

DRGANIA I ZGINANIE PŁYT KOŁOWYCH O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

JAN A N T O S I K (WARSZAWA)

1. WSTĘP

Problem statyki i dynamiki płyt kołowych o zmiennej sztywności należy do tych klasycznych zagadnień teorii płyt, w zakresie których uzyskano sporo rozwiązań, dotyczących jednak tylko szczególnych przypadków obciążenia, warunków brzegowych oraz sztywności. Z istniejących prac dotyczących tego zagadnienia należy wymienić jako najwcześniejsze i często cytowane prace O. Pichlera i R. Gran Olssona.

O. PICHLER w pracy [8] podał rozwiązanie w przypadku płyty o grubości zmieniającej się wg funkcji $h = h_0 r^{\alpha_0} \exp \sum_{n=1}^{\infty} k_n r^n$ (gdzie h_0 i α_0 oznaczają stałe) obciążonej kołowo-symetrycznie. Autor wyraził rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego.

R. GRAN OLSSON w pracy [9] uzyskał rozwiązanie problemu zginania płyty, obciążonej kołowo-symetrycznie, o sztywności $D = D_0 e^{-kr^{\alpha_0}}$, gdzie D_0 , k i α_0 są to stałe, przy zastosowaniu zdegenerowanych funkcji hipergeometrycznych.

Stosunkowo wyczerpującego rozwiązania doczekał się problem zginania płyt pierścieniowych, których sztywność opisana jest za pomocą paraboli drugiego stopnia. W pracy [10] R. GRAN OLSSON przedstawił rozwiązanie tego problemu w przypadku niesymetrycznego obciążenia w postaci pojedynczego szeregu, znanego z teorii płyt o stałej sztywności.

Kilka szczególnych przypadków płyt pierścieniowych, kołowo-symetrycznie obciążonych, swobodnie podpartych lub utwierdzonych wzdłuż obwodu zewnętrzniego rozpatrzył w pracy [11] H. D. CONWAY. Autor ten uzyskał również rozwiązanie równania drgań płyty pierścieniowej o sztywności zmieniającej się wg funkcji $D = D_0 r^n$ na sprężystym podłożu Winklera w przypadku kołowo-symetrycznego obciążenia. Rozwiązanie przedstawił w postaci liniowej kombinacji funkcji Bessela [12]. H. D. CONWAY w pracy [13] rozpatrzył problem niesymetrycznego zginania płyt pierścieniowych o sztywności opisanej za pomocą funkcji $D = D_0 r^n$.

Duża liczba publikacji dotyczy płyt o liniowo zmiennej grubości. Zamknięte rozwiązanie w postaci funkcji elementarnych uzyskał H. FAVRE dla płyt pełnych o liniowo zmiennej grubości na niewielkim odcinku promienia $r > 0$, obciążonych równomiernie na całej powierzchni [14]. W pracy [15] H. FAVRE i E. CHABLOZ rozważali płyty o liniowo zmiennej grubości, równomiernie obciążone. Rozwiązanie otrzymano w postaci szeregu potęgowego (metoda parametryczna).

Problem zginania płyt kołowych o liniowo zmiennej grubości był również przedmiotem rozważań H. D. CONWAY'A, P. JANSSENSA, H. BASTINO, J. M. GRIGORIENKI, J. F. ŁACINNIKA w pracach [16, 17 i 18].

Rozwiązanie równania drgań płyty utwierdzonej o grubości zmieniającej się schodkowo, poddanej działaniu obciążenia kołowo-symetrycznego, przedstawił UEMATU TOKIO i MORIKAWA YOSHINOBU w pracy [19]. Powierzchnię ugięcia płyty wyrażono w postaci pojedynczego szeregu Fouriera, w którym układ funkcji ortogonalnych stanowi liniową kombinację funkcji Bessela.

Bardziej ogólny sposób obliczania płyt o schodkowo zmiennej grubości podaje w pracy [20] S. N. SOKOŁOW, wykorzystując znane wyniki z płyt o stałej sztywności.

Szereg interesujących rozwiązań problemów zginania i drgań płyt kołowych o zmiennych sztywnościach podał w pracach [21 i 22] A. D. KOWALENKO. Równanie różniczkowe płyty, której sztywność określona jest funkcją $D=D_0 |x|^{\gamma_0} |1-x|^{\beta_0}$, gdzie $x=\pm(r/r_0)^{\alpha_0}$, a $D_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ i r_0 są to stałe, w kołowo-symetrycznym stanie obciążenia sprowadzono do równania różniczkowego drugiego rzędu. Rozwiązanie tego równania uzyskano za pomocą funkcji hipergeometrycznych. Przez zastosowanie odpowiednich podstawień i przejść granicznych w poprzednim rozwiązaniu otrzymano równanie powierzchni ugięcia zginanej płyty o sztywności $D=D_0 |x|^{\gamma_0} e^{-x}$. Równanie to wyraża się za pomocą zdegenerowanych funkcji hipergeometrycznych.

A. D. KOWALENKO podał rozwiązanie problemu zginania płyt kołowych o sztywności $D=D_0 |1-X|$, gdzie $X=\pm(r/r_0)^{\alpha_0}$ lub grubości liniowo zmiennej przy dowolnym obciążeniu. W niektórych przypadkach zmiany sztywności rozwiązanie równania różniczkowego zginanej płyty można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych. Np. dla płyty o sztywności $D=D_0 (1-x)^{\mp 2m}$, gdzie $x=(r/r_0)^{2\nu/m}$. W pracy [22] rozpatrzono również problem drgań własnych płyty o liniowo zmiennej grubości oraz problem zginania tej płyty poddanej działaniu obciążenia kołowo-symetrycznego, proporcjonalnego do reakcji sprężystego podłoża. Wynik rozwiązań wyrażono za pomocą algebraicznych funkcji.

Badaniom nad rozkładem naprężeń w płytach o zmiennej grubości poświęcona jest publikacja [23]. Autorzy H. FAVRE, W. SCHUMANN, M. MARTINOLA porównali wyniki otrzymane przy badaniach modelowych płyt z rezultatami otrzymanymi w wyniku obliczeń w pracy [15].

Inne zagadnienie zginania płyt rozpatrywał w pracy [24] G. IRADJ TADJBAKHSZ. Jako problem postawił znalezienie takiej grubości płyty, która zapewniłaby jej jednakową wytrzymałość w każdym punkcie. Rozwiązanie otrzymał dla płyty pierścieniowej na zewnętrznym obwodzie utwierdzonej, a na wewnętrznym swobodnym brzegu obciążonej momentami zginającymi.

Kilka rozwiązań problemów zginania płyt otrzymano jako graniczne przypadki powłok stożkowych o zmiennych grubościach. I tak w pracy [25] JU. M. GRIGORIENKO przedstawił rozwiązanie przy asymetrycznym obciążeniu dla płyty pełnej o liniowo zmiennej grubości i pierścieniowej o grubości zmieniającej wg funkcji potęgowej.

W pracach [26 i 27] F. TÖLKE, H. GOSER i TSUI EDWARD YW podali rozwiązanie dla kołowo-symetrycznie obciążonych płyt o sztywności zmieniającej się wg funkcji wykładniczej i dla płyt pierścieniowych o grubości liniowo zmiennej.

W pracy [28] D. BAIRAKTARIS po sprowadzeniu równania różniczkowego zginanej płyty do równania drugiego rzędu podał jego rozwiązanie przy zastosowaniu kwadratur. Całkę szczególną tego równania otrzymał stosując rachunek operatorowy. Dla płyty o liniowo zmiennej grubości uzyskał wynik w postaci funkcji hipergeometrycznych jak w pracy [22].

Do rozwiązania problemu zginania i drgań płyt zastosowano również szereg metod przybliżonych. Np. w pracy [29] Z. MAZURKIEWICZ i E. KRYNICKI przedstawili rozwiązanie problemu zginania płyty metodą Ritz'a, a w pracach [30 i 31] JA. REMNIEW podał rozwiązanie równania drgań własnych płyt metodą Bubnowa-Galerkina.

M. BLUMENFELD w pracy [32] do rozwiązania problemu zginanej płyty przy kołowo-symetrycznym obciążeniu wprowadził metodę polegającą na podziale płyty na pierścienie kołowe, które rozpatruje jako pierścienie o stałej grubości pod działaniem stałego obciążenia. Następnie autor wykorzystał warunki ciągłości powierzchni zginanej płyty. Od liczby pierścieni zależna jest dokładność rozwiązania.

Metodom przybliżonym poświęcono kilka innych publikacji [33, 34, 35 i 36] w tym i takich, które prowadzą do rozwiązania problemu na maszynach cyfrowych.

W niniejszym opracowaniu podano sposób wyznaczania powierzchni ugięcia i częstości drgań własnych płyty kołowej, izotropowej o małych ugięciach, zmiennej masie i zmiennej sztywności zginania. Rozważono płyty swobodnie podparte i utwierdzone wzdłuż obwodu oraz płyty z brzegiem swobodnym. Poza tym opisano sposób postępowania przy niejednorodnych warunkach brzegowych.

Rozwiązanie równania różniczkowego drgań i zginania płyty kołowej przedstawiono za pomocą podwójnego szeregu Fouriera-Bessela. Stosując metodę ortogonalizacyjną doprowadzono rozwiązanie problemu do nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych. Rozwiązanie tego układu daje współczynniki szeregu Fouriera-Bessela. Otrzymane rozwiązanie można w prosty sposób sprowadzić w przypadku płyty jednorodnej o stałej sztywności do znanych postaci.

Podano konkretne przykłady ilustrujące praktyczne zastosowanie przedstawionego ogólnego rozwiązania.

1. DOBRANIE UKŁADU FUNKCJI ORTOGONALNYCH, SPEŁNIAJĄCYCH DANE WARUNKI BRZEGOWE

1.1. Założenia

W pracy oparto się na założeniach stanowiących podstawę technicznej teorii płyt cienkich [1 i 2]. Poza tym przyjęto dodatkowo następujące założenia:

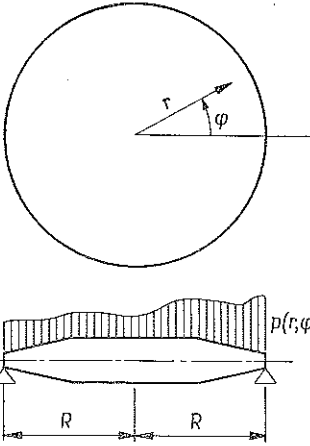
- a) współczynnik Poissona jest wielkością stałą,
- b) niejednorodność materiału jest taka, że zarówno gęstość p jak i sztywność płyty D są funkcjami miejsca,
- c) płaszczyzna środkowa płyty przed odkształceniem spowodowanym obciążeniem pokrywa się z płaszczyzną układu współrzędnych,
- d) zmienność grubości płyty jest symetryczna (lub niewiele odbiegająca od symetrycznej) względem środkowej powierzchni płyty,

e) obciążenie przyłożone do płyty działa prostopadle do jej środkowej powierzchni.

Na rys. 1 przez r, φ oznaczono współrzędne biegunowe, a przez t czas.

1.2. Równanie różniczkowe drgań poprzecznych płyty kołowej

Równanie różniczkowe drgań poprzecznych płyty kołowej o masie i grubości zmiennej kołowo-symetrycznie można przedstawić w następującej postaci:



Rys. 1

$$(1.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2(\bar{M}_r, r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{M}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{M}_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2(\bar{M}_{r\varphi}, r)}{\partial r \partial \varphi} - \rho(r)h(r) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} + \bar{p}(r, \varphi, t) = 0,$$

gdzie $\rho(r)$ oznacza masę przypadającą na jednostkę pola środkowej powierzchni płyty, $h(r)$ grubość płyty, $\bar{w}(r, \varphi, t)$ ugięcie płyty, $\bar{p}(r, \varphi, t)$ obciążenie wymuszające drgania oraz $\bar{M}_r, \bar{M}_\varphi, \bar{M}_{r\varphi}$ momenty zginające i skręcające.

W przypadku drgań harmonicznym zachodzą znane związki

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \bar{w}(r, \varphi, t) &= e^{i\omega t} w(r, \varphi), \\ \bar{p}(r, \varphi, t) &= e^{i\omega t} p(r, \varphi), \end{aligned}$$

gdzie ω oznacza częstość kołową drgań, $w(r, \varphi)$ amplitudę ugięcia oraz $p(r, \varphi)$ amplitudę obciążenia.

Uwzględniając wzory (1.2) doprowadzono równanie (1.1) do postaci

$$(1.3) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2(M_r, r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2(M_{r\varphi}, r)}{\partial r \partial \varphi} + \omega^2 \rho(r)h(r)w + p(r, \varphi) = 0.$$

Amplitudy momentów zginających, skręcających i sił poprzecznych wyrażamy za pomocą wzorów

$$(1.4) \quad \begin{aligned} M_r &= -D(r) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\ M_\varphi &= -D(r) \left(\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\ M_{r\varphi} &= -M_{\varphi r} = -(1-\nu)D(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ Q_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial(M_r, r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} M_\varphi = -D(r) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) - \\ &\quad - \frac{dD(r)}{dr} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad Q_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial(M_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} M_{r\varphi} =$$

$$\text{[c.d.]} \quad = -D(r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla^2 w) - (1-\nu) \frac{dD(r)}{dr} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right),$$

gdzie $D(r) = E(r)h^3(r)/12(1-\nu^2)$ oznacza sztywność płyty, $E(r)$ moduł Younga, ν współczynnik Poissona oraz $\nabla^2 = (\partial^2/\partial r^2) + (1/r)(\partial/\partial r) + (1/r^2)(\partial^2/\partial \varphi^2)$.

Przytoczmy tu jeszcze wzór na siłę Kirchhoffa, potrzebny w dalszych rozważaniach:

$$(1.5) \quad V = \frac{1}{r} \frac{\partial(M_r r)}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} M_\varphi = -D(r) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w) -$$

$$- \frac{dD(r)}{dr} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + D(r) \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right).$$

Po uwzględnieniu wzorów (1.4) doprowadzamy równanie (1.3) do postaci

$$(1.6) \quad D(r) \nabla^4 w + \frac{dD(r)}{dr} \left(2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) +$$

$$+ \frac{d^2 D(r)}{dr^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \omega^2 \rho(r) h(r) w - p(r, \varphi) = 0.$$

W celu doboru odpowiedniego układu funkcji ortogonalnych wykorzystamy rozwiązanie równania różniczkowego, opisującego drgania własne płyty kołowej o stałej masie i stałej grubości:

$$(1.7) \quad \nabla^4 w - a^4 w = 0,$$

gdzie $a^2 = \omega/c$, $c^2 = D/ph$ oraz D, ρ i h oznaczają odpowiednio sztywność, masę i grubość płyty jednorodnej i są stałe na całym obszarze płyty.

Ogólnym rozwiązaniem równania (1.7) jest funkcja

$$(1.8) \quad w(r, \varphi) = \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) [A_1 J_m(ar) + B_1 I_m(ar) + C_1 Y_m(ar) + D_1 K_m(ar)],$$

gdzie $J_m(ar)$ oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju, $I_m(ar)$ zmodyfikowaną funkcję Bessela pierwszego rodzaju, $Y_m(ar)$ funkcję Bessela drugiego rodzaju oraz $K_m(ar)$ zmodyfikowaną funkcję Bessela drugiego rodzaju.

Ponieważ poszukujemy rozwiązania dla płyty pełnej, więc pomijamy we wzorze (1.8) funkcję Bessela drugiego rodzaju jako mającą osobliwość w zerze. Zatem funkcję (1.8) wyrażamy w postaci

$$(1.9) \quad w(r, \varphi) = \frac{\cos}{\sin}(m\varphi) [A_1 J_m(ar) + B_1 I_m(ar)],$$

przy czym w dalszych rozważaniach utrzymamy wyłącznie funkcję $\cos m\varphi$.

Ze wzoru (1.9) wynika tożsamość

$$w(r, \varphi) = w(r, 2\pi + \varphi).$$

W celu wyznaczenia stałych A_i i B_i wykorzystano warunki brzegowe, występujące w przypadku płyty wzdłuż całego brzegu swobodnie podpartej, $i=1$, utwierdzonej, $i=2$, i swobodnej, $i=3$.

1.3. Funkcje ortogonalne w przypadku płyty swobodnie podpartej

Płyta swobodnie podparta wzdłuż obwodu spełnia następujące warunki brzegowe:

$$(1.10) \quad [w(r, \varphi)]_{r=R} = 0, \quad \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w(r, \varphi) \right]_{r=R} = 0.$$

Uwzględniając funkcję (1.9) oraz przyjmując podstawienie $\alpha^{(i)} = \alpha^{(i)}/R$ doprowadzamy warunki (1.10) do postaci

$$(1.11) \quad A_1 J_m(\alpha^{(1)}) + B_1 I_m(\alpha^{(1)}) = 0.$$

$$A_1 [(1-\nu)(m^2-m)J_m(\alpha^{(1)}) + (1-\nu)\alpha^{(1)}J_{m+1}(\alpha^{(1)}) - \alpha^{(1)^2}J_m(\alpha^{(1)})] +$$

$$+ B_1 [(1-\nu)(m^2-m)I_m(\alpha^{(1)}) - (1-\nu)\alpha^{(1)}I_{m+1}(\alpha^{(1)}) + \alpha^{(1)^2}I_m(\alpha^{(1)})] = 0.$$

Warunki (1.11) są spełnione dla każdego kąta φ , a więc mają jednakowy kształt dla wszystkich φ .

Z przyrównania do zera wyznacznika podstawowego układu równań (1.11) otrzymujemy równanie przestępne

$$(1.12) \quad (1-\nu)[J_{m+1}(\alpha^{(1)})I_m(\alpha^{(1)}) + J_m(\alpha^{(1)})I_{m+1}(\alpha^{(1)})] - 2\alpha^{(1)}J_m(\alpha^{(1)})I_m(\alpha^{(1)}) = 0,$$

gdzie $\alpha^{(1)}$ jest pierwiastkiem algebraicznym tego równania.

Z pierwszego z warunków (1.11) wyznaczamy związek

$$(1.13) \quad \frac{B_1}{A_1} = - \frac{J_m(\alpha^{(1)})}{I_m(\alpha^{(1)})}.$$

Następnie wprowadzono wskaźniki mn , ponieważ równanie (1.12) ma nieskończenie wiele pierwiastków:

$$(1.14) \quad (1-\nu)[J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(1)})I_m(\alpha_{mn}^{(1)}) + J_m(\alpha_{mn}^{(1)})I_{m+1}(\alpha_{mn}^{(1)})] - 2\alpha_{mn}^{(1)}J_m(\alpha_{mn}^{(1)})I_m(\alpha_{mn}^{(1)}) = 0$$

oraz

$$(1.15) \quad \frac{B_1}{A_1} = \beta_{mn}^{(1)} = - \frac{J_m(\alpha_{mn}^{(1)})}{I_m(\alpha_{mn}^{(1)})}.$$

Uwzględniając (1.15) oraz przyjmując $A_1 = 1$ doprowadzamy funkcję (1.9) w rozważanym przypadku podparcia płyty do postaci

$$(1.16) \quad w_{mn}(r, \varphi) = \cos m\varphi [J_m(\alpha_{mn}^{(i)}) + \beta_{mn}^{(i)}I_m(\alpha_{mn}^{(i)})].$$

Jak wiadomo, układ funkcji $\{w_{mn}(r, \varphi)\}$ dla $m=0, 1, 2, 3, \dots, n=1, 2, 3, \dots$ jest układem ortogonalnym.

W celu obliczenia normy funkcji (1.16) wykonujemy całkowanie:

$$(1.17) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^R w_{mn}(r, \varphi) w_{kl}(r, \varphi) r dr d\varphi = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } m \neq k \text{ lub } n \neq l, \\ \gamma_{mn}^{(i)2}, & \text{jeśli } m = k \text{ i } n = l, \end{cases}$$

gdzie

$$(1.18) \quad \gamma_{mn}^{(i)2} = \frac{\pi R^2}{2} (1 + \delta_{0m}) \left\{ \left[J_{m+1}^2(\alpha_{mn}^{(i)}) + \frac{2m}{\alpha_{mn}^{(i)}} J_m(\alpha_{mn}^{(i)}) J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(i)}) + J_m^2(\alpha_{mn}^{(i)}) \right] - \right. \\ \left. - \beta_{mn}^{(i)2} \left[I_{m+1}^2(\alpha_{mn}^{(i)}) + \frac{2m}{\alpha_{mn}^{(i)}} I_m(\alpha_{mn}^{(i)}) I_{m+1}(\alpha_{mn}^{(i)}) - I_m^2(\alpha_{mn}^{(i)}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2\beta_{mn}^{(i)}}{\alpha_{mn}^{(i)}} [J_m(\alpha_{mn}^{(i)}) I_{m+1}^{(i)}(\alpha_{mn}^{(i)}) + J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(i)}) I_m(\alpha_{mn}^{(i)})] \right\}.$$

We wzorze tym $i=1$, a δ_{0m} oznacza symbol Kroneckera.

1.4. Funkcje ortogonalne w przypadku płyty utwierdzonej

Płyta utwierdzona wzdłuż brzegu spełnia następujące warunki:

$$(1.19) \quad [w(r, \varphi)]_{r=R} = 0, \quad \left[\frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} \right]_{r=R} = 0.$$

W przypadku płyty utwierdzonej stałe A_2 i B_2 są znane. Można je znaleźć w literaturze [3 i 6].

Równanie przestępne otrzymujemy w postaci

$$(1.20) \quad J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(2)}) I_m(\alpha_{mn}^{(2)}) + J_m(\alpha_{mn}^{(2)}) I_{m+1}(\alpha_{mn}^{(2)}) = 0;$$

$\beta_{mn}^{(2)}$ i norma funkcji $\gamma_{mn}^{(2)2}$ wyrażają się za pomocą wzorów

$$(1.21) \quad \beta_{mn}^{(2)} = - \frac{J_m(\alpha_{mn}^{(2)})}{I_m(\alpha_{mn}^{(2)})}$$

oraz

$$(1.22) \quad \gamma_{mn}^{(2)2} = \pi R^2 (1 + \delta_{0m}) J_{mn}^2(\alpha_{mn}^{(2)}).$$

Funkcja (1.9) jest w postaci (1.16), a $i=2$.

1.5. Funkcje ortogonalne w przypadku płyty z brzegiem swobodnym

Płyta z brzegiem swobodnym spełnia następujące warunki brzegowe:

$$(1.23) \quad \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) w(r, \varphi) \right]_{r=R} = 0, \\ \left[\left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 + (1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] w(r, \varphi) \right]_{r=R} = 0.$$

Postępując podobnie jak w przypadku płyty swobodnie podpartej wzdłuż brzegu, otrzymujemy

$$(1.24) \quad \begin{aligned} & A_3 [(1-\nu)(m^2-m)J_m(\alpha^{(3)}) + (1-\nu)\alpha^{(3)}J_{m+1}(\alpha^{(3)}) - \alpha^{(3)^2}J_m(\alpha^{(3)})] + \\ & + B_3 [(1-\nu)(m^2-m)I_m(\alpha^{(3)}) - (1-\nu)\alpha^{(3)}I_{m+1}(\alpha^{(3)}) + \alpha^{(3)^2}I_m(\alpha^{(3)})] = 0, \\ & A_3 [(1-\nu)(m^3-m^2)J_m(\alpha^{(3)}) - (1-\nu)\alpha^{(3)}m^2J_{m+1}(\alpha^{(3)}) + m\alpha^{(3)}J_m(\alpha^{(3)}) - \\ & - \alpha^{(3)^3}J_{m+1}(\alpha^{(3)})] + B_3 [(1-\nu)(m^3-m^2)I_m(\alpha^{(3)}) + \\ & + (1-\nu)\alpha^{(3)}m^2I_{m+1}(\alpha^{(3)}) - m\alpha^{(3)^2}I_m(\alpha^{(3)}) - \alpha^{(3)^3}I_{m+1}(\alpha^{(3)})] = 0. \end{aligned}$$

Z przyrównania do zera wyznacznika układu (1.24) otrzymujemy równanie przestępne

$$(1.25) \quad \begin{aligned} & [(1-\nu)^2(m^4-m^2) + \alpha_{mn}^{(3)^4}] [J_m(\alpha_{mn}^{(3)})J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(3)}) + J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(3)})I_m(\alpha_{mn}^{(3)})] - \\ & - 2\alpha_{mn}^{(3)^2}(1-\nu)(m^2-m) [J_m(\alpha_{mn}^{(3)})I_{m+1}(\alpha_{mn}^{(3)}) - J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(3)})I_m(\alpha_{mn}^{(3)})] - \\ & - 4\alpha_{mn}^{(3)}(m^3-m^2)J_m(\alpha_{mn}^{(3)})I_m(\alpha_{mn}^{(3)}) - 2\alpha_{mn}^{(3)^3}(1-\nu)J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(3)})I_{m+1}(\alpha_{mn}^{(3)}) = 0, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_{mn}^{(3)}$ jest pierwiastkiem algebraicznym tego równania.

Na podstawie pierwszego z warunków (1.24) znajdujemy

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \beta_{mn}^{(3)} &= \frac{B_3}{A_3} = \\ &= - \frac{(1-\nu)(m^2-m)J_m(\alpha_{mn}^{(3)}) + (1-\nu)\alpha_{mn}^{(3)}J_{m+1}(\alpha_{mn}^{(3)}) - \alpha_{mn}^{(3)^2}J_m(\alpha_{mn}^{(3)})}{(1-\nu)(m^2-m)I_m(\alpha_{mn}^{(3)}) - (1-\nu)\alpha_{mn}^{(3)}I_{m+1}(\alpha_{mn}^{(3)}) + \alpha_{mn}^{(3)^2}I_m(\alpha_{mn}^{(3)})}. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (1.26) i przyjęciu $A_3=1$ doprowadzono funkcję (1.9) w rozważonym przypadku podparcia płyty do postaci (1.16). Norma funkcji wyraża się wzorem (1.18), przy czym $i=3$.

2. DOPROWADZENIE RÓWNIANIA PROBLEMU RÓŻNICZKOWEGO DO NIESKOŃCZONEGO UKŁADU RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

Amplitudę ugięcia płyty przedstawiamy w postaci następującego szeregu ortogonalnego:

$$(2.1) \quad w(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \frac{A_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi}{\gamma_{mn}^{(i)^2}},$$

gdzie

$$(2.2) \quad \begin{aligned} w_{mn} &= \int_0^{2\pi} \int_0^R w(r, \varphi) r A_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi, \\ A_{imn}^{(0)}(r) &= J_m(\alpha_{mn}^{(i)}r) + \beta_{mn}^{(i)}I_m(\alpha_{mn}^{(i)}r), \end{aligned}$$

przy czym $\gamma_{mn}^{(i)^2}$, $\beta_{mn}^{(i)}$ i $\alpha_{mn}^{(i)}$ zależne są od warunków brzegowych i określone zostały w poprzednim punkcie.

Amplitudę obciążenia wyrażamy za pomocą szeregu

$$(2.3) \quad p(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn}^{(i)} \frac{\Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi}{\gamma_{mn}^{(i)^2}},$$

gdzie

$$(2.4) \quad p_{mn}^{(i)} = \int_0^{2\pi} \int_0^R p(r, \varphi) r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi.$$

Stosując metodę ortogonalizacyjną, mnożymy równanie (1.3) przez $r\Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi$ i doprowadzamy do postaci

$$(2.5) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2(M, r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2(M, r)}{\partial r \partial \varphi} + \right. \\ \left. + \omega^2 \rho(r) h(r) w + p(r, \varphi) \right] r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi = 0.$$

Następnie wykorzystamy przekształcenia

$$(2.6) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial^2 f(r, \varphi)}{\partial r^2} r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi = \\ = \left[\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} r \Delta_{imn}^{(0)}(r) - f(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} [r \Delta_{imn}^{(0)}(r)] \right\} \cos m\varphi d\varphi \right]_{r=R} - \\ - \left[\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} r \Delta_{imn}^{(0)}(r) - f(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} [r \Delta_{imn}^{(0)}(r)] \right\} \cos m\varphi d\varphi \right]_{r=0} + \\ + \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \varphi) \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r \Delta_{imn}^{(0)}(r)] \cos m\varphi dr d\varphi, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi = \\ = \left[\int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi d\varphi \right]_{r=R} - \left[\int_0^{2\pi} f(r, \varphi) r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi d\varphi \right]_{r=0} - \\ - \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} [r \Delta_{imn}^{(0)}(r)] \cos m\varphi dr d\varphi, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial^2 f(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi = -m^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \varphi) r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi, \\ \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi = m \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r, \varphi) r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \sin m\varphi dr d\varphi, \\ \frac{\partial}{\partial r} [\Delta_{imn}^{(0)}(r)] = \frac{m}{r} \Delta_{imn}^{(0)}(r) - \alpha_{mn}^{(1)} \Pi_{imn}^{(1)}(r), \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\Delta_{imn}^{(0)}(r)] = \frac{m^2 - m}{r^2} \Delta_{imn}^{(0)}(r) + \frac{\alpha_{mn}^{(1)}}{r} \Pi_{imn}^{(1)}(r) - \alpha_{mn}^{(1)^2} \Pi_{imn}^{(0)}(r),$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\Pi_{imn}^{(1)}(r) = J_{m+1}(a_{mn}^{(i)}r) - \beta_{mn}^{(i)} I_{m+1}(a_{mn}^{(i)}r),$$

$$\Pi_{imn}^{(0)}(r) = J_m(a_{mn}^{(i)}r) - \beta_{mn}^{(i)} I_m(a_{mn}^{(i)}r).$$

Uwzględniając powyższe przekształcenia przedstawiamy równanie (2.5) następująco:

$$(2.7) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ (M_r - M_\varphi) \left[\frac{m^2 - m}{r} \Delta_{imn}^{(0)}(r) + a_{mn}^{(i)} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] - M_r a_{mn}^{(i)2} r \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right\} \times \\ \times \cos m\varphi dr d\varphi - 2 \int_0^{2\pi} \int_0^R M_{r\varphi} \left[\frac{m^2 - m}{r} \Delta_{imn}^{(0)}(r) - m a_{mn}^{(i)} \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right] \sin m\varphi dr d\varphi + \\ + \int_0^{2\pi} \int_0^R [\omega^2 \rho(r) h(r) w + p(r, \varphi)] r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi dr d\varphi + H_{imn}^1 = 0,$$

gdzie

$$(2.8) \quad H_{imn}^1 = \left[\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial M_r(r)}{\partial r} - M_r m - M_\varphi + 2 \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} \right) \Delta_{imn}^{(0)}(r) + \right. \right. \\ \left. \left. + M_r a_{mn}^{(i)} r \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] \cos m\varphi d\varphi \right]_{r=R} - \\ - \left[\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial M_r(r)}{\partial r} - M_r m - M_\varphi + 2 \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} \right) \Delta_{imn}^{(0)}(r) + M_r a_{mn}^{(i)} r \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] \cos m\varphi d\varphi \right]_{r=0}.$$

W celu dalszego przekształcenia równania (2.7) wykorzystamy wzory (1.4) i (2.6) oraz następujące formuły:

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial r} [\Pi_{imn}^{(0)}(r)] = \frac{m}{r} \Pi_{imn}^{(0)}(r) - a_{mn}^{(i)} \Delta_{imn}^{(1)}(r), \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\Pi_{imn}^{(0)}(r)] = \frac{m^2 - m}{r^2} \Pi_{imn}^{(0)}(r) + \frac{a_{mn}^{(i)}}{r} \Delta_{imn}^{(1)}(r) - a_{mn}^{(i)2} \Delta_{imn}^{(0)}(r), \\ \frac{\partial}{\partial r} [\Pi_{imn}^{(1)}(r)] = -\frac{m+1}{r} \Pi_{imn}^{(1)}(r) + a_{mn}^{(i)} \Pi_{imn}^{(0)}(r), \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\Pi_{imn}^{(1)}(r)] = \frac{m^2 + 3m + 2}{r^2} \Pi_{imn}^{(1)}(r) - \frac{a_{mn}^{(i)}}{r} \Pi_{imn}^{(0)}(r) + a_{mn}^{(i)} \Delta_{imn}^{(1)}(r),$$

gdzie

$$\Delta_{imn}^{(1)}(r) = J_{m+1}(a_{mn}^{(i)}r) + \beta_{mn}^{(i)} I_{m+1}(a_{mn}^{(i)}r).$$

Ostatecznie doprowadzamy równanie (2.7) do postaci

$$\begin{aligned}
 (2.10) \quad & \int_0^{2\pi} \int_0^R w \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ (v-1) D(r) \left[\frac{m^2-m}{r} \Delta_{imn}^{(0)}(r) + a_{mn}^{(i)} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + D(r) a_{mn}^{(i)^2} r \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right\} \cos m\varphi \, dr \, d\varphi - \\
 & \qquad \qquad \qquad - \int_0^{2\pi} \int_0^R w \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (v-1) D(r) \left[\frac{2m^3-3m^2+m}{r^2} \Delta_{imn}^{(0)}(r) - \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \frac{(2m^2+1) a_{mn}^{(i)}}{r} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] + v D(r) a_{mn}^{(i)^2} \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right\} \cos m\varphi \, dr \, d\varphi + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_0^{2\pi} \int_0^R w \left\{ (v-1) D(r) \left[\frac{m^4-3m^3+2m^2}{r^3} \Delta_{imn}^{(0)}(r) + \frac{3m^2 a_{mn}^{(i)}}{r^2} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - v D(r) \frac{m^2 a_{mn}^{(i)}}{r} \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right\} \cos m\varphi \, dr \, d\varphi + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_0^{2\pi} \int_0^R [\omega^2 \rho(r) h(r) w + p(r, \varphi)] r \Delta_{imn}^{(0)}(r) \cos m\varphi \, dr \, d\varphi + H_{imn}^I + H_{imn}^{II} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad H_{imn}^{II} = & \left[D(r) \left\{ (v-1) \left[\frac{m^2-m}{r} \Delta_{imn}^{(0)}(r) + a_{mn}^{(i)} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + a_{mn}^{(i)^2} r \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right\} \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial r} \cos m\varphi \, d\varphi \right]_{r=R} - \left[D(r) \left\{ (v-1) \left[\frac{m^2-m}{r} \Delta_{imn}^{(0)}(r) + \right. \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + a_{mn}^{(i)} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] + a_{mn}^{(i)^2} r \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right\} \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial r} \cos m\varphi \, d\varphi \right]_{r=0} - \\
 & - \left[\frac{dD(r)}{dr} \left\{ (v-1) \left[\frac{m^2-m}{r} \Delta_{imn}^{(0)}(r) + a_{mn}^{(i)} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] + a_{mn}^{(i)^2} r \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right\} \times \right. \\
 & \times \int_0^{2\pi} w \cos m\varphi \, d\varphi \left. \right]_{r=R} + \left[\frac{dD(r)}{dr} \left\{ (v-1) \left[\frac{m^2-m}{r} \Delta_{imn}^{(0)}(r) + a_{mn}^{(i)} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + a_{mn}^{(i)^2} r \Pi_{imn}^{(0)}(r) \right\} \int_0^{2\pi} w \cos m\varphi \, d\varphi \right]_{r=0} + \left[D(r) \left\{ (v-1) \left[\frac{m^3-m^2}{r^2} \Delta_{imn}^{(0)}(r) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{m^2 a_{mn}^{(i)}}{r} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] - a_{mn}^{(i)^2} m \Pi_{imn}^{(0)}(r) + a_{mn}^{(i)^3} r \Delta_{imn}^{(1)}(r) \right\} \int_0^{2\pi} w \cos m\varphi \, d\varphi \right]_{r=R} - \\
 & - \left[D(r) \left\{ (v-1) \left[\frac{m^3-m^2}{r^2} \Delta_{imn}^{(0)}(r) - \frac{m^2 a_{mn}^{(i)}}{r} \Pi_{imn}^{(1)}(r) \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - a_{mn}^{(i)^2} m \Pi_{imn}^{(0)}(r) + a_{mn}^{(i)^3} r \Delta_{imn}^{(1)}(r) \right\} \int_0^{2\pi} w \cos m\varphi \, d\varphi \right]_{r=0}.
 \end{aligned}$$

Łatwo wykazać, że we wzorach (2.8) i (2.11) wyrazy określone w punkcie $r=0$, są równe zero.

Wyrażenia (2.8) i (2.11) przedstawimy w postaci

$$H_{imn}^{III} = H_{imn}^I + H_{imn}^{II}.$$

Łatwo zauważyć, że wielkość H_{imn}^{III} zależy tylko od warunków brzegowych i upraszcza się odpowiednio po uwzględnieniu wzorów (1.14), (1.20) i (1.25).

W przypadku płyty swobodnie podpartej ($i=1$) otrzymujemy

$$(2.12) \quad H_{1mn}^I = \alpha_{mn}^{(1)} \Pi_{1mn}^{(1)}(R) \int_0^{2\pi} M_r(R, \varphi) \cos m\varphi d\varphi,$$

$$H_{1mn}^{II} = \frac{D(R)}{R^2} [\alpha_{mn}^{(1)3} \Delta_{1mn}^{(1)}(R) - m \alpha_{mn}^{(1)2} \Pi_{1mn}^{(0)}(R) +$$

$$+ (1-\nu) m^2 \alpha_{mn}^{(1)} \Pi_{1mn}^{(1)}(R)] \int_0^{2\pi} w(R, \varphi) \cos m\varphi d\varphi,$$

$H_{1mn}^{III} = 0$, ponieważ

$$M_r(R, \varphi) = 0 \quad \text{i} \quad w(R, \varphi) = 0.$$

W przypadku płyty utwardzonej ($i=2$) wyrażenia te przyjmują postać

$$(2.13) \quad H_{2mn}^I = \frac{D(R)}{R} \alpha_{mn}^{(2)2} \Pi_{2mn}^{(0)}(R) \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} \right]_{r=R} \cos m\varphi d\varphi,$$

$$H_{2mn}^{II} = \frac{D(R)}{R^2} [\alpha_{mn}^{(2)3} \Delta_{2mn}^{(1)}(R) - m \alpha_{mn}^{(2)2} \Pi_{2mn}^{(0)}(R)] \int_0^{2\pi} w(R, \varphi) \cos m\varphi d\varphi -$$

$$- \frac{1}{R} \left[\frac{dD(r)}{dr} \right]_{r=R} \alpha_{mn}^{(2)2} \Pi_{2mn}^{(0)}(R) \int_0^{2\pi} w(R, \varphi) \cos m\varphi d\varphi,$$

przy czym H_{2mn}^{III} , bowiem

$$\left[\frac{\partial w(r, \varphi)}{\partial r} \right]_{r=R} = 0, \quad w(R, \varphi) = 0.$$

W przypadku płyty swobodnej wzdłuż obwodu ($i=3$) znajdujemy

$$(2.14) \quad H_{3mn}^I = R \Delta_{3mn}^{(0)}(R) \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial [M_r(r, \varphi) r]}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}(r, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} M_\varphi(r, \varphi) \right\}_{r=R} \cos m\varphi d\varphi + [\alpha_{mn}^{(3)} \Pi_{3mn}^{(1)}(R) - m \Delta_{3mn}^{(0)}(R)] \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} M_r(R, \varphi) \cos m\varphi d\varphi = R \Delta_{3mn}^{(0)}(R) \int_0^{2\pi} V(R, \varphi) \cos m\varphi d\varphi +$$

$$+ [\alpha_{mn}^{(3)} \Pi_{3mn}^{(1)}(R) - m \Delta_{3mn}^{(0)}(R)] \int_0^{2\pi} M_r(R, \varphi) \cos m\varphi d\varphi,$$

$$H_{3mn}^{II} = 0.$$

Wtedy $H_{3mn}^{III} = 0$, ponieważ $V(R, \varphi) = 0$ i $M_r(R, \varphi) = 0$.

Jak więc widać, wyrażenie H_{imn}^{III} przyjmuje wartość zera w rozważanych trzech przypadkach statycznych i geometrycznych jednorodnych warunków brzegowych.

Wzory (2.12), (2.15) i (2.14) mogą być jednak wykorzystane w przypadku niejednorodnych warunków brzegowych, tj. np. w płytach podpartych lub utwierdzonych sprężysto. Wtedy amplitudy nieznanych momentów, ugięć, kątów lub obrotów sił Kirchhoffa, występujących wzdłuż obwodu płyty, można wyrazić w postaci cosinusowych pojedynczych szeregów Fouriera. Natomiast współczynniki tych szeregów można obliczyć z odpowiednich warunków określających sposób sprężystego podparcia lub utwierdzenia brzegu płyty. Np. w przypadku płyty stanowiącej dno zbiornika walcowego współczynniki szeregu Fouriera, opisującego amplitudy momentów wzdłuż brzegu płyty utwierdzonego sprężysto w płaszczyźnie zbiornika, należy obliczyć z odpowiedniego warunku nierozdzielności, tj. z warunku równości kątów obrotu płyty i płaszczyzny wzdłuż utwierdzonego obwodu.

Wzory (2.12), (2.13) i (2.14) mogą być również wykorzystane w przypadku płyty obciążonej wzdłuż brzegu w sposób statyczny lub dynamiczny momentami o znanej amplitudzie oraz w przypadku płyty poddanej wzdłuż obwodu określonym odkształceniom kątowym lub przemieszczeniom liniowym (o wektorach prostopadłych do środkowej powierzchni płyty).

Powróćmy do równania (2.10). Zmieniając we wzorach (2.1) i (2.3) wskaźniki m, n na k, l oraz podstawiając szeregi (2.1) i (2.3) do równania (2.10) i wykonując całkowanie przez części, otrzymujemy następujący nieskończony układ algebraicznych niejednorodnych równań liniowych:

$$(2.15) \quad \sum_{l=1}^{\infty} w_{kl} (K_{nkl}^{(i)} + \omega^2 G_{nkl}^{(i)}) + p_{kn}^{(i)} = 0, \quad k=0, 1, 2, 3, \dots, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(2.16) \quad K_{nkl}^{(i)} = \frac{\pi(1 + \delta_{0k})}{\gamma_{kl}^{(i)^2}} \int_0^R \left\{ D(r)(v-1) \left[\frac{4k^2(k-1)^2}{r^3} \Delta_{ikl}^{(0)}(r) \Delta_{ikn}^{(0)}(r) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2a_{kn}^{(i)} k(k-1)^2}{r^2} \Delta_{ikl}^{(0)}(r) \Pi_{ikn}^{(1)}(r) - \frac{2a_{kl}^{(i)} k(k-1)^2}{r^2} \Pi_{ikl}^{(1)}(r) \Delta_{ikn}^{(0)}(r) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{a_{kn}^{(i)^2} k(k-1)}{r} \Delta_{ikl}^{(0)}(r) \Pi_{ikn}^{(0)}(r) - \frac{a_{kl}^{(i)^2} k(k-1)}{r} \Pi_{ikl}^{(0)}(r) \Delta_{ikn}^{(0)}(r) - \right. \right. \\ \left. \left. - a_{kn}^{(i)} a_{kl}^{(i)^2} \Pi_{ikl}^{(0)}(r) \Pi_{ikn}^{(1)}(r) - a_{kl}^{(i)} a_{kn}^{(i)} \Pi_{ikl}^{(1)}(r) \Pi_{ikn}^{(0)}(r) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2a_{kn}^{(i)} a_{kl}^{(i)} (k^2 + 1)}{r} \Pi_{ikl}^{(1)}(r) \Pi_{ikn}^{(1)}(r) \right] - D(r) a_{kn}^{(i)^2} a_{kl}^{(i)^2} r \Pi_{ikl}^{(0)}(r) \Pi_{ikn}^{(0)}(r) \right\} dr,$$

$$(2.17) \quad G_{nkl}^{(i)} = \frac{\pi(1 + \delta_{0k})}{\gamma_{kl}^{(i)^2}} \int_0^R \rho(r) h(r) \Delta_{ikl}^{(0)}(r) \Delta_{ikn}^{(0)}(r) dr.$$

Przyrównanie do zera wyznacznika podstawowego układu (3.1) daje równanie:

$$(3.2) \quad \det [K_{nkl}^{(i)} + \omega^2 G_{nkl}^{(i)}] = 0,$$

gdzie ω oznacza częstość drgań własnych płyty, wielkości zaś $K_{nkl}^{(i)}$ i $G_{nkl}^{(i)}$ określone są za pomocą wzorów (2.16) i (2.17). Równanie (3.2) można przedstawić w postaci dla $k=j$:

$$\begin{vmatrix} w_{j1}(K_{1j1}^{(i)} + \omega^2 G_{1j1}^{(i)}) & w_{j2}(K_{1j2}^{(i)} + \omega^2 G_{1j2}^{(i)}) & \dots & w_{js}(K_{1js}^{(i)} + \omega^2 G_{1js}^{(i)}) & \dots & w_{jj}(K_{1jn}^{(i)} + \omega^2 G_{1jn}^{(i)}) \\ w_{j1}(K_{2j1}^{(i)} + \omega^2 G_{2j1}^{(i)}) & w_{j2}(K_{2j2}^{(i)} + \omega^2 G_{2j2}^{(i)}) & \dots & w_{js}(K_{2js}^{(i)} + \omega^2 G_{2js}^{(i)}) & \dots & w_{jj}(K_{2jn}^{(i)} + \omega^2 G_{2jn}^{(i)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{j1}(K_{sj1}^{(i)} + \omega^2 G_{sj1}^{(i)}) & w_{j2}(K_{sj2}^{(i)} + \omega^2 G_{sj2}^{(i)}) & \dots & w_{js}(K_{sjs}^{(i)} + \omega^2 G_{sjs}^{(i)}) & \dots & w_{jj}(K_{sjn}^{(i)} + \omega^2 G_{sjn}^{(i)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{j1}(K_{nj1}^{(i)} + \omega^2 G_{nj1}^{(i)}) & w_{j2}(K_{nj2}^{(i)} + \omega^2 G_{nj2}^{(i)}) & \dots & w_{js}(K_{njs}^{(i)} + \omega^2 G_{njs}^{(i)}) & \dots & w_{jj}(K_{njn}^{(i)} + \omega^2 G_{njn}^{(i)}) \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwiązania równania (3.2) przy uwzględnieniu pewnej skończonej liczby równań umożliwiają obliczenie różnych częstości drgań własnych rozważanej płyty. Najmniejsza z tych części jest podstawową częstością drgań.

Łatwo sprawdzić, że w przypadku płyty jednorodnej o stałej sztywności zginania otrzymujemy na podstawie równania (3.2) znany wzór

$$\omega_{kl} = a_{kn}^{(i)} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}.$$

4. UOGÓLNIENIE ROZWIĄZANIA DLA PŁYT SPRĘŻYŚCIE NIEJEDNORODNYCH O DOWOLNYCH SZTYWNOŚCIACH

Zakładając że sztywność płyty jest funkcją zmiennych r, φ , przedstawimy równanie (1.3) w postaci

$$(4.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (M_r r)}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 (M_{r\varphi} r)}{\partial r \partial \varphi} + \omega^2 \rho(r, \varphi) h(r, \varphi) w + p(r, \varphi) = 0.$$

W tym przypadku sztywność występująca we wzorach (1.4) na momenty będzie funkcją zmiennych (r, φ) . Stosując metodę ortogonalizacyjną i wykorzystując wzory (2.1), (2.2), (2.3) i (2.4) doprowadzamy równanie (4.1) w przypadku swobodnego podparcia płyty wzdłuż obwodu do nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych:

$$(4.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} w_{kl} (K_{mkl}^{(1)} + \omega^2 G_{mkl}^{(1)}) + p_{mn}^{(1)} = 0, \quad m=0, 1, 2, 3, \dots, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 K_{mkl}^{(1)} = & \frac{\pi}{\gamma_{kl}^{(1)^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ D(r, \varphi) (v-1) \left[\frac{2mk(m-1)(k-1)}{r^3} \Delta_{1kl}^{(0)}(r) \Delta_{1mn}^{(0)}(r) + \right. \right. \\
 & + \frac{2a_{mn}^{(1)} k(k-1)^2}{r^2} \Delta_{1kl}^{(0)}(r) \Pi_{1mn}^{(1)}(r) + \frac{2a_{kl}^{(1)} m(m-1)^2}{r^2} \Pi_{1kl}^{(1)}(r) \Delta_{1mn}^{(0)}(r) - \\
 & - \frac{a_{mn}^{(1)^2} k(k-1)}{r} \Delta_{1kl}^{(0)}(r) \Pi_{1mn}^{(0)}(r) - \frac{a_{kl}^{(1)^2} m(m-1)}{r} \Pi_{1kl}^{(0)}(r) \Delta_{1mn}^{(0)}(r) - \\
 & - a_{mn}^{(1)} a_{kl}^{(1)^2} \Pi_{1kl}^{(0)}(r) \Pi_{1mn}^{(1)}(r) - a_{mn}^{(1)^2} a_{kl}^{(1)} \Pi_{1kl}^{(1)}(r) \Pi_{1mn}^{(0)}(r) + \\
 & \left. \left. + \frac{2a_{mn}^{(1)} a_{kl}^{(1)}}{r} \Pi_{1kl}^{(1)}(r) \Pi_{1mn}^{(1)}(r) \right] - \right. \\
 (4.3) \quad & \left. - D(r, \varphi) a_{mn}^{(1)^2} a_{kl}^{(1)^2} r \Pi_{1kl}^{(0)}(r) \Pi_{1mn}^{(0)}(r) \right\} \cos m\varphi \cos k\varphi dr d\varphi + \\
 & + \frac{\pi}{\gamma_{kl}^{(1)^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R D(r, \varphi) (v-1) \left[\frac{2mk(m-1)(k-1)}{r^3} \Delta_{1kl}^{(0)}(r) \Delta_{1mn}^{(0)}(r) - \right. \\
 & - \frac{2a_{mn}^{(1)} mk(k-1)}{r^2} \Delta_{1kl}^{(0)}(r) \Pi_{1mn}^{(1)}(r) - \frac{2a_{kl}^{(1)} mk(m-1)}{r^2} \Pi_{1kl}^{(1)}(r) \Delta_{1mn}^{(0)}(r) + \\
 & \left. + \frac{2a_{mn}^{(1)} a_{kl}^{(1)} mk}{r} \Pi_{1kl}^{(1)}(r) \Pi_{1mn}^{(1)}(r) \right] \sin m\varphi \sin k\varphi dr d\varphi, \\
 G_{mkl}^{(1)} = & \frac{\pi}{\gamma_{kl}^{(1)^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho(r, \varphi) h(r, \varphi) \Delta_{1kl}^{(0)}(r) \Delta_{1mn}^{(0)}(r) \cos m\varphi \cos k\varphi dr d\varphi.
 \end{aligned}$$

Wielkości $p_{mn}^{(1)}$, $\alpha_{mn}^{(1)}$ i $\gamma_{kl}^{(1)^2}$ określone są kolejno wzorami (2.4), (1.12) i (1.18).

Nie trudno zauważyć, że układ (4.2) przekształca się w (2.15), gdy sztywność płyty jest funkcją r .

Postępując analogicznie możemy otrzymać rozwiązanie w przypadku płyty swobodnej lub utwierdzonej. Zastosowaną do problemu płyt pełnych metodę ortogonalizacyjną można wykorzystać do rozwiązania płyt pierścieniowych. W tym przypadku we wzorze (1.8) uwzględniamy również funkcje Bessela drugiego rodzaju $Y_m(ar)$, $K_m(ar)$ mające osobliwość w zerze. Równanie przestępne charakterystyczne dla danego sposobu podparcia otrzymujemy z przyrównania do zera wyznacznika układu czterech równań liniowych, zależnych od warunków brzegowych (dwa równania dla każdego brzegu). Stałe B_i , C_i i D_i obliczamy z układu trzech równań niejednorodnych, uzyskanego z obniżenia o jeden stopień układu służącego do wyznaczenia równania przestępnego. Funkcje (1.8) po określeniu stałych B_i , C_i , D_i tworzą układ ortogonalny.

Równanie powierzchni ugięcia płyty rozwijamy w szereg wg tych funkcji.

5. PRZYKŁADY

5.1. Wyznaczenie ugięcia płyty swobodnie podpartej wzdłuż brzegu

Rozważmy płytę kołową pełną, swobodnie podpartą wzdłuż brzegu o sztywności zginania zmieniającej się wg funkcji

$$(5.1) \quad D(r) = D_0(gr^2 + 1),$$

poddaną na całej powierzchni działaniu obciążenia równomiernego o intensywności q na jednostkę powierzchni. Wyznaczymy ugięcie w środku tej płyty.

Nieskończony układ równań w przypadku symetrii obciążenia przyjmuje postać ($i=1$)

$$(5.2) \quad \sum_{l=1}^{\infty} w_l K_{nl}^{(i)} + p_n^{(i)} = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$(5.3) \quad K_{nl}^{(i)} = \frac{1}{\gamma_l^{(i)^2}} \int_0^R D(r) \left\{ (v-1) \left[\frac{2a_n^{(i)} a_l^{(i)}}{r} \Pi_{in}^{(1)}(r) \Pi_{il}^{(1)}(r) - a_n^{(i)} a_l^{(i)^2} \Pi_{in}^{(1)}(r) \Pi_{il}^{(0)}(r) - \right. \right. \\ \left. \left. - a_n^{(i)^2} a_l^{(i)} \Pi_{in}^{(0)}(r) \Pi_{il}^{(1)}(r) \right] - a_n^{(i)^2} a_l^{(i)^2} \Pi_{in}^{(0)}(r) \Pi_{il}^{(0)}(r) \right\} dr,$$

$$p_n^{(i)} = q \int_0^R r A_{in}^{(0)}(r) dr$$

$$(5.4) \quad \gamma_l^{(i)^2} = \frac{1}{2} R^2 \left\{ [J_1^2(\alpha_l^{(i)}) + J_0^2(\alpha_l^{(i)})] - \beta_l^2 [I_1^2(\alpha_l^{(i)}) - I_0^2(\alpha_l^{(i)})] + \right. \\ \left. + \frac{\beta_l^{(i)}}{\alpha_l^{(i)}} [J_0(\alpha_l^{(i)}) I_0(\alpha_l^{(i)}) + I_0(\alpha_l^{(i)}) J_1(\alpha_l^{(i)})] \right\}.$$

Przedstawiając nieskończony układ równań w rozwiniętej postaci otrzymujemy

$$(5.5) \quad \begin{aligned} w_1 K_{11}^{(i)} + w_2 K_{12}^{(i)} + \dots + w_s K_{1s}^{(i)} + \dots + w_n K_{1n}^{(i)} + p_1^{(i)} &= 0, \\ w_1 K_{21}^{(i)} + w_2 K_{22}^{(i)} + \dots + w_s K_{2s}^{(i)} + \dots + w_n K_{2n}^{(i)} + p_2^{(i)} &= 0, \\ \dots & \\ w_1 K_{s1}^{(i)} + w_2 K_{s2}^{(i)} + \dots + w_s K_{ss}^{(i)} + \dots + w_n K_{sn}^{(i)} + p_s^{(i)} &= 0, \\ \dots & \\ w_1 K_{n1}^{(i)} + w_2 K_{n2}^{(i)} + \dots + w_s K_{ns}^{(i)} + \dots + w_n K_{nn}^{(i)} + p_n^{(i)} &= 0. \end{aligned}$$

Równanie przestępne dla rozpatrywanego przypadku podparcia i obciążenia oraz szereg określający ugięcie płyty wyrażamy w postaci

$$(5.6) \quad (1-v) [J_1(\alpha_l^{(1)}) I_0(\alpha_l^{(1)}) + J_0(\alpha_l^{(1)}) I_1(\alpha_l^{(1)})] - 2\alpha_l^{(1)} J_0(\alpha_l^{(1)}) I_0(\alpha_l^{(1)}) = 0$$

oraz

$$(5.7) \quad w(r) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{w_l}{\gamma_l^{(i)^2} A_{il}^{(0)}(r)}.$$

Uwzględniając sztywność płyty opisaną za pomocą funkcji (5.1) i wykonując całkowanie, otrzymujemy następujące wzory na współczynniki:

$$(5.8) \quad K_{nn}^{(i)} = -\frac{D_0 g}{\gamma_n^{(i)^2}} \left\{ 2(1-\nu) \alpha_n^{(i)} \beta_n^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_n^{(i)}) + \right. \\ \left. + \alpha_n^{(i)^4} \left[\frac{1}{6} J_1^2(\alpha_n^{(i)}) + \frac{1}{6} J_0^2(\alpha_n^{(i)}) - \frac{1}{3\alpha_n^{(i)^2}} J_1^2(\alpha_n^{(i)}) + \frac{1}{3\alpha_n^{(i)}} J_1(\alpha_n^{(i)}) J_0(\alpha_n^{(i)}) \right] + \right. \\ \left. + \alpha_n^{(i)^4} \beta_n^{(i)} \left[-\frac{1}{6} I_1^2(\alpha_n^{(i)}) + \frac{1}{6} I_0^2(\alpha_n^{(i)}) - \frac{1}{3\alpha_n^{(i)^2}} I_1^2(\alpha_n^{(i)}) + \frac{1}{3\alpha_n^{(i)}} I_1(\alpha_n^{(i)}) I_0(\alpha_n^{(i)}) \right] - \right. \\ \left. - \alpha_n^{(i)^3} \beta_n^{(i)} [J_0(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_n^{(i)}) + I_0(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_n^{(i)})] + 2\alpha_n^{(i)^2} \beta_n^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_n^{(i)}) \right\} - D_0 \alpha_n^{(i)^4},$$

$$(5.9) \quad K_{ni}^{(i)} = \frac{4D_0 g}{\gamma_i^{(i)^2}} \alpha_n^{(i)^2} \alpha_i^{(i)^2} \left\{ \frac{1}{(\alpha_n^{(i)^2} - \alpha_i^{(i)^2)^2} \left[\alpha_n^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) J_0(\alpha_i^{(i)}) + \alpha_i^{(i)} J_0(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_i^{(i)}) - \right. \right. \\ \left. - \alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_i^{(i)}) - \frac{2\alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)}}{\alpha_n^{(i)^2} - \alpha_i^{(i)^2} [\alpha_n^{(i)} J_0(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) J_0(\alpha_i^{(i)})] \right\} - \\ - \frac{\beta_n^{(i)} \beta_i^{(i)}}{(\alpha_n^{(i)^2} - \alpha_i^{(i)^2)^2} \left\{ \alpha_n^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)}) I_0(\alpha_i^{(i)}) + \alpha_n^{(i)} I_0(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_i^{(i)}) + \right. \\ \left. + \alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_i^{(i)}) - \frac{2\alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)}}{\alpha_n^{(i)^2} - \alpha_i^{(i)^2} [\alpha_n^{(i)} I_0(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)}) I_0(\alpha_i^{(i)})] \right\} + \\ + \frac{\beta_n^{(i)}}{(\alpha_n^{(i)^2} + \alpha_i^{(i)^2)^2} \left\{ \alpha_n^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)}) J_0(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} I_0(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_i^{(i)}) + \right. \\ \left. + \frac{2\alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)}}{\alpha_n^{(i)^2} + \alpha_i^{(i)^2} [\alpha_n^{(i)} I_0(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)}) J_0(\alpha_i^{(i)})] \right\} - \\ - \frac{\beta_i^{(i)}}{(\alpha_n^{(i)^2} + \alpha_i^{(i)^2)^2} \left\{ \alpha_n^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) I_0(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} J_0(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_i^{(i)}) - \right. \\ \left. + \alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_i^{(i)}) + \frac{2\alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)}}{\alpha_n^{(i)^2} + \alpha_i^{(i)^2} [\alpha_n^{(i)} J_0(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) I_0(\alpha_i^{(i)})] \right\} + \\ + \frac{2D_0 g(1-\nu)}{\gamma_i^{(i)^2}} \alpha_n^{(i)} \alpha_i^{(i)} \left\{ \frac{1}{(\alpha_n^{(i)^2} - \alpha_i^{(i)^2)^2} \left[\alpha_n^{(i)} J_0(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) J_0(\alpha_i^{(i)}) \right] - \right. \\ \left. - \beta_n^{(i)} \beta_i^{(i)} [\alpha_n^{(i)} I_0(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)}) I_0(\alpha_i^{(i)})] \right\} - \\ - \frac{1}{\alpha_n^{(i)^2} + \alpha_i^{(i)^2} \left\{ \beta_i^{(i)} [\alpha_n^{(i)} J_0(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) I_0(\alpha_i^{(i)})] - \right. \\ \left. - \beta_n^{(i)} [\alpha_n^{(i)} I_0(\alpha_n^{(i)}) J_1(\alpha_i^{(i)}) - \alpha_i^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)}) J_0(\alpha_i^{(i)})] \right\} \right\},$$

$$(5.10) \quad p_n^{(i)} = \frac{q}{\alpha_n^{(i)}} [J_1(\alpha_n^{(i)}) + \beta_n^{(i)} I_1(\alpha_n^{(i)})].$$

Rozwiązanie ograniczono do znalezienia siedmiu wyrazów szeregu (5.7), określającego równanie powierzchni ugięcia płyty oraz do obliczenia ugięcia w środku płyty. Obliczenia wykonano dla następujących danych: $\nu=0,3$; $R=1$; $g=-0,963$, co odpowiada stosunkowi 27:1 sztywności płyty w środku do sztywności na brzegu.

Wystarczającą dokładność otrzymano przy uwzględnieniu układu składającego się z siedmiu równań. Pierwiastki równania przestępnego (5.6), współczynniki układu równań (5.5) oraz wartości podano w tablicach 1, 2, 3 i 4. Wynik rozwiązania układu równań (5.5) dla $n, l=7$ podano w tablicy 5. Pierwiastki układu (5.5) stanowią siedem pierwszych wyrazów szeregu (5.7).

Dla zilustrowania procesu zbieżności współczynników szeregu (5.7) dokonano rozwiązania układu równań (5.5) kolejno dla $n, l=1, 2, 3, 4, 5, 6$, a wynik zamieszczono w tablicy 5.

Ugięcie płyty w środku obliczone na podstawie szeregu (5.7), którego współczynniki otrzymano z rozwiązania układu równań (5.5) dla $n, l=7$ podano w tablicy 6. Dla porównania obliczono również ugięcie w środku tej płyty przy wykorzystaniu współczynników szeregu (5.6), które otrzymano z rozwiązania układu równań (5.5), dla $n, l=1, 2, 3, 4, 5, 6$. Wynik tych obliczeń podano w tablicy 6.

Dla przeprowadzenia dowodu zbieżności procesu iteracyjnego, polegającego na stopniowym zwiększaniu liczby równań układu (5.2) wprowadzamy nową zmienną.

$$(5.11) \quad z_l = \frac{\alpha_l^{(1)3} J_1(\alpha_l^{(1)})}{2\gamma_l^{(1)2}} w_l.$$

Następnie dzielimy każde równanie układu (5.2) przez $\alpha_n^{(1)} J_1(\alpha_n^{(1)})$ i doprowadzamy układ (5.2) do postaci normalnej

$$(5.12) \quad z_n = \sum_{l=1}^{\infty} z_l \frac{M_{nl}}{M_{nn}} + \frac{p_n^{(1)}}{\alpha_n^{(1)} J_1(\alpha_n^{(1)})} = 0,$$

gdzie

$$M_{nl} = \frac{2K_{nl}^{(1)} \gamma_l^{(1)2}}{\alpha_n^{(1)} \alpha_l^{(1)3} J_1(\alpha_l^{(1)}) J_1(\alpha_n^{(1)})}.$$

Do tak przekształconego nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych stosujemy kryterium pełnej regularności, którego spełnienie jest wystarczającym warunkiem jednoznaczności i zbieżności rozwiązań. Aby układ (5.12) był w pełni regularny, musi być spełniona następująca nierówność:

$$(5.13) \quad \sum_{\substack{l=1 \\ n \neq l}}^{\infty} \left| \frac{M_{nl}}{M_{nn}} \right| < 1 - \theta_n, \quad n=1, 2, 3, \dots, \theta_n > 0$$

przy ograniczonych wyrazach wolnych. Dowód ograniczoności tych wyrazów jest banalny i z tego powodu został pominięty.

Przyjęto w przybliżeniu następujący wzór na pierwiastki równania przestępnego (5.6):

$$\alpha_l \approx 2,36 + (l-1)\pi, \quad l=1, 2, 3, \dots, \infty$$

Łatwo sprawdzić, że wyrazy ciągu liczbowego $\{\alpha_l\}$ są mniejsze od odpowiednich wyrazów ciągu liczbowego $\{\kappa_l\}$ utworzonego z pierwiastków algebraicznych równania $J_0(\kappa_l)=0$, a więc $\alpha_l < \kappa_l$ dla każdego l . W związku z powyższym funkcje Bessela tego samego argumentu we wzorze (5.9) mają ten sam znak.

Uwzględniając tę własność opuszczono we wzorze na $K_{nl}^{(1)}$ te wyrażenia, których suma daje przeciwny znak niż wyrażenie $J_1(\alpha_n^{(1)})J_1(\alpha_l^{(1)})$:

$$|M_{nl}| < \left| \frac{8g \alpha_n^{(1)3} \alpha_l^{(1)3} (\alpha_n^{(1)2} + \alpha_l^{(1)2}) [J_1(\alpha_n^{(1)})J_1(\alpha_l^{(1)}) + \beta_n^{(1)} \beta_l^{(1)} I_1(\alpha_l^{(1)}) I_1(\alpha_n^{(1)})]}{\alpha_n^{(1)} \alpha_l^{(1)3} (\alpha_n^{(1)4} - \alpha_l^{(1)4}) J_1(\alpha_n^{(1)}) J_1(\alpha_l^{(1)})} \right| < \\ < \left| \frac{8g \alpha_n^{(1)2}}{(\alpha_n^{(1)2} - \alpha_l^{(1)2})^2} \left[1 + \frac{J_0(\alpha_n^{(1)}) J_0(\alpha_l^{(1)})}{J_1(\alpha_n^{(1)}) J_1(\alpha_l^{(1)})} \right] \right| < \left| \frac{8,08g \alpha_n^{(1)2}}{(\alpha_n^{(1)2} - \alpha_l^{(1)2})^2} \right|,$$

gdzie wykorzystano łatwe do sprawdzenia rozwinięcia asymptotyczne funkcji Bessela dla $l > 5$

$$\left| \frac{J_0(\alpha_n^{(1)}) J_0(\alpha_l^{(1)})}{J_1(\alpha_n^{(1)}) J_1(\alpha_l^{(1)})} \right| < \frac{1}{100}.$$

Dla $n, l=1, 2, 3, 4, 5$ sprawdzono, że

$$|M_{nl}| < \left| \frac{8,08g \alpha_n^{(1)2}}{(\alpha_n^{(1)2} - \alpha_l^{(1)2})^2} \right|.$$

Nietrudno również udowodnić, że $|M_{nm}| < |M_{n+1, n+1}|$.

Następnie obliczono na elektronicznej maszynie cyfrowej sumy szeregu

$$(5.14) \quad 8,08 |g| \sum_{\substack{l=1 \\ n \neq l}}^{l=s} \frac{\alpha_n^{(1)2}}{(\alpha_n^{(1)2} - \alpha_l^{(1)2})^2} \quad \text{dla } n=1, 2, 3, \dots, 160.$$

Szereg (5.14) przyjmuje największą wartość dla $n=136$. Resztę szeregu (5.14) obliczono za pomocą całek niewłaściwych. Dla $n=136$ reszta wynosi w przybliżeniu 0,0002.

Łatwo sprawdzić, że dla $n=1, 2, 3, 4$, $\theta_n > 0$ oraz

$$\max_{n=136} \sum_{\substack{l=1 \\ n \neq l}}^{\infty} \left| \frac{M_{nl}}{M_{nn}} \right| < \max_{n=136} \sum_{\substack{l=1 \\ n \neq l}}^{\infty} \left| \frac{M_{nl}}{M_{44}} \right| < \frac{0,650}{0,662} = 0,98 < 1.$$

Tym samym udowodniono, że dla $g = -0,963$, $\nu = 0,3$ układ równań (5.2) jest regularny.

Rozwiązanie powyższego układu otrzymane w postaci wyrażenia zawierającego funkcje hipergeometryczne przedstawione zostało w pracy [22]:

$$(5.15) \quad w(0) = \frac{q^r_0}{8D_0(1+\nu)} \left\{ \frac{2(1-x_2) [1 - {}_2F_1(\delta_1 - \delta; 1; x_2)]}{(1-\nu) {}_2F_1(\delta_1 - \delta; 2; x_2)} - x_2 \right\} = \\ = \frac{q \, 1,019^4}{8D_0(1+0,3)} \left\{ \frac{2(1-0,963)(1-0,5719)}{(1-0,3) \, 0,8048} - 0,963 \right\} = 0,0940 \frac{q}{D_0}.$$

Warto podkreślić, że otrzymana w rozważanym przypadku wielkość ugięcia w środku płyty $w(0) = 0,093707q/D_0$ w wyniku rozwiązania siedmiu równań różni się zaledwie o 0,3% od powyższej wartości.

Tablica 1

l	1	2	3	4	5	6	7
$\alpha_l^{(1)}$	2,22	5,45	8,61	11,76	14,91	18,06	21,20

Tablica 2

l	1	2	3	4	5	6	7
$\gamma_l^{(1)^2}$	0,13222	0,057828	0,036845	0,026916	0,021332	0,017601	0,015038

Tablica 3

n	1	2	3	4	5	6	7
$p_n^{(1)}$	-0,21661	0,05919	-0,03039	0,01983	-0,01387	0,01040	-0,008133

Tablica 4. Wartości czynników K_{ni}

$n \backslash l$	1	2	3	4	5	6	7
1	-16,930	-30,365	18,158	-13,810	12,225	-11,192	9,8485
2	-13,281	-593,43	-497,34	243,99	-183,44	144,73	-123,71
3	5,0599	-316,88	-3775,5	-1946,0	961,36	-654,18	505,76
4	-2,8112	113,56	-1421,6	-12960	-6641,8	+2597,0	-1660,0
5	1,9723	-67,670	556,60	-5264,1	-33500	-15470	5638,3
6	-1,4441	43,750	-312,51	1698,3	-12760	-71874	-30722
7	1,1201	-32,171	206,42	-928,47	3974,2	-26248	-136560

5.2. Wyznaczenie ugięcia płyty utwierdzonej wzdłuż brzegu

Rozważmy płytę kołową pełną, utwierdzoną wzdłuż brzegu o sztywności zginania zmieniającej się wg funkcji (5.1), poddaną na całej powierzchni działaniu obciążenia równomiernego o intensywności q na jednostkę powierzchni. Wyznamy ugięcie w środku tej płyty.

Nieskończony układ równań w przypadku symetrii obciążenia przyjmuje postać (5.2) ($i=2$), przy czym $\gamma_i^{(i)^2} = J_0^2(\alpha_i^{(i)})$, a $\alpha_i^{(2)}$ jest pierwiastkiem algebraicznym następującego równania przestępnego:

$$(5.16) \quad J_1(\alpha_i^{(2)})I_0(\alpha_i^{(2)}) + J_0(\alpha_i^{(2)})I_1(\alpha_i^{(2)}) = 0.$$

Szereg określający ugięcie płyty ma postać (5.7). Wzory na współczynniki nieskończonego układu równań $K_{ni}^{(i)}$ i $p_n^{(i)}$ są takie same jak w przykładzie 1, (5.9) i (5.10), wzór (5.8) na współczynnik $K_{nm}^{(i)}$; można go w tym przypadku uprościć do postaci

$$(5.17) \quad K_{nm}^{(i)} = -\frac{D_0 g}{\gamma_n^{(i)^2} \left\{ \left(\frac{2}{3} - \nu \right) \alpha_n^{(i)^2} [J_1^2(\alpha_n^{(i)}) + \beta_n^{(i)^2} J_1^2(\alpha_n^{(i)})] + \frac{1}{3} \alpha_n^{(i)^4} J_0^2(\alpha_n^{(i)}) + \right. \\ \left. + 2\alpha_n^{(i)^2} \beta_n^{(i)} J_1(\alpha_n^{(i)}) I_1(\alpha_n^{(i)}) \right\}} - D_0 \alpha_n^{(i)^4}.$$

Tablica 5

n, l w_l	1	2	3	4	5	6	7
w_1	0,01279429	0,01351571	0,01369029	0,01374514	0,01377196	0,01378943	0,01379916
w_2	—	-0,00040222	-0,00046065	-0,00047741	-0,00048531	-0,00049036	-0,00049312
w_3	—	—	0,00006506	0,00007528	0,00007969	0,00008236	0,00008381
w_4	—	—	—	-0,00001695	-0,00002068	-0,00002301	-0,00002496
w_5	—	—	—	—	0,00000684	0,00000876	0,00000969
w_6	—	—	—	—	—	-0,00000336	-0,00000432
w_7	—	—	—	—	—	—	0,00000176

Tablica 6

n, l $\frac{w_l}{\gamma_l^{(1)}} \Delta_{ll}^{(0)} = x_l$	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0,093235	0,098492	0,099765	0,100164	0,100360	0,100495	0,100566
x_2	—	-0,006959	-0,007970	-0,008260	-0,008397	-0,008484	-0,008532
x_3	—	—	0,001766	0,002043	0,002161	0,002235	0,002274
x_4	—	—	—	-0,000630	-0,000768	-0,000855	-0,000927
x_5	—	—	—	—	0,000321	0,000410	0,000454
x_6	—	—	—	—	—	-0,000191	-0,000245
x_7	—	—	—	—	—	—	0,000117
$\sum x_l$	0,093235	0,091533	0,093561	0,093317	0,093677	0,093610	0,093707

Rozwiązanie ograniczono do znalezienia pięciu wyrazów szeregu (5.7), określającego ugięcie płyty oraz obliczenia jej ugięcia w środku. Obliczenia wykonano dla następujących danych: $\nu=0,3$, $R=1$, $g=7$, co odpowiada stosunkowi 1 : 8 sztywności płyty w środku do sztywności brzegu. Wystarczającą dokładność otrzymano przy uwzględnieniu układu składającego się z pięciu równań.

Tablica 7

l	1	2	3	4	5
$\alpha_l^{(2)}$	3,20	6,31	9,44	12,58	15,72

Tablica 8

l	1	2	3	4	5
$\gamma_l^{(2)^2}$	0,10250	0,05067	0,03382	0,02547	0,02042

Tablica 9

n	1	2	3	4	5
$p_n^{(2)}$	-0,16409	0,06548	-0,03682	0,02423	-0,01751

Tablica 10. Wartości czynników K_{nl}

$n \backslash l$	1	2	3	4	5
1	-481,27	936,16	-646,12	559,04	-506,84
2	462,78	-5910,5	6380,8	-3404,5	2924,4
3	-213,18	4258,8	-27994	23795	-11727
4	138,93	-1711,4	17922	-86248	63339
5	-100,97	1178,5	-7081,0	50777	-158973

Tablica 11

$n, l \backslash w_1$	1	2	3	4	5
$10^{-8}w_1$	34095	37679	37812	37833	37833
$10^{-9}w_2$	—	18423	20149	20286	20304
$10^{-10}w_3$	—	—	15010	17699	17843
$10^{-11}w_4$	—	—	—	29379	33059
$10^{-12}w_5$	—	—	—	—	46479

Pierwiastki równania przestępnego (5.16), współczynniki układu równań (5.5) oraz wartości $\gamma_l^{(2)^2}$ podano w tablicach 7, 8, 9 i 10. Wynik rozwiązania układu równań (5.5) dla $n, l=5$ podano w tablicy 11.

Dla zilustrowania procesu zbieżności współczynników szeregu (5.7) dokonano rozwiązania układu równań (5.5) kolejno dla $n, l=1, 2, 3, 4$, a wyniki zamieszczono również w tablicy 11. Ugięcie płyty w środku obliczono za pomocą szeregu (5.7) przy wykorzystaniu jego współczynników otrzymanych z rozwiązania układu równań (5.5) dla $n, l=1, 2, 3, 4, 5$ podano w tablicy 12.

Tablica 12

n, l	1	2	3	4	5
w^l $\gamma_l^{(1)2} \Delta_l^{(0)}(0) = x_l$					
x_1	0,0035117	0,0038808	0,0038945	0,0038967	0,0038967
x_2	—	0,0003627	0,0003966	0,0003993	0,0003998
x_3	—	—	0,0000444	0,0000523	0,0000528
x_4	—	—	—	0,0000115	0,0000130
x_5	—	—	—	—	0,0000023
Σx_l	0,0035117	0,0042435	0,0043355	0,0043598	0,0043646

5.3. Doprowadzenie uzyskanych wyników do znanych wzorów dla płyt o stałych sztywnościach

Łatwo zauważyć, że w przypadku płyty swobodnej podpartej o stałej sztywności $D(r)=D_0$, obciążonej równomiernie na całej powierzchni, otrzymujemy na podstawie nieskończonego układu równań (5.1) następujący nieskończony szereg:

$$w(r) = \frac{qR^6}{D_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Delta_{1l}^{(0)}(R)}{\alpha_l^{(1)5} \gamma_l^{(1)2}} \Delta_{1l}^{(0)}(r).$$

Można sprawdzić, że suma powyższego szeregu wyraża się znaną funkcją

$$w(r) = \frac{q}{64D_0} \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} R^4 - 2 \frac{3+\nu}{1+\nu} R^2 r^2 + r^4 \right),$$

która opisuje równanie powierzchni ugięcia wyżej omawianej płyty.

W podobny sposób w przypadku płyty o stałej sztywności $D(r)=D_0$, utwierdzonej wzdłuż obwodu oraz równomiernie obciążonej na całej powierzchni, otrzymujemy następujący nieskończony szereg:

$$w(r) = \frac{2qR^6}{D_0} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Delta_{2l}^{(0)}(R)}{\alpha_l^{(2)5} \gamma_l^{(2)5}} \Delta_{2l}^{(0)}(r).$$

Można wykazać, że suma powyższego szeregu wyraża się za pomocą znanej funkcji:

$$w(r) = \frac{q}{64D_0} (R^2 - r^2)^2.$$

6. ZAKOŃCZENIE

Przedstawione w pracy rozwiązanie może mieć zastosowanie praktyczne w różnych konstrukcjach budowlanych i mechanicznych, bowiem obejmuje problemy statyki i dynamiki płyt kołowych, wykonanych z materiału sprężysto-niejednorodnego o zmiennych sztywnościach i dowolnych warunkach brzegowych. Warto dodać, że bez trudności można uwzględnić również wpływ sprężystego podłoża typu Winklera.

Przedstawiony w pracy sposób pozwala na otrzymanie rozwiązań ścisłych, a więc takich, które umożliwiają uzyskanie dowolnie dużej dokładności i oszacowania wyników.

Warto podkreślić, że w każdym z rozważanych przypadków warunków brzegowych doprowadzono rozwiązania do nieskończonego układu algebraicznych równań liniowych, a rozwiązanie nawet dużej liczby równań przy zastosowaniu maszyn liczących nie przedstawia istotnych trudności.*

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Warszawa 1962.
2. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Warszawa 1968.
3. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Warszawa 1961.
4. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, New York-Toronto-London 1951.
5. G. TOLSTOW, *Szeregi Fouriera*, Warszawa 1954.
6. N. W. MCLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, Warszawa 1964.
7. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, 3, Warszawa 1966.
8. O. PICHLER, *Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke*, Berlin 1928.
9. R. GRAN OLSSON, *Biegung kreisförmiger Platten von radial veränderlicher Dicke*, Ing. Arch., 2, 1937.
10. R. GRAN OLSSON, *Unsymmetrische Biegung der Kreisringplatte von quadratisch veränderlicher Steiligkeit*, Ing. Arch., 1, 1939.
11. H. D. CONWAY, *The bending of symmetrically loaded circular plates of variable thickness*, J. Appl. Mech., 1, 1948.
12. H. D. CONWAY, *Analysis of some circular plates on elastic foundations and the flexural vibration of some circular plates*, J. Appl. Mech., 2, 1955.
13. H. D. CONWAY, *Nonaxial bending of ring plates of varying thickness*, J. Appl. Mech., 86, 1958.
14. H. FAVRE, *Sur un type de plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable*, Bull. tech. Suisse romande, 75, 1949.
15. H. FAVRE et E. CHABICZ, *Utude des plaques circulaires d'épaisseur linéairement variable*, Bull. tech. Suisse romande, I, 1950.
16. H. D. CONWAY, *Axially symmetrical plates with linearly varying thickness*, J. Appl. Mech., 2, 1951.
17. P. JANSSENS, H. BASTIN, *Deflexion des plaques circulaires symetriques d'épaisseur variable*, Bull. Acad. Roy. Belg., 2, 1963.
18. Ю. М. Григоренко, Ю. Ф. Лацинник, *Изгиб круглой пластины линейно переменной толщины под действием антисимметричной нагрузки*, Прик. Мех., 7, 1965.
19. UEMATU TOKIO, MORIKAWA YOSHINOBU, *Approximate method by generalized co-ordinates in the problem of circular plate of step wise varying thickness*, Tech. ol. Repts. March. Osaka Univ., 1954.

*) Praca została przygotowana do druku na podstawie rozprawy doktorskiej napisanej pod kierunkiem doc. dra hab. Zbigniewa MAZURKIEWICZA.

20. С. Н. Соколов, *Расчет круглых и кольцевых пластинок постоянной и переменной жесткости*, Сб. Расчеты на прочность, Вып. 3, М. Машгиз, 1958.
21. А. Д. Коваленко, *Пластины и оболочки в роторах турбомашин*, Киев 1955.
22. А. Д. Коваленко, *Круглые пластины переменной толщины*, Москва 1955.
23. H. FAVRE, W. SCHUMANN, M. MARTINOLA, *Etude experimentale et theorique de la repartition des tensions dans plaques circulaires fléchies d'épaisseur variable*, Bull. tech. Suisse romande, 4, 6, 1960.
24. G. IRADJ TADJBAKHSH, *Elastic optimum design of circular plates*, Developm. Mech., 1, N. York 1961.
25. Ю. М. Григоренко, *Про антисимметричную деформацию круглой пластины эллиптической толщины*, Доклады АН УССР, 6, 1962.
26. F. TÖLKE, H. GOESSER, *Über den Spannungszustand in Kreisplatten mit exponentiall veränderlicher*

Wandstärke unter Einschluss zweier Tafeln für die Funktionen $ei(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{1-\xi}}{\xi} d\xi$ *und* $eii(x) = \int_x^{\infty} \frac{ei(x)}{\xi} dx$, Schriftenr Otto Graf-Inst. Tech. Hochschule, Stuttgart 1964.

27. TSUI EDWARD YW, *Bending of tapered plates*, J. Spacecraft and Rockets, 6, 1966.
28. D. VAIRAKTARIS, *Contribution to the solution of circular plates of non uniform thickness*, Epistimoniki ekdosis tech. epimelitiriu ellados, 1, 1966.
29. E. KRYNICKI, Z. MAZURKIEWICZ, *Wyznaczenie przybliżonych wielkości ugięć i momentów płyt kołowych o zmiennych grubościach*, Arch. Budowy Maszyn, 3, 1960.
30. Я. Ремнев, *Собственные колебания круглой пластины переменной толщины*, Науч. Зап. Одесск. Полит., 34, 1961.
31. Я. Ремнев, *Колебания заземленной по контуру круглой пластины переменной толщины*, Изв. Выст. Учеб. Завед., Физика, 2, 1962.
32. M. BLUMENFELD, *Circular symmetrically loaded plates of constant and variable thickness, calculated by the three unknown method*, Bul. Inst. politechn. Bucuresti, 3, 1962.
33. J. JIREUSEK, *Kruhove desky promenne tloustky*, Stavebn casop., 6, 1962.
34. Н. М. Муштари, *Об одной обратной задаче теории изгиба упругих пластин переменной толщины*, Инжин. Журн., 3, 1964.
35. А. Ф. Смирнов, *Численный метод расчета круглой Пластины переменной толщины при полярно-симметричной нагрузке*, Труды Моск. Инст. Инж. Ж. Д. Транс., 194, 1966.
36. С. Х. Губеев, *К расчету круглых пластин переменной толщины*, Докл. Науч. Тех. Конф. по Итогам Научно-Иссл. Работ, Москва 1967.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ И ИЗГИБ ПЛАСТИНОК С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

В работе обсуждается задача, касающаяся изгиба и колебаний круговой изотропной пластинки с малыми изгибами, с массой и жесткостью переменных осесимметрически. Учитывается свободно опертые пластинки и заземленные по краю и пластинки со свободным краем, подверженные действию, произвольно гармонически изменяющейся во времени нагрузки. Кроме того описан способ действия при неоднородных краевых условиях и обобщаются решения для пластинки с произвольно переменной жесткостью и массой для случая ее свободного опирания по краю.

Решение дифференциального уравнения колебания и изгиба круговой пластинки представлено с помощью двойного ряда Фурье-Бесселя, основанного на системе собственных функций дифференциального уравнения свободных колебаний круговой однородной пластинки с постоянной жесткостью их изгиб, являющегося произведением функции косинуса и комбинации линейной функции Бесселя первого ряда. Применяя ортогонализационный

метод, решение вопроса сводится к бесконечной алгебраической системе неоднородных линейных уравнений. В результате решения этой системы получаются коэффициенты ряда Фурье-Бесселя. Полученное решение можно простым образом свести к известным видам для случая однородной пластинки постоянной жесткости. Даются конкретные примеры, иллюстрирующие практическое применение представленного общего решения.

SUMMARY

VIBRATIONS AND BENDING OF CIRCULAR PLATES
WITH VARYING RIGIDITY

In this paper consideration is given to the problem of bending and vibration of a circular isotropic plate with small bendings and circular-symmetrically varying mass and rigidity of bending. Plates freely supported and fixed along the edge are also considered, together with plates with a free edge subjected to an arbitrary load harmonically varying with time. Further, the method of procedure with inhomogeneous boundary conditions is described, and the solution is generalized for a plate with arbitrarily variable rigidity and mass in the case of free support along the edge.

The solution of the differential equation for vibration and bending of the circular plate is given by the double Fourier-Bessel series, based on a set of eigenfunctions of the differential equation for the free vibrations of a uniform circular plate with constant rigidity of bending, which is a product of the cosine function and a linear combination of the Bessel functions of the first kind. Using the orthogonalization method the solution of the problem was brought to an infinite set of algebraic nonhomogeneous linear equations. Solution of this set gives the coefficients of the Fourier-Bessel series. The solution obtained may in a simple manner be reduced to the known forms in the case of a uniform plate with constant rigidity. Concrete examples are given, illustrating the practical application of the general solution presented.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 grudnia 1970 r.
