

STATECZNOŚĆ SPRĘŻYSTEGO PASMA Z WIĘZAMI WEWNĘTRZNYM

ALEKSANDER R A C Z E W (SOFIA)

Zagadnienie stateczności długich, sprężystych prętów i pasm było już przedmiotem szeregu prac.

W najogólniejszym przypadku skończonych, trójwymiarowych odkształceń zagadnienie to zostało rozwiązane dla ortotropowego materiału sprężystego [1]. Wydaje się rzeczą interesującą poszukiwanie rozwiązań dla innych klas materiałów. W szczególności duże znaczenie teoretyczne i praktyczne mają przypadki, w których składowe tensora odkształcenia nie są niezależne, lecz zachodzą między nimi pewne związki. W przypadku materiału izotropowego związki te wynikają z założeń o jego własnościach fizycznych.

Dla materiałów anizotropowych są one wynikiem założeń o strukturze materiału. Zależności między składowymi tensora odkształcenia mogą wreszcie być wprowadzone w celu uproszczenia rozwiązania danego problemu. Przykładem pierwszej z wymienionych możliwości jest założenie nieściśliwości materiału. Konsekwencją tego założenia jest stałość trzeciego niezmiennika tensora odkształcenia. Przykładem materiału z więzami wewnętrznymi drugiego rodzaju jest ośrodek sprężysty zbrojony gęstą siecią nierozciągliwych nici. Wreszcie jako przykład trzeciej z wymienionych możliwości mogą służyć hipotezy stanu odkształcenia, stosowane w teorii cienkich płyt i powłok.

Wszystkie omówione powyżej założenia są w istocie ograniczeniami na składowe tensora odkształcenia. Przy rozpatrywaniu zagadnień stateczności wydaje się więc najbardziej celowe zastosowanie teorii więzów wewnętrznych. Stosowane czasami inne podejście, polegające na rozdzieleniu wielkości na podstawowe i drugorzędne, prowadzi do niepotrzebnych nieściśliwości.

Zagadnienie stateczności długiego pasma z materiału neo-hookean zostało rozwiązane w pracach [2, 3, 4 i 5]. Rozwiązanie zagadnienia stateczności długich prętów, otrzymane przez zastosowanie założeń upraszczających klasycznej teorii, jest przedstawione w pracy [6]. W pracy tej rozpatruje się materiał jak ośrodek bez więzów wewnętrznych.

Niniejsza praca zawiera ściśle rozwiązanie zagadnienia stateczności długiego pasma o przekroju prostokątnym z nieliniowego materiału sprężystego. O materiale zakładamy, że jest nieodkształcalny w kierunku poprzecznym. Warunek utraty stateczności został wyprowadzony przy użyciu metody nałożenia małego odkształcenia na wstępne odkształcenie skończone.

1. WSTĘPNY, SKOŃCZONY STAN ODKSZTAŁCENIA

Przedmiotem rozważań jest długie pasmo o przekroju prostokątnym. Niech \mathring{B} oznacza stan nieodkształcony pasma, a B stan odkształcony.

W stanie \mathring{B} pasmo ma wysokość h_0 i szerokość $2b$ (rys. 1). O materiale pasma zakładamy, że jest hipersprężysty i jednorodny. Zakładamy ponadto, że na materiał są nałożone więzy wewnętrzne, uniemożliwiające odkształcenie w kierunku poprzecznym. Tak więc pod wpływem obciążenia P pasmo przechodzi w stan B , w którym ma wysokość h i niezmienną szerokość $2b$. W B wprowadzamy współrzędne kartezjańskie x, y, z , które będziemy uważać za współrzędne konwekcyjne $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3\}$. Współrzędne kartezjańskie x_i dowolnego punktu w \mathring{B} i współrzędne kartezjańskie y_i tego samego punktu w B wyrażają się przez współrzędne konwekcyjne w następujący sposób:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= \frac{y}{\lambda}, & x_3 &= z \\ y_1 &= x, & y_2 &= y, & y_3 &= z, \end{aligned}$$

gdzie λ jest parametrem odkształcenia.

Określenie stanu odkształcenia i naprężenia pasma opierać się będzie na teorii skończonych odkształceń materiałów z więzami wewnętrznymi [7].

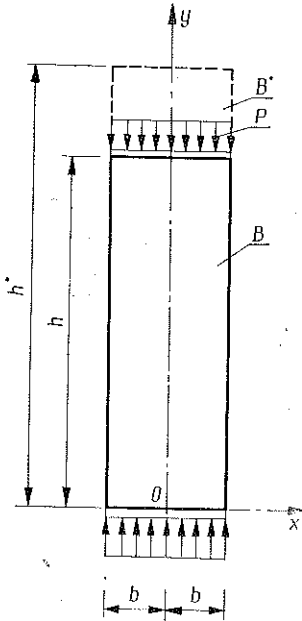
Tensory metryczne g_{ij} w stanie \mathring{B} i G^{IJ} w stanie B mają następujące kontrawariantne i kowariantne współrzędne:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} g_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & g^{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ G_{IJ} &= G^{IJ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$g = \det g_{ij} = \frac{1}{\lambda^2}, \quad G = \det G_{IJ} = 1.$$

Tensor odkształcenia ma współrzędne

$$(1.3) \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



Rys. 1.

a jego niezmienniki są równe

$$(1.4) \quad I_1 = g^{ij} G_{ij} = 2 + \lambda^2, \quad I_2 = g_{ij} G^{ij} I_3 = 1 + 2\lambda^2, \quad I_3 = \frac{G}{g} = \lambda^2.$$

Jak wykazano w pracy [7], występowanie więzów wewnętrznych w ośrodku opisuje się przez podanie zależności między współrzędnymi tensora odkształcenia w odpowiednim układzie współrzędnych krzywoliniowych $\bar{\theta}^i$, na ogół różnym od θ^i , tj.

$$(1.5) \quad f_m(\bar{\gamma}_{ij}) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad n < 6.$$

W naszym przypadku najbardziej naturalne jest przyjęcie $\bar{\theta}^i = \theta^i$, tj. $\bar{\theta}^i$ są współrzędnymi kartezjańskimi w stanie B . Wówczas żądany warunek nieodkształcalności w kierunku poprzecznym ma postać

$$(1.6) \quad \gamma_{11} = 0.$$

Jak wynika z (1.6) dla przyjętego odkształcenia równość (1.9) jest spełniona tożsamościowo.

Kontrawariantne współrzędne tensora naprężenia są następujące:

$$(1.7) \quad \tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \psi B^{ij} + p G^{ij} + \sum_{m=1}^n q_m \frac{\partial f_m}{\partial \bar{\gamma}_{rs}} \left(\frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\theta}^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial \bar{\theta}^s} + \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\theta}^s} \frac{\partial \theta^j}{\partial \bar{\theta}^r} \right),$$

gdzie

$$(1.8) \quad \Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad p = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3},$$

$$B^{ij} = I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{js} G_{rs},$$

a $W(I_1, I_2, I_3)$ jest funkcją energii odkształcenia dla rozpatrywanego sprężystego materiału. Funkcje skalarne q_m ($m < 6$) należy określić z warunków brzegowych i warunków równowagi.

W rozpatrywanym przypadku stosując (1.7) i (1.8) otrzymujemy:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \tau^{11} &= \Phi + (1 + \lambda^2)\psi + p + 2q_1, \\ \tau^{22} &= \lambda^2 \Phi + 2\lambda^2 \psi + p = -P, \\ \tau^{33} &= \Phi + (1 + \lambda^2)\psi + p, \\ \tau^{12} &= \tau^{23} = \tau^{13} = 0. \end{aligned}$$

Przy braku sił masowych równania różniczkowe równowagi mają postać

$$(1.10) \quad \tau^{ij}_{,i} + \Gamma_{ik}^i \tau^{kj} + \Gamma_{ik}^j \tau^{ik} = 0,$$

gdzie Γ_{jk}^i są symbolami Christoffela drugiego rodzaju, które przy naszym wyborze współrzędnych są równe zero. Po podstawieniu (1.9) do (1.10) stwierdzamy, że równania (1.10) są spełnione tożsamościowo, wtedy gdy $q_1 = \text{const}$. Niewiadomy skalar q_1 można wyznaczyć z warunków brzegowych na ścianach $x = \pm b$, gdzie $\tau^{11} = 0$. Z warunków tych otrzymujemy

$$(1.11) \quad q_1 = \frac{1}{2} [\Phi + (1 + \lambda^2)\psi + p].$$

2. DODATKOWE MAŁE ODKSZTAŁCENIE

Pasma odkształcone w sposób skończony poddajemy dodatkowemu małemu odkształceniu, określone przez pole wektora przemieszczenia εw , gdzie ε jest małym parametrem. Ciało przechodzi w nowy stan, oznaczony przez B' , i wszystkie wielkości związane ze stanem naprężenia i odkształcenia doznają przyrostów, których liniową część względem ε będziemy oznaczać «primem». Dalej oznaczać będziemy fizyczne składowe wektora w w wybranych współrzędnych konwencyjnych przez u, v i w . Rozpatrujemy przypadek płaskiego dodatkowego odkształcenia, kiedy $u = u(x, y)$ $v = v(x, y)$, $w = 0$.

Stosując teorię małych odkształceń, nałożonych na odkształcenia skończone, otrzymujemy następujące wyrażenia dla liniowych przyrostów wielkości charakteryzujących stan odkształcenia:

$$G'_{ij} = w_{i,j} + w_{j,i} - 2I_{ij}^k w_k = \begin{bmatrix} 2u_{,x} & u_{,y} + v_{,x} & 0 \\ u_{,y} + v_{,x} & 2v_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G'^{ij} = -G^{ir} G^{js} G'_{rs} = G'_{ij},$$

$$(2.1) \quad \gamma'_{ij} = \frac{1}{2} G'_{ij} = \begin{bmatrix} u_{,x} & \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & 0 \\ \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) & v_{,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$I'_1 = g^{rs} G'_{rs} = 2(u_{,x} + \lambda^2 v_{,y}),$$

$$I'_2 = g_{rs} (G'^{rs} I_3 + G^{rs} I'_3) = 2(1 + \lambda^2)u_{,x} + 4\lambda^2 v_{,y},$$

$$I'_3 = I_3 G'^{ij} G'_{ij} = 2\lambda^2(u_{,x} + v_{,y}).$$

W ogólnym przypadku równania więzów wewnętrznych (1.5) dla stanu B' przyjmują postać

$$(2.2) \quad f_m(\bar{\gamma}_{ij} + \varepsilon \bar{\gamma}'_{ij}) = 0.$$

Rozkładając lewą stronę (2.2) w szereg względem ε stwierdzamy, że muszą być spełnione następujące warunki:

$$(2.3) \quad \frac{\partial f_m}{\partial \bar{\gamma}_{rs}} \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^s} \bar{\gamma}'_{ij} = 0.$$

W przypadku rozpatrywanego w niniejszej pracy warunku (1.6) z (2.3) wynika, że dodatkowe odkształcenie powinno spełniać równanie

$$(2.4) \quad \gamma'_{11} = u_{,x} = 0.$$

Liniowe części przyrostów współrzędnych tensora naprężenia są określone przez wyrażenie

$$(2.5) \quad \tau'^{ij} = \Phi' g^{ij} + \psi' B^{ij} + \psi B'^{ij} + p G'^{ij} + p' G^{ij} + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^r} \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^s} + \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^s} \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^r} \right) \left[q_m \frac{\partial \theta^m}{\partial \theta^p} \frac{\partial \theta^v}{\partial \theta^q} \gamma'_{uv} \frac{\partial^2 f_m}{\partial \bar{\gamma}_{rs} \partial \bar{\gamma}_{pq}} + q'_m \frac{\partial f_m}{\partial \bar{\gamma}_{rs}} \right],$$

gdzie

$$B'^{ij} = (g'^{ij} g'^{rs} - g'^{ir} g'^{js}) G'_{sr},$$

$$\Phi' = A_{11} I'_1 + A_{12} I'_2 + \left(A_{13} - \frac{\Phi}{2I_3} \right) I'_3,$$

$$\Psi' = A_{21} I'_1 + A_{22} I'_2 + \left(A_{23} - \frac{\Phi}{2I_3} \right) I'_3,$$

$$P' = (A_{31} I'_1 + A_{32} I'_2 + A_{33} I'_3) I_3 + \frac{\Phi}{2I_3} I'_3,$$

$$A_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Po wykorzystaniu (2.4) i podstawieniu odpowiednich związków do wyrażeń na składowe tensora naprężenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} \tau'^{11} &= c_{12} v_{,y} + q'_1, \\ \tau'^{22} &= c_{22} v_{,y}, \\ \tau'^{33} &= c_{12} v_{,y}, \\ \tau'^{12} &= c(u_{,y} + v_{,x}), \quad \tau'^{13} = \tau'^{23} = 0. \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} c_{12} &= -\Phi + (\lambda^2 - 1)\psi + p + 2\lambda^2(A_{11} + \lambda^2 A_{33}) + 2\lambda^2(1 + \lambda^2)(2A_{22} + A_{13}) + \\ &\quad + 2\lambda^2(3 + \lambda^2)A_{12} + 2\lambda^2(1 + 3\lambda^2)A_{23}, \\ c_{22} &= -\tau'^{22} + 2\lambda^4(A_{11} + 2A_{22} + A_{33} + 4A_{12} + 4A_{23} + 2A_{13}), \\ c_{66} &= -\lambda^2\psi - p, \end{aligned}$$

a q_1 jest niewiadomą funkcją skalarną.

Dodatkowy tensor τ'^{ij} spełnia następujące równania różniczkowe:

$$\tau'^{ij}_{,i} + \Gamma^i_{ik} \tau'^{kj} + \Gamma^j_{ik} \tau'^{ik} + \Gamma'^j_{ik} \tau^{ik} + \Gamma'^i_{ik} \tau^{kj} = 0,$$

gdzie Γ^j_{ik} są liniowymi częściami przyrostów symboli Christoffela. Dla wybranych współrzędnych konwencyjnych $\Gamma'^j_{ik} = \Gamma^j_{ik}$.

Po wstawieniu odpowiednich wyrazów z (1.9) i (2.8) do (2.10) i uwzględnieniu (2.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} (c_{66} + \tau'^{22}) u_{,yy} + (c_{12} + c_{66}) v_{,xy} + q'_{1,x} &= 0, \\ c_{66} v_{,xx} + (c_{22} + 2\tau'^{22}) v_{,yy} &= 0. \end{aligned}$$

Równania (2.11) wraz z (2.3) tworzą liniowy jednorodny układ równań różniczkowych na trzy niewiadome funkcje u, v i q'_1 . Współczynniki układu są niezależne od x oraz y , a zależą jedynie od początkowego stanu odkształcenia, określonego przez parametr odkształcenia λ .

Dodatkowe małe odkształcenie musi spełniać warunki brzegowe nałożone na badane pasmo. Ponieważ ściany $x = \pm b$ są nieobciążone, muszą zachodzić związki

$$(2.12) \quad \tau'^{11} = 0, \quad \tau'^{12} = 0, \quad x = \pm b.$$

Po skorzystaniu z (2.8) warunek (2.12) przyjmuje postać

$$(2.13) \quad c_{12} v_{,y} + q'_1 = 0, \\ u_{,y} + v_{,x} = 0, \quad \text{gdy} \quad x = \pm b.$$

Przyjmujemy, że pasmo jest ściskane między dwiema gładkimi sztywnymi płytami, tak że na płaszczyznach $y=0$ i $y=h$ są spełnione warunki

$$(2.14) \quad v = 0, \\ \tau'^{12} = c_{66} (u_{,y} + v_{,x}) = 0, \quad \text{gdy} \quad y = 0, \quad y = h.$$

3. WARUNKI UTRATY STATECZNOŚCI PASMA

Przy badaniu stateczności pasma przyjmujemy kryterium, zgodnie z którym zachodzi utrata stateczności, jeśli istnieje niezerowe dodatkowe odkształcenie, spełniające odpowiednie równania różniczkowe wraz z warunkami brzegowymi. Tak więc zagadnienie wyznaczania wartości krytycznych parametru odkształcenia λ sprowadza się do poszukiwania wartości własnych układu równań różniczkowych (2.11) i (2.3) przy jednorodnych warunkach brzegowych (2.13) i (2.14).

Poszukujemy rozwiązania zagadnienia w postaci

$$(3.1) \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \alpha_n y, \\ v = \sum_{n=1}^{\infty} f_{1n}(x) \sin \alpha_n y, \\ q'_1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}(x) \cos \alpha_n y,$$

gdzie A_n i α_n są niewiadomymi stałymi, a $f_{1n}(x)$ i $f_{2n}(x)$ niewiadomymi funkcjami, które określać będziemy z równań równowagi i warunków brzegowych.

Po podstawieniu (3.1) do równań różniczkowych (2.11) i (2.3) otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(3.2) \quad f''_{1n} - k^2 \alpha_n^2 f_{1n} = 0, \\ \alpha_n (c_{12} + c_{66}) f'_{1n} + f'_{2n} = \alpha_n^2 A_n (c_{66} + \tau'^{22}),$$

gdzie

$$(3.3) \quad k^2 = \frac{c_{22} + 2\tau'^{22}}{c_{66}}.$$

Rozwiązanie ogólne układu (3.2) ma postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} f_{1n}(x) &= C_{1n} \operatorname{sh} \alpha_n kx + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha_n kx, \\ f_{2n}(x) &= -\alpha_n (c_{12} + c_{66}) [C_{1n} \operatorname{sh} \alpha_n kx + C_{2n} \operatorname{ch} \alpha_n kx] + \\ &\quad + \alpha_n^2 A_n (c_{66} + \tau^{22}) x + B_n, \end{aligned}$$

gdzie C_{1n} , C_{2n} i B_n są stałymi całkowania.

Jeśli (3.1) podstawimy do warunków brzegowych (2.14), to stwierdzamy, że parametry α_n są pierwiastkami równania

$$(3.5) \quad \sin \alpha_n h = 0, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{h}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Po podstawieniu (3.1) do pozostałych czterech warunków brzegowych (2.13) otrzymujemy

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \alpha_n c_{12} f_{1n}(\pm b) + f_{2n}(\pm b) &= 0, \\ f'_{1n}(\pm b) - \alpha_n A_n &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli całki ogólne (3.4) podstawimy do (3.6), to otrzymamy jednorodny układ algebraiczny na cztery stałe C_{1n} , C_{2n} , A_n i B_n . Układ ten ma rozwiązanie niezerowe, gdy jego wyznacznik jest równy zeru.

Odpowiada to obojętnej równowadze pasma. Po prostych obliczeniach równanie stateczności otrzymujemy w postaci

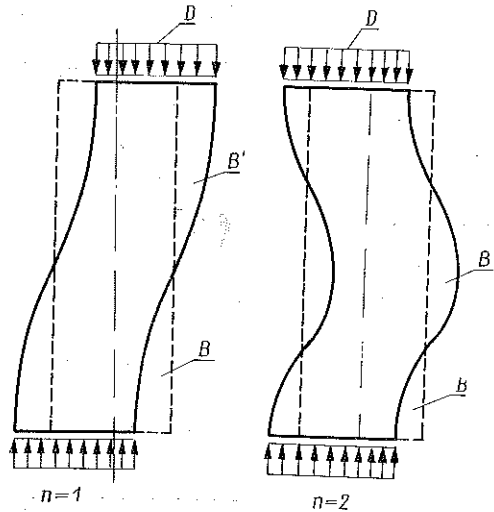
$$(3.7) \quad \begin{aligned} \frac{\operatorname{th} k\kappa}{k\kappa} - \frac{c_{66} + \tau^{22}}{c_{66}} &= 0, \\ \kappa &= \frac{n\pi b}{\lambda h_0}. \end{aligned}$$

Otrzymana z (3.7) najmniejsza wartość parametru λ dla określonych wymiarów pasma i potencjału sprężystego W wyraża poszukiwane odkształcenie, przy którym zachodzi utrata stateczności. Po wyznaczeniu krytycznego λ z (1.9) można wyznaczyć krytyczne obciążenie:

$$(3.8) \quad P_{kr} = -\Phi(\lambda_{kr}) - (1 + \lambda_{kr}^2) \psi(\lambda_{kr}) - p(\lambda_{kr}).$$

Kształt pasma przy obciążeniu krytycznym dla $n=1$ pokazany jest na rys. 2a, a dla $n=2$ — na rys. 2b. Przypadek $n=2$ odpowiada wyboczeniu pasma utwierdzonego, przy czym warunek $u(0) = u(h) = 0$ można spełnić przez dodanie do znalezionego rozwiązania sztywnego przemieszczenia ciała.

Zbadamy niektóre szczególne przypadki równania stateczności (3.7).



Rys. 2.

Niech stosunek $b/h \rightarrow \infty$; wtedy $\kappa \rightarrow \infty$ i $\text{th } k\kappa \rightarrow 1$. W tym przypadku pierwszy wyraz w warunku (3.7) dąży do zera i warunek przyjmuje postać

$$(3.9) \quad \tau^{22} = -c_{66}.$$

Po podstawieniu odpowiednich wyrażeń na τ^{22} i c_{66} otrzymujemy

$$(3.10) \quad \frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} = 0.$$

Dla danego potencjału sprężystego W pierwiastek równania (3.10) [gdymie zmienniki odkształcenia mają postać (1.4)] jest poszukiwanym krytycznym odkształceniem. Jest to przypadek utraty stateczności przez nieskończone, grube pasmo poddane ścisnaniu.

W przypadku fizycznie liniowego materiału i małych gradientów przemieszczeń $C_{66} = G$, gdzie G jest modułem sprężystości postaciowej. Z warunku (3.3) wynika, że graniczne ścisnienie (takie, że dla każdego mniejszego ścisnienia pasmo nie traci stateczności) nie przekracza modułu sprężystości G .

Zatrzymamy się teraz na przypadku stosunkowo wąskich pasm, gdy $\kappa < 1$. Spełniona jest wówczas asymptotyczna równość

$$(3.11) \quad \text{th } k\kappa \approx k\kappa - \frac{1}{3}(k\kappa)^3 + \frac{2}{15}(k\kappa)^5 - \dots$$

Po podstawieniu (3.11) do (3.7) równanie stateczności z dokładnością do wielkości rzędu $O(\kappa^6)$ przyjmuje postać

$$(3.12) \quad \frac{\tau^{22}}{c_{66}} + \frac{1}{3} \kappa^2 k^2 - \frac{2}{15} \kappa^4 k^4.$$

Przy małych odkształceniach i liniowej fizycznej zależności między tensorem naprężenia i odkształcenia mamy [6] $c_{22} = \lambda + 2\mu$, $c_{66} = \mu = G$, $\kappa = \pi b/h_0$, gdzie λ i μ są stałymi Lamégo. Poszukamy rozwiązania dla τ_{kr}^{22} w postaci

$$(3.13) \quad \tau_{kr}^{22} = -P_{kr} = \sum_{\alpha=0}^n P_{\alpha} \kappa^{\alpha}.$$

Po wykorzystaniu (3.3) i prostych przekształceń z (3.12) otrzymujemy

$$(3.14) \quad P_{kr} = \frac{(\lambda + 2\mu) n^2 \pi^2 b^2}{3h_0^2} \left[1 - \frac{n^2 \pi^2 b^2}{15h_0^2} \left(6 \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} + 5 \right) \right].$$

Siłę P_{kr} możemy również wyrazić za pomocą stałych technicznych E (moduł Younga) i ν (współczynnik Poissona):

$$(3.15) \quad P_{kr} = \frac{E}{(1-\nu^2)(1-2\nu)} \frac{n^2 \pi^2 b^2}{3h_0^2} \left[1 - \frac{n^2 \pi^2 b^2}{15h_0^2} \left(12 \frac{1-\nu}{1-2\nu} + 5 \right) \right].$$

Dla porównania przytoczymy przybliżone wyrażenie na krytyczne naprężenie otrzymane dla sprężystego ośrodka liniowego bez więzów wewnętrznych [8]:

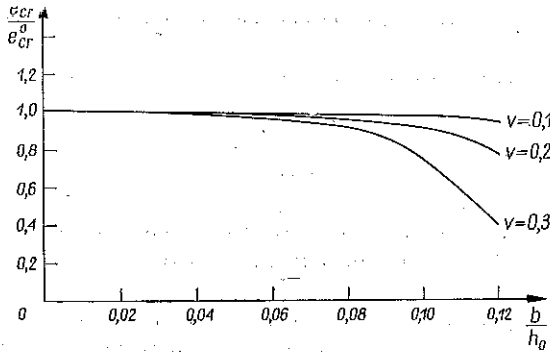
$$(3.16) \quad P_{kr}^* = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{n^2 \pi^2 b^2}{3h_0^2} \left[1 - \frac{n^2 \pi^2 b^2}{15h_0^2} \left(2 \frac{6-\nu}{1-\nu} + 5 \right) \right].$$

Odpowiednie wzory dla odkształceń krytycznych sprężystego materiału liniowego z więzami i bez więzów są następujące

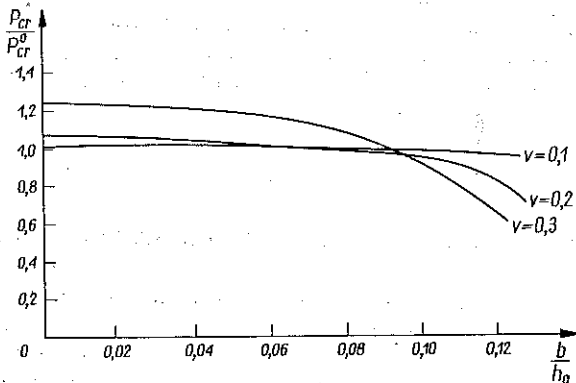
$$(3.17) \quad e_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 b^2}{3h_0^2} \left[1 - \frac{n^2 \pi^2 b^2}{15h_0^2} \left(12 \frac{1-\nu}{1-2\nu} + 5 \right) \right],$$

$$e_{kr}^* = \frac{n^2 \pi^2 b^2}{3h_0^2} \left[1 - \frac{n^2 \pi^2 b^2}{15h_0^2} \left(2 \frac{6-\nu}{1-\nu} + 5 \right) \right].$$

Na rys. 2 i 3 są podane wykresy P_{kr}/P_{kr}^0 i e_{kr}/e_{kr}^0 w zależności od b/h_0 dla wąskich, sztywno zamocowanych na końcach pasm ($n=2$) dla liniowego materiału sprężystego.



Rys. 3.



Rys. 4.

Z dotychczasowych rozważań wynika, że występowanie więzów poprzecznych zmniejsza krytyczne odkształcenie e_{kr} i powoduje zwiększenie P_{kr} , gdy b/h_0 spełnia nierówność

$$(3.18) \quad \frac{b}{h_0} < \frac{1,235\nu}{n} \sqrt{\frac{(1-\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)^3(17-22\nu) - (1-2\nu)^2(17-7\nu)}}.$$

Dla większych b/h_0 lecz takich, że wyrażenia (3.15) i (3.16) są wystarczająco ściśle, krytyczne obciążenie ściskające dla materiału z więzami wewnętrznymi rozpatrywanego rodzaju maleje w porównaniu z przypadkiem klasycznym.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. WESOŁOWSKI, *Rovinný problem ztraty stability v tahu*, Aplikace matematiki, **10**, 1, 1965.
2. Z. WESOŁOWSKI, *Stateczność pasma ściskanego i ścinanego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, Nr 9, 1962.
3. В. Бидерман, *Устойчивость стержня из негукковского материала*, Инженерный журнал „Механика тв. тела”, **3**, 1968.
4. M. LEVINSON, *Stability of a compressed neo-hookean rectangular parallelepiped*, J. Mech. and Phys. Solids, **16**, 6, 1968.
5. J. NOWIŃSKI, *On the elastic stability of thick columns*, Acta mech., **8**, 4, 1969.
6. Ал. Рачев, *Устойчивость и колебания длинного стержня прямоугольного сечения при конечной упругой деформации*, Изв. ИТМ, **5**, 1968.
7. A. GREEN, I. ADKINS, *Large elastic deformations and nonlinear continuum mechanics*, Clarendon Press, Oxford 1960.
8. А. Гузь, *Об устойчивости полосы*, Изв. АН СССР, Мех. тв. тела, **6**, 1969.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОСЫ ИЗ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА
С ВНУТРЕННИМИ СВЯЗЯМИ

Решена задача об устойчивости длинной полосы из нелинейного упругого материала, который из-за наличия внутренних связей не может деформироваться в поперечном направлении. Условие потери устойчивости выведено из требования существования ненулевого решения для дополнительной возможности деформации, наложенной на начальную конечную деформацию. Рассмотрены случаи бесконечно широкой и очень узкой полосы. В последнем случае, когда деформации малы, а материал линейный—критические деформации и нагрузки сравнены с этими соответствующими для линейного материала без связей.

SUMMARY

STABILITY OF A BAND OF ELASTIC MATERIAL WITH CONSTRAINTS

The problem of stability of a long band made of nonlinear elastic material, which possesses constraints and cannot be deformed in transverse direction is solved. The condition of stability loss is deduced from the requirement of existence a nontrivial solution for the small additional possible deformation superposed on the initial finite deformation. The limiting cases of an infinite wide and very narrow band are considered. In the latter case when the strains are small and the material is linear the critical deformations and loads are compared with those corresponding to linear material without constraints.

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 kwietnia 1971 r.