układów o jednym stopniu swobody, poddanych krótkotrwałym wymuszeniom typu impulsowego. Grupę drugą stanowią prace [4 i 6] z zakresu optymalizacji układów o skończonej liczbie stopni swobody, poddanych wymuszeniom harmonicznym zmiennym w czasie. W cytowanych pracach obu grup optimum uzyskuje się na drodze minimalizacji maksimum odpowiedzi układu na określone wymuszenie. Grupa trzecia obejmuje prace [7, 8 i 9], dotyczące sztywności dynamicznej układów o nieskończonej liczbie stopni swobody. W pracach tych poszukuje się bądź rozwiązań o minimalnej masie przy ustalonej podstawowej częstotliwości drgań własnych, bądź też rozwiązań o maksymalnej częstotliwości podstawowej przy ustalonej objętości układu.

Praca niniejsza stanowi kontynuację tematu podjętego w pracy [6] i może być zaliczona do drugiej grupy problemowej. Ma ona na celu omówienie dalszych możliwości optymalnego kształtowania układu o dwóch stopniach swobody, przedstawionego na rys. 1, drgającego



Ry. 1

w stanie ustalonym pod wpływem poprzecznego wymuszenia harmonicznego o ustalonej częstotliwości kołowej  $\theta$ . W rozważanym przypadku kształtowanie polega na odpowiednim doborze wartości dwóch parametrów  $m_1$  i  $J_1$  układu przy ustalonych wartościach pozostałych parametrów  $m_2$ ,  $J_2$  i  $l$ . Optymalizacja została przeprowadzona przy zastosowaniu energetycznego kryterium jakości oddzielnie

dla dwóch przypadków wymuszenia działającego bądź na górną, bądź na dolną masę układu. Ze względu na ustaloną strukturę układu optymalizacja ma charakter parametryczny [10]. Jako parametry wprowadzono dwie niezależne wielkości bezwymiarowe  $\alpha = m_2/m_1$  i  $\beta = I_2/I_1$ , którym należy nadać takie wartości ze zbioru wartości dopuszczalnych, aby minimalizowały one przyjęty wskaźnik jakości.

## 2. Przepustowość i częstotliwości własne układu

Układ równań różniczkowych ruchu ustroju pokazanego na rys. 1

$$(2.1) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \frac{6EI_1 I_2}{(3I_1 + 4I_2)l^3} (2x_1 - 5x_2) &= P_1(t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + \frac{6EI_1 I_2}{(3I_1 + 4I_2)l^3} \left[ -5x_1 + 2 \left( \frac{I_2}{I_1} + 7 \right) x_2 \right] &= P_2(t), \end{aligned}$$

można przedstawić prościej posługując się zapisem macierzowym. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(2.2) \quad M = m_2 M_0, \quad R = \frac{c}{4\beta + 3} R_0,$$

gdzie

$$(2.3) \quad M_0 = \begin{bmatrix} 1 & \\ \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2\beta + 14 \end{bmatrix},$$

$$c = \frac{6EI_2}{l^3}, \quad a = \frac{m_2}{m_1}, \quad \beta = \frac{I_2}{I_1},$$

dzięki którym zamiast (2.1) otrzymujemy

$$(2.4) \quad M \ddot{\bar{x}} + R \bar{x} = \bar{P}(t).$$

Przy założeniu harmonicznego wymuszenia obciążenia zarówno samo obciążenie  $\bar{P}(t) = \bar{P} \sin \theta t$ , jak też wywołane przez nie przemieszczenie  $\bar{x}(t) = \bar{A} \sin \theta t$ , charakteryzują jednoznacznie amplitudy  $P_1$  i  $P_2$  oraz  $A_1$  i  $A_2$ , przy czym

$$(2.5) \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}.$$

Zależność pomiędzy wektorami  $\bar{P}$  i  $\bar{A}$  określona jest za pomocą macierzy przepustowości układu, którą można otrzymać na podstawie równania ruchu (2.4). Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.6) \quad \bar{a} = \frac{\bar{A}}{l}, \quad \bar{p} = \frac{\bar{P}}{cl}, \quad \lambda = g^2 = \frac{m_2}{c} \theta^2,$$

gdzie  $\theta$  jest częstotliwością kołową obciążenia; macierz przepustowości układu można przedstawić w postaci

$$(2.7) \quad G = \left( \frac{R_0}{4\beta + 3} - \lambda M_0 \right)^{-1} = \frac{\alpha}{W} G_0,$$

gdzie

$$(2.8) \quad W = W(\lambda; \alpha, \beta) = (4\beta + 3)\lambda^2 - 2(\alpha + \beta + 7)\lambda + \alpha$$

jest wielomianem charakterystycznym macierzy  $R - \theta^2 M$  oraz gdzie

$$(2.9) \quad G_0 = \begin{bmatrix} 2\beta + 14 - (4\beta + 3)\lambda & 5 \\ 5 & 2 - \frac{4\beta + 3}{\alpha}\lambda \end{bmatrix}$$

Związek między bezwymiarowymi wektorami  $\bar{a}$  i  $\bar{p}$  przyjmuje postać

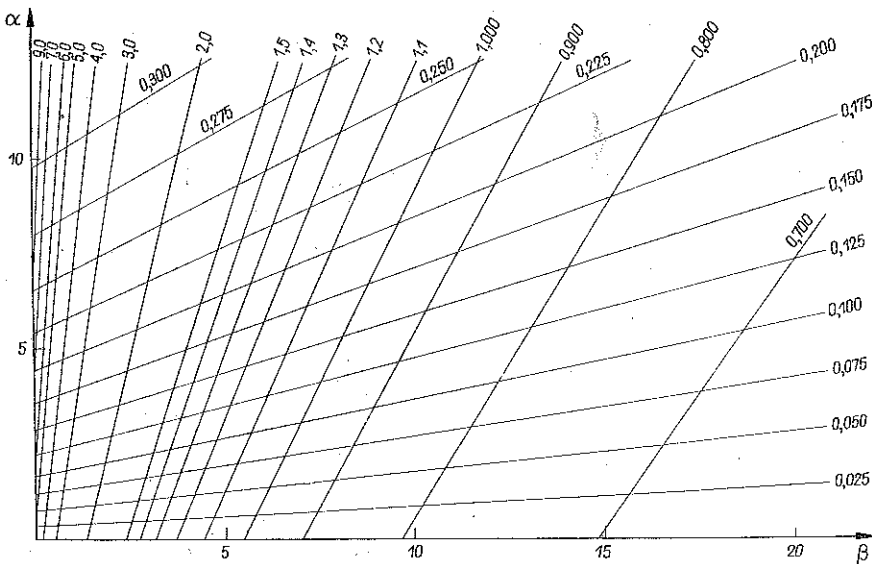
$$(2.10) \quad \bar{a} = G\bar{p}$$

Liniowa zależność współczynników wielomianu (2.8) od parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  pozwala sporządzić prosty nomogram dla wyznaczania bezwymiarowych częstości własnych układu  $\lambda_1(\alpha, \beta)$  i  $\lambda_2(\alpha, \beta)$ , jako pierwiastków równania charakterystycznego  $W(\lambda; \alpha, \beta) = 0$ . Nomogram ten, utworzony przez dwie rodziny półprostych o wspólnym równaniu

$$(2.11) \quad \alpha = 2\lambda(\beta - \beta_1),$$

gdzie

$$\beta_1 = \frac{3\lambda - 14}{2(1 - 2\lambda)},$$



Rys. 2

pokazano na rys. 2. Ponieważ przez każdy punkt płaszczyzny parametrów  $(\alpha, \beta)$  przechodzą tylko dwie półproste  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , zatem mamy tu wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie interesujących nas par liczb. Ze względu na swą prostotę otrzymany nomogram może być przydatny w zastosowaniach praktycznych.

## 3. Analiza wskaźnika jakości

Jak już wspomniano we wstępie, optymalizację układu przeprowadzimy na podstawie kryterium energetycznego, przyjmując jako wskaźnik jakości maksymalną wartość bezwymiarowej energii sprężystej układu w stanie ustalonym. Naszym zadaniem będzie minimalizacja tego wskaźnika będącego miarą odstępstwa od stanu idealnego, jakim jest stan spoczynku układu pomimo działającego nań obciążenia.

Maksymalną energię sprężystą układu można po przekształceniach napisać następująco:

$$U_m = \frac{1}{2} \bar{A}' R \bar{A} = \frac{cl^2}{2W^2} \bar{p}' H \bar{p}$$

lub w postaci bezwymiarowej

$$(3.1) \quad U = \frac{U_m}{cl^2} = \frac{1}{2W^2} \bar{p}' H \bar{p},$$

gdzie

(3.2)

$$H = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 [(4\beta+3)\lambda^2 - (4\beta+3)\lambda + \beta + 7] & -5\alpha [(4\beta+3)\lambda^2 - \alpha] \\ -5\alpha [(4\beta+3)\lambda^2 - \alpha] & 2[(\beta+7)(4\beta+3)\lambda^2 - \alpha(4\beta+3)\lambda + \alpha^2] \end{bmatrix}.$$

**3.1. Przypadek  $\bar{p}' = (1, 0)$ .** Podstawiając w (3.1)  $\bar{p}' = (1, 0)$  otrzymujemy dla przypadku wymuszenia działającego tylko na górną masę układu

$$(3.3) \quad U(\alpha, \beta; \lambda) = \frac{\alpha^2}{W^2} [(1-2\lambda)^2 \beta + 3\lambda(\lambda-1) + 7].$$

Analizę funkcji  $U$  przeprowadzimy przy założeniu, że  $\alpha$  i  $\beta$  są zmiennymi niezależnymi, podczas gdy  $\lambda$  spełnia rolę parametru. Przyjmiemy również, biorąc pod uwagę fizyczny sens zagadnienia, że wszystkie trzy wielkości  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\lambda$  mogą przybierać tylko wartości dodatnie.

Dla zbadania obszarów monotoniczności funkcji  $U$  posłużymy się jej pochodnymi cząstkowymi

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= \frac{2\lambda \alpha}{W^3} [(1-2\lambda)^2 \beta + 3\lambda(\lambda-1) + 7] [2(2\lambda-1)\beta + 3\lambda - 14], \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} &= \frac{(1-2\lambda)\alpha^2}{W^3} [(1-2\lambda)^2 (\alpha + 2\lambda\beta) + \lambda(6\lambda^{-2} + 19\lambda + 14)] \end{aligned}$$

i rozważymy trzy równania

$$(3.5) \quad W=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha}=0, \quad \frac{\partial U}{\partial \beta}=0,$$

określające przy ustalonym  $\lambda$  granice wspomnianych obszarów na płaszczyźnie zmiennych  $\alpha, \beta$ . Równania (3.5) są spełnione w następujących przypadkach [por. wzory (2.8) i (2.11)]:

$$\begin{aligned} W &\equiv 0, & \text{gdy} & \quad \alpha = 2\lambda(\beta - \beta_1), \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha} &\equiv 0, & \text{gdy} & \quad \alpha = 0, \quad \beta = \beta_1, \quad \beta = \beta_*, \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} &\equiv 0, & \text{gdy} & \quad \alpha = 0, \quad \alpha = -2\lambda(\beta - \beta^*), \end{aligned}$$

gdzie

$$\beta_* = -\frac{3\lambda^2 - 3\lambda + 7}{(1 - 2\lambda)^2}, \quad \beta^* = -\frac{6\lambda^2 + 19\lambda + 14}{2(1 - 2\lambda)^2},$$

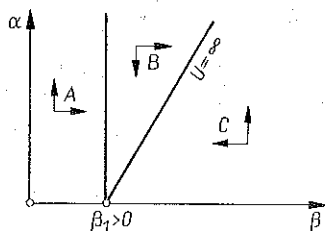
a  $\beta_1 = \beta_1(\lambda)$  dla  $\lambda > 0$  przedstawiono graficznie na rys. 6 na podstawie wzoru (2.11).

Ponieważ  $\beta_* < 0$  i  $\beta^* < 0$  dla  $\lambda > 0$ , zatem równania  $\beta = \beta_*$  i  $\alpha = -2\lambda(\beta - \beta^*)$  można odrzucić z rozważań, gdyż określają one takie proste, które przy  $\lambda > 0$  nigdy nie przecinają interesującej nas pierwszej ćwiartki płaszczyzny zmiennych  $\alpha, \beta$ . W dalszym ciągu mówiąc o podziale płaszczyzny  $\alpha, \beta$  będziemy stale mieć na myśli podział tylko pierwszej ćwiartki tej płaszczyzny zgodnie z założeniem nieujemności zmiennych  $\alpha$  i  $\beta$ .

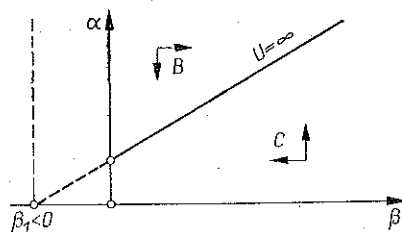
Ostatecznie więc podział płaszczyzny  $\alpha, \beta$  na obszary monotoniczności funkcji  $U$  dokonuje się jednoznacznie za pomocą tylko dwóch prostych

$$(3.6) \quad \alpha = 2\lambda(\beta - \beta_1), \quad \beta = \beta_1$$

i zależy wyłącznie od bezwymiarowej częstości wymuszającej  $\lambda$ . Podział ten oraz kierunki składowych wektora grad  $U$  pokazano przykładowo na rys. 3 i 4.



Rys. 3



Rys. 4

**3.2. Przypadek  $\bar{p}' = (0, 1)$ .** Jeżeli wymuszenie działa tylko na dolną masę układu, wówczas  $\bar{p}' = (0, 1)$  i na podstawie (3.1) otrzymujemy

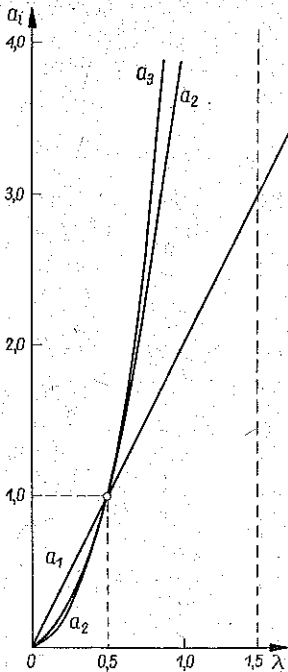
$$(3.7) \quad \begin{aligned} U(\alpha, \beta; \lambda) &= \frac{1}{W^2} [\lambda^2(\beta + 7)(4\beta + 3) - \lambda\alpha(4\beta + 3) + \alpha^2], \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha} &= \frac{25\lambda}{W^3} [\lambda^2(4\beta + 3) - \alpha], \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} &= -\frac{25\lambda^2}{W^3} [\lambda^2(4\beta + 3) + 2\lambda(\beta + 7) + (2\lambda - 3)\alpha]. \end{aligned}$$

Równania (3.5) są tym razem spełnione w następujących przypadkach:

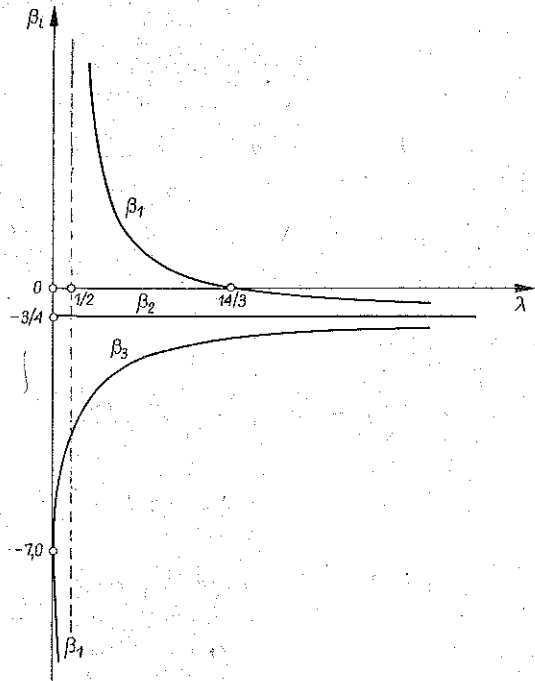
$$(3.8) \quad \begin{aligned} W \equiv 0, & \quad \text{gdy} \quad \alpha = a_1(\beta - \beta_1), \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha} \equiv 0, & \quad \text{gdy} \quad \alpha = a_2(\beta - \beta_2), \\ \frac{\partial U}{\partial \beta} \equiv 0, & \quad \text{gdy} \quad \alpha = a_3(\beta - \beta_3), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.9) \quad \begin{aligned} a_1 &= 2\lambda, & a_2 &= 4\lambda^2, & a_3 &= 2\lambda \frac{1+2\lambda}{3-2\lambda}, \\ \beta_1 &= \frac{3\lambda-14}{2(1-2\lambda)}, & \beta_2 &= -\frac{3}{4}, & \beta_3 &= -\frac{3\lambda+14}{2(1+2\lambda)}. \end{aligned}$$



Rys. 5



Rys. 6

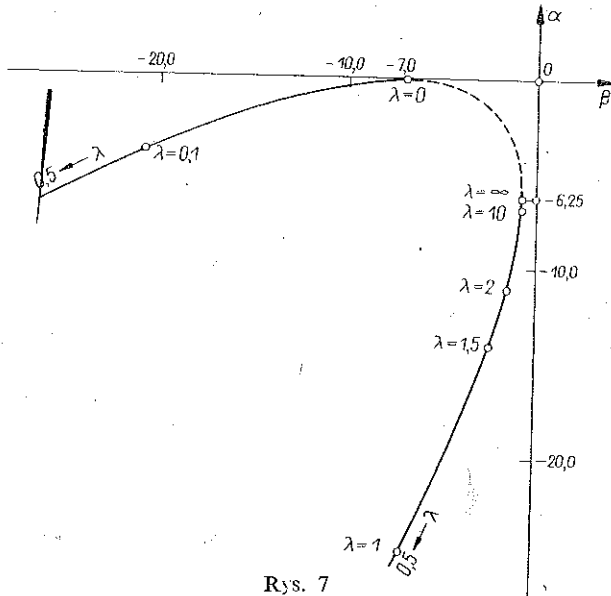
Wykresy funkcji  $a_i(\lambda)$ ,  $\beta_i(\lambda)$  ( $i=1, 2, 3$ ) dla  $\lambda > 0$  pokazano na rys. 5 i 6, przy czym na rys. 5 nie uwidoczniiono ujemnej gałęzi funkcji  $a_3(\lambda)$ , odpowiadającej wartościom  $\lambda > 1,5$ .

Z analizy równań (3.8) wynika, że dla każdego ustalonego  $\lambda$  wszystkie trzy proste przecinają się w jednym punkcie o współrzędnych

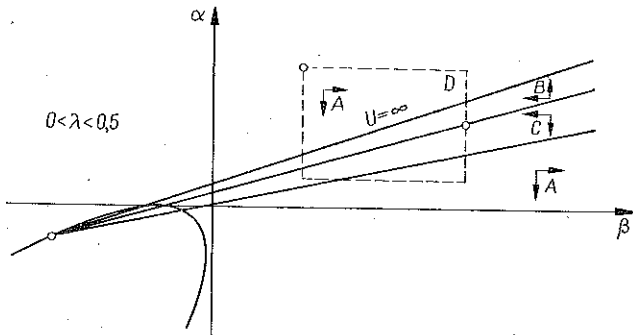
$$(3.10) \quad \alpha = \alpha_* = - \left( \frac{5\lambda}{1-2\lambda} \right)^2 < 0,$$

$$\beta = \beta_* = - \frac{3\lambda^2 - 3\lambda + 7}{(1-2\lambda)^2} < 0.$$

Równania (3.10) przedstawiają w postaci parametrycznej pewną krzywą pokazaną na rys. 7, będącą miejscem geometrycznym punktów przecięcia się wspomnianych trzech prostych. Jak widać, krzywa ta w całości mieści się w trzeciej ćwiartce



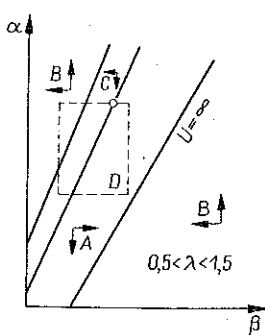
Rys. 7



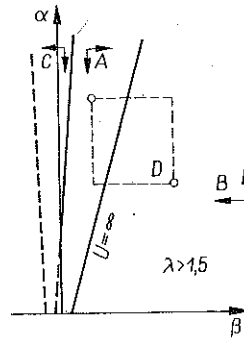
Rys. 8

płaszczyzny  $\alpha, \beta$  i składa się z dwóch oddzielnych, nieograniczonych gałęzi odpowiadających przedziałom  $0 \leq \lambda < 0,5$  i  $0,5 < \lambda < \infty$ . Dodać tu należy, że przy  $\lambda \geq 1,5$  prosta określona równaniem (3.8)<sub>3</sub> nie przecina pierwszej ćwiartki i w przypadku tym można ją odrzucić z rozważań.

Tak więc podział płaszczyzny  $\alpha, \beta$  na obszary monotoniczności funkcji  $U$  dokonuje się jednoznacznie za pomocą trzech prostych (3.8) i zależy wyłącznie od bezwymiarowej częstości wymuszającej  $\lambda$ . Podział ten oraz kierunki składowych wektora grad  $U$  pokazano przykładowo na rys. 8, 9 i 10.



Rys. 9



Rys. 10

#### 4. Minimalizacja wskaźnika jakości

Wyniki analizy wskaźnika jakości  $U(\alpha, \beta; \lambda)$  pozwalają w prosty sposób przeprowadzić optymalizację rozważanego układu. Na samym wstępie trzeba jednak wyraźnie zaznaczyć, że w zastosowanym przez nas ujęciu zagadnienia optymalizacja ta musi być przeprowadzona oddzielnie dla każdego z dwóch przypadków szczególnych obciążenia, rozważonych w p. 3.1 i 3.2. Chodzi mianowicie o to, że przy równoczesnym działaniu sił wymuszających na obie masy układu należy wprowadzić do rozważań dodatkowy parametr charakteryzujący stosunek amplitud tych sił oraz uwzględnić pełne wyrażenie (3.1) dla energii układu. Pociąga to za sobą konieczność przeprowadzenia ogólniejszej analizy i wykracza poza ramy niniejszej pracy. Pomimo to jednak dla pewnych obszarów dopuszczalnych może się zdarzyć, że minimum funkcji  $U$  będzie osiągnięte równocześnie dla obu przypadków szczególnych. W ogólności rozwiązanie optymalne dla jednego z tych przypadków nie będzie równocześnie rozwiązaniem optymalnym dla przypadku drugiego. W tej sytuacji poszukiwanie optimum dla łącznego działania obciążeń, na podstawie analizy przeprowadzonej w p. 3, będzie ogólnie rzecz biorąc nieuzasadnione.

Optymalizację układu obciążonego jedną z sił wymuszających przeprowadzamy poszukując takiego punktu płaszczyzny  $\alpha, \beta$ , należącego do danego obszaru dopuszczalnego  $D$ , dla którego funkcja  $U(\alpha, \beta; \lambda)$  przyjmuje wartość najmniejszą  $U_{\min}(\lambda) = U(\alpha_0, \beta_0; \lambda)$ . Dzięki znajomości znaków obu składowych wektora grad  $U$  w każdym z obszarów monotoniczności poszukiwanie to odbywa się w prosty sposób w obszarach dopuszczalnych  $D$ , których granica składa się z prostoliniowych odcinków równoległych do osi  $\alpha$  i  $\beta$  (rys. 8, 9 i 10), a w szczególności w obszarach prostokątnych. Jeżeli w obszarze tego typu funkcja  $U$  posiada kilka minimów lokalnych, to wyznaczenie rozwiązania optymalnego wymaga obliczenia i porównania wartości tych minimów. Jako rozwiązanie  $\alpha_0, \beta_0$  przyjmujemy współrzędne



tego z punktów, dla którego  $U = U_{\min}$ . Dla obszarów dopuszczalnych o dowolnym kształcie rozwiązanie zagadnienia wymaga zastosowania metod programowania nieliniowego [11].

Wyznaczenie optymalnych wartości parametrów  $\alpha_0$  i  $\beta_0$  przy ustalonych wartościach  $m_2$  i  $I_2$  jest równoznaczne z wyznaczeniem optymalnych wartości  $m_1$  i  $I_1$ , które zgodnie z (2.3)<sub>2</sub> wynoszą

$$m_1^0 = \frac{m_2}{\alpha_0}, \quad I_1^0 = \frac{I_2}{\beta_0}.$$

### 5. Wnioski

W przedstawionym powyżej ujęciu poszukiwanie rozwiązania optymalnego odbywa się w z góry danym obszarze dopuszczalnym. Przyjęcie tego obszaru jest zazwyczaj podyktowane pewnymi warunkami ograniczającymi, jakie musi spełniać rozważany układ. Jeżeli np. dla układu z rys. 1 przyjmiemy wartości parametrów  $m_2$  i  $I_2$  jako ustalone, a dla wartości  $m_1$  i  $I_1$  określimy ich dopuszczalne przedziały zmienności, to przez (2.3)<sub>3</sub> zostaje w ten sposób określony pewien prostokątny obszar dopuszczalny dla  $\alpha$  i  $\beta$ . Jest rzeczą oczywistą, że takie ujęcie stanowi uproszczenie zagadnienia optymalizacji, które może być sformułowane znacznie ogólniej. Można mianowicie postawić problem najkorzystniejszego doboru nie tylko dwóch ale wszystkich parametrów układu. Wymaga to odpowiedniego sformułowania kryterium jakości oraz warunków ograniczających na podstawie wymagań stawianych układowi. Wchodzi tu w rachubę przede wszystkim wymagania odnośnie wytrzymałości, sztywności i stateczności układu, jak również odnośnie jego ciężaru, kosztu itp. Takie ogólne ujęcie zagadnienia wykracza jednak znacznie poza ramy niniejszej pracy, gdyż trzeba tu zauważyć, że optymalizacja układu liniowego jest problemem nieliniowym z zakresu programowania matematycznego. Nieliniowość ta jest przyczyną poważnych trudności natury matematycznej, które zmuszają do poszukiwań właściwego podejścia do zagadnienia zwłaszcza przy wzroście liczby stopni swobody drgań układu.

Przedstawiony sposób minimalizacji efektów rezonansowych w układzie drgającym o dwóch stopniach swobody może znaleźć praktyczne zastosowanie jako metoda najkorzystniejszego strojenia konstrukcji poddanych działaniu obciążeń harmonicznie zmiennych w czasie. Mimo, że przyjęcie takiego szczególnego rodzaju wymuszenia nie zezwala na zbyt dalekie uogólnianie otrzymanych rezultatów, to jednak dostarczają one szeregu dość istotnych informacji odnośnie do możliwości strojenia pewnych typów konstrukcji. Zauważmy bowiem, że schemat z rys. 1 może być z powodzeniem wykorzystany przy analizie pracy dynamicznej płaskich układów ramowych, np. piętrowych hal przemysłowych, wykonujących antysymetryczne drgania wymuszone harmonicznie. Do schematu tego sprowadzić można również niektóre jednonawowe układy ramowe z pracującymi w ich płaszczyźnie suwnicami. Strojenie odbywać się może przez wprowadzanie odpowiednich zmian sztywności słupów i rozkładu mas w dwu poziomach.

W przypadku układów o dwóch lub większej liczbie stopni swobody problem strojenia w strefach międzyrezonansowych nabiera zawsze charakteru typowego dla optymalizacji. Oddalaniu się bowiem od jednej z sąsiadujących stref rezonansu towarzyszy równoczesne przybliżanie się do drugiej. Wskaźnikiem jakości strojenia w tym przypadku może być wartość maksymalnej energii drgań ustalonych układu, która powinna być jak najmniejsza. Minimalizacja tej energii jest w pewnym określonym sensie równoważna nie tylko minimalizacji amplitud drgań ustalonych, lecz także minimalizacji momentów zginających, występujących podczas drgań układu [6].

Problem optymalnego strojenia międzyrezonansowego pojawia się zawsze wtedy, gdy częstość sił wymuszających drgania układu znajduje się pomiędzy jego dwoma sąsiednimi częstościami własnymi. Przypadki takie zdarzają się bardzo często w praktyce i dlatego omawiany problem ma duże znaczenie praktyczne. Nabiera on szczególnego znaczenia zwłaszcza wówczas, gdy widmo częstości drgań własnych jest zagęszczone na odcinku zawierającym częstość wymuszającą. Wiąże się to ściśle z bardziej ogólnym zagadnieniem realizacji układów drgających o z góry danym widmie. Zagadnienie to omawiają prace [8 i 9], jednak wymaga ono przeprowadzenia dalszych badań i uogólnień oraz przystosowania do celów praktyki inżynierskiej.

## 6. Przykład

Element nośny dwupoziomowej stalowej konstrukcji wsporczej pod zespół wentylatorów zaprojektowano jako słup o wysokości  $2 \times 4,0$  m i skokowo zmiennym przekroju poprzecznym. Ciężar dolnego poziomu konstrukcji wynosi 4,5 T, a przekrój poprzeczny dolnego odcinka słupa przyjęto  $I 300$ . Względny technologiczne i konstrukcyjne zezwalają na przyjęcie ciężaru górnego poziomu konstrukcji w granicach od 1,0 do 2,0 T oraz przekroju poprzecznego górnego odcinka słupa w granicach od  $I 200$  do  $I 240$ . Przyjmując, że poprzeczne wymuszenie harmoniczne o częstości  $n=120$  obr/min występuje na wysokości 4,0 m i działa w płaszczyźnie większej sztywności giętej słupa, należy: a) ustalić najkorzystniejszy ciężar górnego poziomu konstrukcji, b) wybrać najkorzystniejszy przekrój poprzeczny górnego odcinka słupa, c) przeanalizować przypadek, gdy źródło wymuszenia zmieni częstość na  $n=180$  obr/min.

Dla przeprowadzenia optymalizacji układu nanosimy na płaszczyźnie parametrów  $\alpha, \beta$  obszar dopuszczalny  $D$  (rys. 11). Obszar ten składa się z trzech odcinków odpowiadających trzem dopuszczalnym profilom walcowanym:  $I 200$ ,  $I 220$ ,  $I 240$ . Wspólna długość tych odcinków określona jest przez ustalenie dopuszczalnego zakresu zmienności ciężaru górnego poziomu konstrukcji. Tak więc obszar  $D$  można określić następująco:

$$D: \quad \alpha_d \leq \alpha \leq \alpha_g, \quad \beta = \beta_a, \beta_b, \beta_c,$$

gdzie

$$\alpha_d = \frac{4,5}{2,0} = 2,25, \quad \alpha_g = \frac{4,5}{1,0} = 4,5.$$

Za pomocą tablic profili walcowanych obliczamy:

$$\beta_a = \frac{9800}{4250} = 2,31, \quad \beta_b = \frac{9800}{3060} = 3,20, \quad \beta_c = \frac{9800}{2140} = 4,58.$$

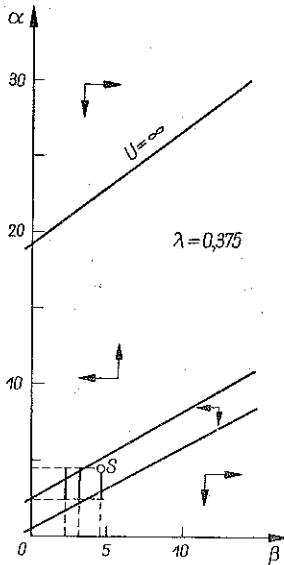
Dla wyznaczenia optymalnych wartości parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  w określonym już obszarze dopuszczalnym  $D$  płaszczyzny musimy nanieść na nią obszary monotoniczności funkcji kryterialnej  $U$ . W tym celu obliczamy:

$$m_2 = \frac{4,50}{9,81} = 0,458 \frac{\text{Ts}^2}{\text{m}}, \quad c = \frac{6 \times 2,1 \times 10^6 \times 9800}{400^3} = 1930 \frac{\text{kG}}{\text{cm}} = 193 \frac{\text{T}}{\text{m}},$$

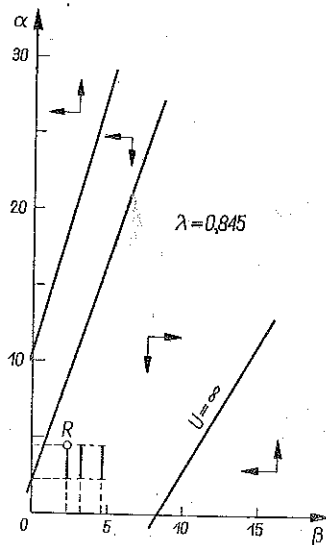
$$\theta = 2\pi \frac{120}{60} = 12,6 \frac{1}{\text{s}}, \quad \lambda = \frac{0,458 \times 12,6^2}{193} = 0,375,$$

$$a_1 = 2 \times 0,375 = 0,750, \quad a_2 = 4 \times 0,375^2 = 0,562, \quad a_3 = 0,750 \times \frac{1 + 0,750}{3 - 0,750} = 0,583,$$

$$\beta_1 = \frac{3 \times 0,375 - 14}{2(1 - 2 \times 0,375)} = -25,75, \quad \beta_2 = -0,75, \quad \beta_3 = -\frac{3 \times 0,375 + 14}{2(1 + 2 \times 0,375)} = -4,32.$$



Rys. 11



Rys. 12

Na płaszczyznę parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  nanosimy teraz proste rozgraniczające obszary monotoniczności funkcji  $U$  i kierując się znajomością znaków współrzędnych wektora grad  $U$  (rys. 8, 9 i 10) szukamy takiego punktu  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ , w którym  $U = U_{\min}$ . W rozważanym przypadku punktem takim, stanowiącym rozwiązanie optymalne postawionego problemu, jest punkt  $S$  na rys. 11. Jego współrzędne wynoszą:  $\alpha_0 = \alpha_g = 4,50$ ,  $\beta_0 = \beta_c = 4,58$ . Odpowiada to ciężarowi górnemu poziomemu konstrukcji o wartości 1,0 T oraz profilowi stalowemu I 200.

W przypadku, gdy częstość wymuszająca przybierze wartość  $n=180$  obr/min, otrzymujemy:

$$\theta = 2\pi \frac{180}{60} = 18,85 \frac{1}{s}, \quad \lambda = \frac{0,458 \times 18,85^2}{193} = 0,845,$$

$$a_1 = 2 \times 0,845 = 1,69, \quad a_2 = 4 \times 0,845^2 = 2,86, \quad a_3 = 1,69 \times \frac{1+1,69}{3-1,69} = 3,47,$$

$$\beta_1 = \frac{3 \times 0,845 - 14}{2(1 - 2 \times 0,845)} = 8,31, \quad \beta_2 = -0,75, \quad \beta_3 = -\frac{3 \times 0,845 + 14}{2(1 + 2 \times 0,845)} = -3,07.$$

Po naniesieniu na płaszczyznę parametrów  $\alpha, \beta$  prostych rozgraniczających (rys. 12) i po uwzględnieniu znaków współrzędnych wektora grad  $U$  odnajdujemy rozwiązanie optymalne, którym w rozważanym przypadku jest punkt  $R$  obszaru dopuszczalnego  $D$  o współrzędnych  $\alpha_0 = \alpha_g = 4,50$ ,  $\beta_0 = \beta_a = 2,31$ . Odpowiada to ciężarowi górnego poziomu konstrukcji o wartości 1,0 T oraz profilowi walcowemu  $I 240$ .

#### Literatura cytowana w tekście

1. В. В. Гурецкий, *Об одной задаче оптимального управления*, Изв. АН СССР, Механика, 1, 1965.
2. В. В. Гурецкий, *Предельные возможности защиты оборудования от воздействия ударов*, Изв. АН СССР, Механика, 2, 1965.
3. М. З. Коловский, *Нелинейная теория виброзащитных систем*, Изд. «Наука», Москва 1966.
4. М. З. Коловский, *Об оптимальной амортизации*, Машиноведение, 5, 1966.
5. B. OLSZOWSKI, *Efficiency of the optimal shock isolation*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., 5, 13 (1968).
6. B. OLSZOWSKI, *Kształtowanie dynamiczne elementów konstrukcji*, Mech. Teor. Stos., 3, 7 (1969).
7. F. I. NIORDSON, *On the optimal design of a vibrating beam*, Quart. Appl. Math., 1, 23 (1965).
8. M. J. TURNER, *Design of minimum mass structures with specified natural frequencies*, AIAA-Journal, 3, 5 (1967).
9. J. E. TAYLOR, *Minimum mass bar for axial vibration at specified natural frequency*, AIAA-Journal, 10, 5 (1967).
10. С. W. MERRIAM III, *Teoria optymalizacji i projektowanie układów sterowania automatycznego*, WNT, Warszawa 1967.
11. G. HADLEY, *Nonlinear and Dynamic Programming*, Addison-Wesley Publishing Company, London 1964.

#### Резюме

#### ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В работе, обсуждается вопрос оптимального расчета стержневой, консольной системы колеблющейся в установившемся режиме, подверженной гармоническому вынуждению, действующему на одну из сосредоточенных масс. Этот расчет проводится при фиксированной структуре системы, путем оптимального подбора двух независимых параметров

определяющих отношения масс и жесткости, методом минимизации амплитуды упругой энергии системы. Даются практические правила подбора параметров для двух случаев вынуждения, действующего или на одну или другую сосредоточенную массу и номограмму, определяющую взаимную зависимость частот собственных колебаний системы от параметров оптимизации. Результаты обсуждений иллюстрируются числовым примером.

#### Summary

#### PARAMETRIC OPTIMIZATION OF A VIBRATING SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

Discussed here is the problem of the optimum shaping of a vibrating cantilever system in steady state under the influence of harmonic force acting on one of the concentrated masses. The shaping is carried out with a fixed structure of the system through an optimum selection of two independent parameters which determine the ratios of the masses and rigidities by the way of minimization of the amplitude of elastic energy of the system. Practical rules of selection of parameters are given for two cases of forcing acting either on one concentrated mass, or the other, together with a nomogramme determining the mutual dependence between the eigen frequencies and the parameters of optimization.

The results of the considerations are illustrated by a numerical examples.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 czerwca 1969 r.*

---