

## UGIĘCIA PŁYT ORTOTROPOWYCH O ZMIENNYCH SZTYWNOŚCIACH I PEWNYCH NIECIĄGŁYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

### Oznaczenia

- $\{f(x, y)\}$  funkcja liczbowa,  $y \geq 0$ ,  
 $f(x)$  funkcja operatorowa parametryczna,  
 $s$  operator różniczkowy,  
 $h^y$  operator przesunięcia,  $y_r \geq 0$ ,  
 $P_A$  pochodna algebraiczna,  
 $f^{(n)}(x)$   $n$ -ta pochodna ciągła funkcji operatorowej.

### WSTĘP

W pracy zastosowano pochodną algebraiczną do obliczania ugięć prostokątnych płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach i pewnych nieciągłych warunkach brzegowych. Rozważania ograniczono do przypadków, w których sztywności wyrażają się wielomianami tylko jednej zmiennej  $y$ . Rozpatrzono płyty spoczywające na jednoparametrowym sprężystym podłożu typu Winklera o dwóch przeciwległych krawędziach  $x=0$  i  $x=a$  swobodnie podpartych, nieciągłych warunkach brzegowych na krawędzi  $y=0$  i dowolnych ciągłych warunkach brzegowych na krawędzi  $y=b$ .

### 1. PŁYTY O KRAWĘDZI $y = 0$ SZTYWNO UTWIERDZONEJ, POD OBCIĄŻENIEM CIĄGŁYM ZE WZGLĘDU NA ZMIENNĄ $y$

Przyjmując, że sztywności i współczynnik podłoża są funkcjami tylko  $y$ , mającymi postać

$$D_{11} = \sum_{r=0}^k \delta_{11r} y^r, \quad D_{12} = \sum_{r=0}^k \delta_{12r} y^r,$$

$$D_{22} = \sum_{r=0}^k \delta_{22r} y^r, \quad D_{66} = \sum_{r=0}^k \delta_{66r} y^r,$$

$$K = \sum_{r=0}^k \kappa_r y^r,$$

równanie różniczkowe rozpatrywanej płyty [1]

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + Kw = q$$

można przedstawić w postaci

$$(1.2) \quad D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \\ + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + Kw = q,$$

gdzie

$$H = D_{12} + 2D_{66} = \sum_{r=0}^k \delta_{Hr} y^r.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$P_A P_A \varphi = P_A^2 \varphi, \quad P_A P_A^{-1} \varphi = P_A^t \varphi, \quad P_A^0 \varphi = \varphi$$

i uwzględniając, że

$$\bigwedge_{\{\varphi(y)\} \in \kappa} (P_A \{\varphi(y)\} = \{-y\varphi(y)\})$$

(gdzie  $\kappa$  jest pewną klasą funkcji zdefiniowaną w pracy [2]) oraz że

$$w \in \kappa, \quad \frac{\partial^{t+l} w}{\partial x^t \partial y^l} \in \kappa \quad \text{dla} \quad t+l \leq 4,$$

równanie (1.2) z warunkami brzegowymi

$$w(0, y) = 0, \quad w(a, y) = 0, \quad w(x, 0) = 0, \\ w_{x^2}(0, y) = 0, \quad w_{x^2}(a, y) = 0, \quad w_y(x, 0) = 0$$

sprowadza się do równania operatorowego

$$(1.3) \quad \sum_{r=0}^k (-1)^r [P_A^r (\delta_{11r} w^{(4)} + 2\delta_{Hr} s^2 w'' + \delta_{22r} s^4 w + \kappa_r w) - \\ - 2r P_A^{r-1} (\delta_{Hr} s w'' + \delta_{22r} s^3 w) + r(r-1) P_A^{r-2} (\delta_{12r} w'' + \delta_{22r} s^2 w)] = \\ = q + \delta_{220} [s w_{y^2}(x, 0) + w_{y^3}(x, 0)] + \delta_{221} w_{y^2}(x, 0),$$

z operatorowymi warunkami

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(a) = 0, \quad w''(a) = 0.$$

Przyjmując następnie

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \alpha_m x, \quad w_{y^2}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \alpha_m x,$$

$$w_{y^3}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \alpha_m x, \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \alpha_m x,$$

gdzie  $\alpha_m = m\pi/a$ , z (1.3) otrzymujemy

$$(1.4) \quad \sum_{r=0}^k (-1)^r [P_A^r w_m (\alpha_m^4 \delta_{11r} - 2\alpha_m^2 \delta_{IIr} s^2 + \delta_{22r} s^4 + \kappa_r) +$$

$$+ 2r P_A^{r-1} w_m (\alpha_m^2 \delta_{Hr} s - \delta_{22r} s^3) - r(r-1) P_A^{r-2} w_m (\alpha_m^2 \delta_{12r} - \delta_{22r} s^2)] =$$

$$= q_m + \delta_{220} (A_m s + B_m) + \delta_{221} A_m.$$

Przedstawiając operatory  $w_m$  w postaci

$$(1.5) \quad w_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \frac{1}{s^n}$$

i uwzględniając, że

$$\bigwedge_{\varphi \in S} \left( P_A \varphi = \frac{d}{ds} \varphi \right),$$

(gdzie  $S$  jest zbiorem wyrażeń wymiernych operatora różniczkowego) oraz że każdy wyraz szeregu (1.5) jest elementem  $S$ , wartości  $c_{mn}$  można wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych.

Po wyznaczeniu współczynników  $c_{mn}$  rozwiązanie jest funkcją

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \sin \alpha_m x.$$

Stałe  $A_m$  i  $B_m$  wyznacza się z warunków brzegowych na krawędzi  $y=b$ .

## 2. PŁYTY O KRAWĘDZI $y=0$ SWOBODNIE PODPARTEJ

W tym przypadku równanie (1.4) przyjmuje postać

$$(2.1) \quad \sum_{r=0}^k (-1)^r [P_A^r w_m (\alpha_m^4 \delta_{11r} - 2\alpha_m^2 \delta_{Hr} s^2 + \delta_{22r} s^4 + \kappa_r) +$$

$$+ 2r P_A^{r-1} w_m (\alpha_m^2 \delta_{Hr} s - \delta_{22r} s^3) - r(r-1) P_A^{r-2} w_m (\alpha_m^2 \delta_{12r} - \delta_{22r} s^2)] =$$

$$= q_m + \delta_{220} E_m s^2 + \delta_{220} B_m + (\delta_{222} - 2\alpha_m^2 \delta_{H0}) E_m.$$

Podobne równanie można łatwo wyprowadzić dla płyty o krawędzi  $y=0$  swobodnej.

3. PLYTY OBCIĄŻONE W SPOSÓB NIECIĄGŁY ZE WZGLĘDU NA ZMIENNĄ  $y$ 

Jeżeli obciążenie określone jest za pomocą funkcji operatorowej

$$q(x) = \sum_{t=0}^j \sum_{m=1}^{\infty} q_{tm} h^{yt} \sin \alpha_m x,$$

to operatory  $w_m$  należy przyjąć w postaci

$$(3.1) \quad w_m = \sum_{t=0}^j \sum_{n=1}^{\infty} c_{tmn} h^{yt} \frac{1}{s^n}.$$

Po podstawieniu (3.1) do (1.4) należy porównać współczynniki przy tych samych operatorach przesunięcia i tych samych potęgach operatora różniczkowego. Otrzymujemy wtedy  $j$  niezależnych związków rekurencyjnych dla  $c_{tmn}$ .

Należy zwrócić uwagę, że teraz współczynniki  $c_{tmn} h^{yt}$  nie są już operatorami liczbowymi, więc

$$(3.2) \quad P_A \left( c_{tmn} h^{yt} \frac{1}{s^n} \right) = (P_A h^{yt}) c_{tmn} \frac{1}{s^n} - c_{tmn} h^{yt} \frac{n}{s^{n+1}}.$$

We wzorze (3.2) występuje pochodna algebraiczna operatora przesunięcia.

Wykażemy, że prawdziwe jest następujące

**TWIERDZENIE.** Jeżeli  $y_t \in R$  ( $R$  jest zbiorem liczb rzeczywistych), to

$$\bigwedge_{y_t \geq 0} (P_A h^{y_t} = -y_t h^{y_t}).$$

Dowód. Niech  $\{F(y)\}$  będzie funkcją klasy  $\kappa$  określoną wzorem

$$(3.3) \quad \{F(y)\} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq y < y_t, \\ f(y - y_t), & \text{jeśli } 0 \leq y_t < y, \end{cases}$$

czyli że

$$(3.4) \quad \{F(y)\} = h^{y_t} \{f(y)\}.$$

Z (3.3) wynika

$$(3.5) \quad P_A \{F(y)\} = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq y < y_t, \\ -y f(y - y_t), & \text{jeśli } 0 \leq y_t < y, \end{cases}$$

a z (3.4)

$$(3.6) \quad P_A \{F(y)\} = (P_A h^{y_t}) \{f(y)\} + h^{y_t} \{P_A f(y)\} = \\ = (P_A h^{y_t}) \{f(y)\} - \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq y < y_t, \\ y f(y - y_t) - y_t f(y - y_t), & \text{jeśli } 0 \leq y_t < y. \end{cases}$$

Z porównania (3.5) i (3.6) wynika już, że

$$P_A h^{y_t} = -y_t h^{y_t}.$$

Wobec tego

$$P_A \left( c_{1mn} h^{y_1} \frac{1}{s^n} \right) = -c_{1mn} h^{y_1} \frac{1}{s^n} \left( y_1 + \frac{n}{s} \right).$$

Po wyznaczeniu współczynników  $c_{1mn}$  rozwiązanie przyjmuje postać

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{t=0}^j c_{1mn} h^{y_1} \frac{1}{s^n} \sin \alpha_m x.$$

W charakterze szczególnego przykładu zastosowania równania (1.4) rozpatrzmy płytę o krawędzi  $y=0$  sztywno utwierdzonej, której sztywności są liniowymi funkcjami  $y$ , mającymi postać

$$D_{11} = \delta_{110} + \delta_{111} y, \quad D_{12} = \delta_{120} + \delta_{121} y,$$

$$D_{22} = \delta_{220} + \delta_{221} y, \quad D_{66} = \delta_{660} + \delta_{661} y,$$

stąd  $H = \delta_{H0} + \delta_{H1} y$ .

Współczynnik podłoża wyraża się funkcją

$$K = \kappa_0 + \kappa_1 y,$$

a obciążenie jest dowolnie rozłożone wzdłuż prostej  $y=y_1$ :

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m h^{y_1} \sin \alpha_m x.$$

Operatory  $w_m$ , zgodnie z (3.1), przedstawimy w postaci

$$(3.9) \quad w_m = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{0mn} + c_{1mn} h^{y_1}) \frac{1}{s^n}.$$

Podstawiając (3.9) do (1.4) znajdziemy

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (c_{0mn} + c_{1mn} h^{y_1}) \left( \frac{\alpha_m^4 \delta_{110} + \kappa_0}{s^n} - \frac{2\alpha_m^2 \delta_{H0}}{s^{n-2}} + \frac{\delta_{220}}{s^{n-4}} \right) - \right. \\ \left. - c_{0mn} \left( -\frac{n(\alpha_m^4 \delta_{111} + \kappa_1)}{s^{n+1}} + \frac{2(n-2)\alpha_m^2 \delta_{H1}}{s^{n-1}} - \frac{(n-4)\delta_{221}}{s^{n-3}} \right) + \right. \\ \left. + c_{1mn} h^{y_1} \left( \frac{\alpha_m^4 \delta_{111} + \kappa_1}{s^n} \left( y_1 + \frac{n}{s} \right) - \frac{2\alpha_m^2 \delta_{H1}}{s^{n-2}} \left( y_1 + \frac{n-2}{s} \right) + \frac{\delta_{221}}{s^{n-4}} \left( y_1 + \frac{n-4}{s} \right) \right) - \right. \\ \left. - 2(c_{0mn} + c_{1mn} h^{y_1}) \left( \frac{\alpha_m^2 \delta_{H1}}{s^{n-1}} - \frac{\delta_{221}}{s^{n-3}} \right) \right] = q_m h^{y_1} + \delta_{220} (A_m s + B_m) + \delta_{221} A_m. \end{aligned}$$

Stąd łatwo otrzymujemy

$$c_{0m1} = 0, \quad c_{0m2} = 0, \quad c_{0m3} = A_m, \quad c_{0m4} = B_m,$$

$$c_{1m1} = 0, \quad c_{1m2} = 0, \quad c_{1m3} = 0, \quad c_{1m4} = \frac{q_m}{\delta_{220} + \delta_{221} y_1}$$

oraz dwa niezależne związki rekurencyjne na  $c_{0mn}$  i  $c_{1mn}$ :

$$c_{0mn} = \frac{1}{\delta_{220}} [(3-n)\delta_{221}c_{0m,n-1} + 2\alpha_m^2\delta_{H0}c_{0m,n-2} + 2(n-4)\alpha_m^2\delta_{H1}c_{0m,n-3} - (\alpha_m^4\delta_{110} + \kappa_0)c_{0m,n-4} + (5-n)(\alpha_m^4\delta_{111} + \kappa_1)c_{0m,n-5}],$$

$$c_{1mn} = \frac{1}{\delta_{220} + \delta_{221}y_1} [(3-n)\delta_{221}c_{1m,n-1} + 2\alpha_m^2(\delta_{H0} + \delta_{H1}y_1)c_{1m,n-2} + 2(n-4)\alpha_m^2\delta_{H1}c_{1m,n-3} - (\alpha_m^4\delta_{110} + \kappa_0 + \alpha_m^4\delta_{111}y_1 + \kappa_1y_1)c_{1m,n-4} + (5-n)(\alpha_m^4\delta_{111} + \kappa_1)c_{1m,n-5}].$$

Po wyznaczeniu  $c_{0mn}$  i  $c_{1mn}$  rozwiązanie przyjmuje postać

$$w = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{0mn} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \sin \alpha_m x, & \text{jeśli } 0 \leq y < y_1, \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_{0mn} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + c_{1mn} \frac{(y-y_1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \sin \alpha_m x, & \text{jeśli } 0 \leq y_1 < y. \end{cases}$$

Stałe  $A_m$  i  $B_m$  wyznacza się z warunków brzegowych na krawędzi  $y=b$ .

Przedstawiona metoda może być z korzyścią stosowana do praktycznych obliczeń. Niezależnie od charakteru obciążenia do wyznaczenia pozostają zawsze tylko dwie stałe całkowania. Także wyznaczanie współczynników  $c_{1mn}$  ze związków rekurencyjnych jest znacznie prostsze od rozwiązywania nieskończonych układów równań algebraicznych. Poza tym metoda ta nadaje się do rozwiązywania płyt o dowolnych nieciągłych warunkach brzegowych na krawędzi  $y=0$ .

#### 4. PŁYTY O PEWNYCH NIECIĄGŁYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH NA KRAWĘDZI $y=0$

Rozważania ograniczymy do płyt o krawędzi  $y=0$  częściowo swobodnie podpartej a na pozostałych częściach sprężystie utwierdzonej i sztywno podpartej. Schematem podstawowym będzie płyta o krawędzi  $y=0$  swobodnie podpartej i obciążonej nie znanym na razie momentem zginającym

$$(4.1) \quad sM^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} sM_m^* \sin \alpha_m x.$$

Prawa strona równania (2.1) dla takiej płyty przyjmuje postać

$$(4.2) \quad q_m + sM_m^* + \delta_{220}E_m s^2 + \delta_{220}B_m + (\delta_{222} - 2\alpha_m^2\delta_{H0})E_m.$$

Jeżeli pomiędzy funkcją wartości kąta ugięcia krawędzi  $y=0$  i funkcją wartości momentu zginającego zachodzi związek

$$(4.3) \quad \{M^*(x)\} = \{\bar{K}(x)w_y(x, 0)\},$$

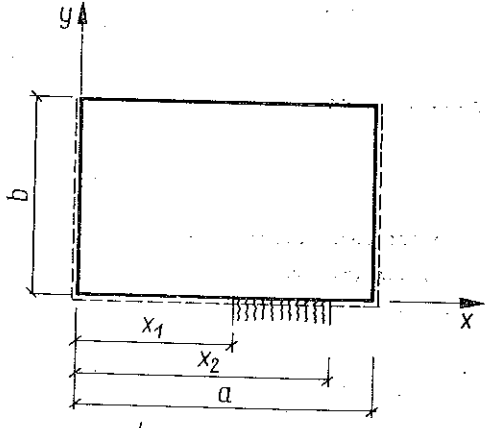
to rozwijając współczynnik  $\bar{K}(x)$  w szereg cosinusowy

$$\bar{K}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{K}_i \left(1 - \frac{1}{2} \delta^{i0}\right) \cos \alpha_i x,$$

gdzie  $\delta^{i0}$  jest symbolem Kroneckera, dochodzimy do nieskończonego układu równań algebraicznych na niewiadomą  $M_m^*$ :

$$(4.4) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\bar{K}_{m-i} - \bar{K}_{m+i}) E_i = M_m^*.$$

Gdy funkcja  $\bar{K}(x)$  jest nieciągła, to krawędź  $y=0$  jest w sposób nieciągły sprężysto utwierdzona. Chcąc zatem rozwiązać taką płytę należy: operatory  $w_m$  przyjąć wg wzoru (3.1), współczynniki  $c_{imn}$  wyznaczyć z równania (2.1) o prawej stronie równej (4.2) (wielkości te będą zależęć od  $E_m, B_m$  i  $M_m^*$ ), stałe  $E_m$  i  $B_m$  uzależnić od  $M_m^*$  wykorzystując warunki brzegowe na krawędzi  $y=b$ , wreszcie z układu (4.4) wyznaczyć  $M_m^*$ .



Rys. 1. Ugięcia płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach i pewnych nieciągłych warunkach brzegowych

Dla płyty o krawędzi  $y=0$  na odcinku  $x_1 < x < x_2$  sprężysto utwierdzonej i sztywno podpartej, przy czym  $\bar{K}(x) = \text{const}$  na tej części i swobodnie podpartej na pozostałych częściach (rys. 1) — układ (4.4) przyjmie postać

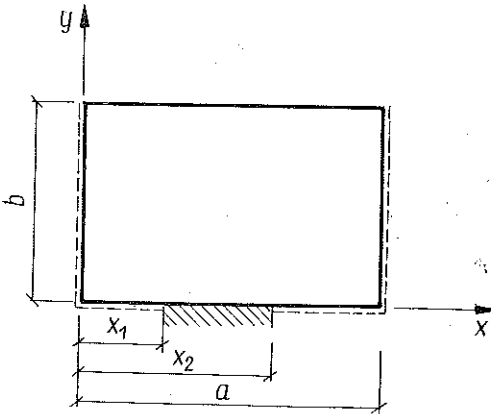
$$(4.5) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\bar{K}}{m-i} (\sin \alpha_{m-i} x_2 - \sin \alpha_{m-i} x_1) - \frac{\bar{K}}{m+i} (\sin \alpha_{m+i} x_2 - \sin \alpha_{m+i} x_1) \right] E_i = M_m^*, \quad \text{jeśli } m \neq i;$$

dla  $m=i$  wyrażenie

$$\frac{\bar{K}}{\pi(m-i)} (\sin \alpha_{m-i} x_2 - \sin \alpha_{m-i} x_1)$$

należy zastąpić wyrażeniem

$$\frac{\bar{K}}{a} (x_2 - x_1).$$



Rys. 2. Ugięcia płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach i pewnych nieciągłych warunkach brzegowych

Dzieląc (4.5) przez  $\bar{K}$ , a następnie przechodząc do granicy, gdy  $\bar{K} \rightarrow \infty$ , otrzymujemy równanie dla płyty o krawędzi  $y=0$  na odcinku  $x_1 < x < x_2$ , a sztywno utwierdzonej i swobodnie podpartej na pozo-

stałych częściach (rys. 2):

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{m-i} (\sin \alpha_{m-i} x_2 - \sin \alpha_{m-i} x_1) - \frac{1}{m+i} (\sin \alpha_{m+i} x_2 - \sin \alpha_{m+i} x_1) \right] E_i = 0,$$

jeśli  $m \neq i$ ; dla  $m = i$  wyrażenie

$$\frac{1}{\pi(m-i)} (\sin \alpha_{m-i} x_2 - \sin \alpha_{m-i} x_1)$$

należy zastąpić wyrażeniem

$$\frac{1}{a} (x_2 - x_1).$$

W ten sam sposób można znaleźć rozwiązanie dla płyty ortotropowej o zmiennych sztywnościach i o dowolnych innych nieciągłych warunkach brzegowych na krawędzi  $y=0$ .

## 5. PŁYTY CIĄGŁE

Również zagadnienia dla ortotropowych płyt ciągłych o zmiennych sztywnościach można łatwo rozwiązać przedstawionym sposobem. Schematem podstawowym płyty podpartej wzdłuż linii  $y = y_{t'}$  ( $t' = 1, 2, 3, \dots, j'$ ) będzie płyta podparta tylko wzdłuż brzegów i obciążona nieznanym na razie obciążeniem

$$q^*(x) = \sum_{t'=1}^{j'} q_{t'm}^* h^{y_{t'}} \sin \alpha_m x.$$

W dalszym ciągu rozważania ograniczymy do płyty o krawędzi  $y=0$  sztywno utwierdzonej pod wpływem ciągłego ze względu na zmienną  $y$  obciążenia użytkowego. Prawa strona równania (1.4) przyjmuje w tym przypadku postać

$$q_m - \left[ \sum_{t'=1}^{j'} q_{t'm}^* h^{y_{t'}} \right] + \delta_{220} (A_m s + B_m) + \delta_{221} A_m.$$

Jeżeli zachodzi związek

$$\{q_{t'}^*(x)\} = \{K_{t'}' w(x, y_{t'})\},$$

gdzie  $K_{t'}' = \text{const}$ , to dla wyznaczenia  $q_{t'm}^*$  otrzymujemy równania

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{t'-1} c_{lmn} \frac{(y_{t'} - y_l)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{K_{t'}'} q_{t'm}^* - \sum_{n=1}^{\infty} c_{0mn} \frac{y_{t'}^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Gdy płyta spoczywa na niepodatnych podporach pośrednich, należy przyjąć

$$\frac{1}{K_{t'}'} = 0, \quad t' = 1, 2, \dots, j'.$$



## 6. PASMA I PÓLPASMA PŁYTOWE

Na koniec wskażemy na możliwość łatwego uzyskania rozwiązania w przypadku ortotropowego pasma i półpasma płytowego o zmiennych sztywnościach.

Zagadnienia dla pasma płytowego o dowolnych warunkach brzegowych na krawędziach  $y=0$  i  $y=b$  rozwiązuje się tak, jak zagadnienia płyt prostokątnych, wyrażając obciążenia i ugięcia pojedynczymi całkami Fouriera. Na przykład dla pasma płytowego o krawędzi  $y=0$  sztywno utwierdzonej i dowolnych warunkach brzegowych na krawędzi  $y=b$ , symetrycznie obciążonego, otrzymujemy

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \sum_{t=0}^J c_{tmn} h^{yt} \frac{1}{s^n} \cos \alpha x dx.$$

Ugięcia półpasm płytowych o krawędzi  $x=0$  swobodnie podpartej wyraża się całkami sinusowymi.

## 7. ZAKOŃCZENIE

Płyty prostokątne o zmiennych sztywnościach były tematem wielu prac. Rozwiązanie dla płyty izotropowej, swobodnie podpartej na obwodzie o liniowo zmiennej sztywności podał już w r. 1934 R. GRAN OLSSON [3]. To samo zagadnienie, za pomocą podwójnych szeregów Fouriera, rozwiązał Z. KĄCZKOWSKI [6], a przybliżone rozwiązanie w prostej postaci otrzymał E. GIANGRECO [7]. W pracach [8 i 9] Z. MAZURKIEWICZ sprowadził problem zginania płyt o zmiennych sztywnościach do równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju. Rozwiązania dla płyt swobodnie podpartych oraz dla płyt o jednym lub dwóch dowolnych brzegach zupełnie swobodnych, pozostałych zaś swobodnie podpartych, a także dla płyt z otworami i o kształtach nietypowych podał A. KACNER [10 i 11]. Ogólne rozwiązania dla niejednorodnych anizotropowych płyt prostokątnych o zmiennych sztywnościach i o dowolnych warunkach brzegowych przy zastosowaniu podwójnej, skończonej transformacji Fouriera i wzoru na transformatę iloczynu dwóch funkcji uzyskał R. SOLECKI [12].

Szczegółowe rozwiązania zostały podane w pracy [13]. Statyką i dynamiką płyt prostokątnych o dowolnie zmiennych grubościach i dowolnych warunkach brzegowych zajmował się w pracy [15] Z. MAZURKIEWICZ. Płytami o zmiennych sztywnościach zajmowali się także R. REISSNER [5] oraz H. D. CONWAY [16 i 17]. Wymienione rozwiązania [12 i 15] umożliwiają spełnienie dowolnych ciągłych warunków brzegowych w przypadku płyt o sztywnościach opisanych za pomocą funkcji dwóch zmiennych, są zatem ogólniejsze od rozwiązania operatorowego podanego w tej pracy.

Trudno byłoby jednak rozwiązać za pomocą sposobów podanych w pracach [11, 12 i 15] zagadnienie płyty o nieciągłych warunkach brzegowych. Zagadnienia dla nieciągłych warunków brzegowych sprowadzano na ogół do równań całkowych Fredholma pierwszego rodzaju np. w pracach [18, 19 i 20] lub do równań drugiego rodzaju np. w pracach [21 i 22].

Nader skomplikowane jądra w przypadku płyt o zmiennych sztywnościach utrudniłyby niezmiernie rachunki. Także zastosowanie innych znanych metod, np. metody równań całkowych singularnych lub metody Wienera-Hopfa nie prowadziłoby do prostych rezultatów.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. MAZURKIEWICZ, *Differential equation of equilibrium and vibration and expressions for the boundary conditions of an orthotropic non-homogeneous plate*, Arch. Mech. Stos., **10**, 5, 755-767, 1958.
2. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
3. R. GRAN OLSSON, *Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Biegesteifigkeit*, Ing. Arch., **5**, 363, 1934.
4. R. GRAN OLSSON, *Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Steifigkeit und beliebiger Belastung*, Der Bauingenieur, **22**, 1/2, 1941.
5. M. E. REISSNER, *Remarks on the theory of bending of plates of variable thickness*, J. Math. Phys., **16**, 1937.
6. Z. KĄCZKOWSKI, *Statics of non-homogeneous rectangular plates and discs*. Non-homogeneity in elasticity and plasticity. Pergamon Press, London, New York, Paris, Los Angeles (1959) s. 77-82.
7. E. GIANGRECO, *Sur le calcul des dalles à rigidité variable*. Non-homogeneity in elasticity and plasticity. Pergamon Press. London, New York, Paris, Los Angeles 1959. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **7**, 2/3, 1959.
8. Z. MAZURKIEWICZ, *The problem of deflection surface of rectangular isotropic and non-homogeneous plate*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **8**, 1, 5-13, 1960.
9. Z. MAZURKIEWICZ, *The problem of bending and free vibration of a simply supported, isotropic, non-homogeneous, rectangular plate*, Arch. Mech. Stos., **12**, 4, 499-521, 1960.
10. A. KACNER, *Bending of plates with variable thickness*, Arch. Mech. Stos., **13**, 3, 393-417, 1961.
11. A. KANCER, *Bending of thin anisotropic plates of variable thickness*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **9**, 4, 1961.
12. R. SOLECKI, *Non-homogeneous anisotropic rectangular plate of variable thickness and arbitrary boundary conditions, General solution*, Arch. Mech. Stos., **14**, 1, 47-60, 1962.
13. R. SOLECKI, *Pewne rozwiązanie dla anizotropowej płyty prostokątnej o zmiennej sztywności*, Rozpr. Inż., **11**, 2, 203-215, 1963.
14. R. SOLECKI, *The non-homogeneous isotropic rectangular plate with arbitrary boundary conditions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **9**, 6, 329-335, 1961.
15. Z. MAZURKIEWICZ, *The statics and dynamics of elastic and heterogeneous rectangular plates with arbitrarily variable thicknesses and arbitrary boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **23**, 1, 1971.
16. H. D. CONWAY, A. LEVY, *Type solution for rectangular plate of variable thickness*, J. Appl. Mech., **26**, 1958.
17. H. D. CONWAY, *The flexure of infinite rectangular plates of varying thickness*, Ing. Arch., 1958.
18. W. NOWACKI, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych*, Arch. Mech. Stos., **3**, 419, 1951.
19. W. NOWACKI, *Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych (II)*, Arch. Mech. Stos., **5**, 193, 1953.
20. W. NOWACKI, *The problem of rectangular plates with mixed boundary conditions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **1**, 10, 1953.
21. W. NOWACKI, S. KALISKI, *Some problems of structural analysis of plates with mixed boundary conditions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. tech., **4**, 233, 1956.
22. S. KALISKI, W. NOWACKI, *Some problems of structural analysis of plates with mixed boundary conditions*, Arch. Mech. Stos., **8**, 413, 1956.

## Резюме

## ПРОГИБЫ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК С ПЕРЕМЕННЫМИ ЖЕСТКОСТЯМИ ПРИ НЕКОТОРЫХ РАЗРЫВНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

В работе даются формальные точные решения, дифференциального уравнения изгиба ортотропной пластинки на упругом основании, с переменными жесткостями для случая, когда жесткости и коэффициент основания являются полиномами от одной переменной  $y$ , а края  $x = 0$  и  $x = a$  свободно оперты, причём краевые условия на краю  $y = 0$  являются разрывными. Получено решение в форме двойного степенно тригонометрического ряда.

Коэффициенты этого ряда, получаются из простых рекуррентных зависимостей и бесконечных систем алгебраических уравнений. Дается также решение для сплошных пластинок на упругом основании. Кроме того, указана возможность получения решения для случая полос и полуполос. Задача решается при помощи алгебраической производной.

## SUMMARY

## DEFLECTION OF ORTHOTROPIC PLATES OF VARIABLE RIGIDITY UNDER CERTAIN DISCONTINUOUS BOUNDARY CONDITIONS

The paper contains the formally exact solution of the differential equation of bending of a plate which rests on an elastic foundation, in the case when the rigidities and the foundation coefficient are polynomials of the single variable  $y$ ; the edges  $x = 0$  and  $x = a$  of the plate are simply supported, the boundary conditions along the edge  $y = 0$  being discontinuous. The solution has the form of a double polynomial — trigonometric series.

The coefficients of the series are obtained from simple recurrent formulae and from infinite systems of algebraic equations. The solutions are presented concerning continuous plates resting on elastic supports. The possibility is indicated of obtaining simple solutions in the cases of infinite and semi-infinite plate strips. The solution is derived by means of the algebraic derivative.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 marca 1971 r.*