

## METODA PRZEMIESZCZEŃ DLA UKŁADÓW LEPKOSPĘŻYSTYCH

JAN KUBIK (GLIWICE)

### 1. WSTĘP

W większości materiałów konstrukcyjnych czas jest parametrem mającym istotny wpływ na zachowanie się materiału. Będziemy tutaj mieli na uwadze głównie zjawiska pełzania i relaksacji występujące w materiałach konstrukcyjnych. Najprostszy możliwie opis tych cech materiału daje liniowy model ośrodka lepkospężystego, aczkolwiek takie materiały jak np. stal wykazują odchylenia w kierunku nieliniowej lepkospężystości [9], a beton najlepiej opisywany jest przez modele materiałów podlegających starzeniu się [8 i 9].

Statyka układów prętowych lepkospężystych (quasi-statyka) wymaga odpowiednio uogólnionych (w stosunku do stanu sprężystego) metod rozwiązywania tych układów. W zakresie sprężystym najczęściej stosowane są metody sił i przemieszczeń. Uogólnienie pierwszej z nich zostało podane w pracy [11]. Celem niniejszego artykułu jest uogólnienie równań metody przemieszczeń na układy lepkospężyste oraz analiza ich ważniejszych właściwości. Ponadto w pracy podano również ogólniejszą postać równań metody przemieszczeń dla materiałów podlegających starzeniu się. Analizowano dla tych układów, także w postaci ogólnej, możliwość sprowadzenia układu równań całkowych, odpowiadających metodzie przemieszczeń, do takiego rozdzielenia układu równań, że w każdym z nich występuje tylko jedna poszukiwana funkcja przemieszczeń. Sytuacja ta jest o tyle korzystna, że zawsze będzie wiodła do rozwiązania, w krańcowym przypadku na drodze metod numerycznych. Zakres zastosowania pozostaje w zasadzie taki sam jak w przypadku sprężystym, tzn. będą istniały układy i obciążenia, które łatwiej będzie rozwiązać za pomocą tej metody niż innych i na odwrót.

Będziemy tutaj mieli na uwadze m.in. konstrukcje na terenach szkód górniczych, które są poddawane długotrwałym przemieszczeniom, z góry określonym przez ruch górotworu. Przykładem może tu być przemieszczenie przesuwające się ze stałą prędkością, dla którego odpowiednie wzory podano w niniejszej pracy. W tym przypadku bowiem nieuwzględnienie cech reologicznych konstrukcji prowadzi do znacznych różnic w stosunku do rzeczywistości. Uzyskane równania są stosunkowo dogodnie do rozwiązywania metodą przekształceń całkowych.

Pozytywnym momentem jest również fakt, że obliczenia wykonane dla jednego typu funkcji obciążenia można łatwo przenieść na inne układy tak samo obciążone i z tego samego materiału. Z drugiej strony jednak ta dogodność wpływa na ogra-

niczenie zastosowań, które są możliwe tylko w przypadkach liniowych ośrodków lepkosprężystych.

## 2. ZAŁOŻENIA

Będziemy rozpatrywali ośrodek odkształcalny  $\mathcal{B}$ , w którym cząstka  $x_i$  ma współrzędne  $x_i = \{X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}\}$ ,  $t=0$ ; równania stanu mają postać [8]

$$(2.1) \quad \sigma(t) = E \left( \varepsilon(t) + \int_0^t \Psi(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right), \quad \tau \in [0, t],$$

a przeprowadzone rozważania są prawdziwe przy założeniach teorii małych odkształceń. W równaniu [2.1] przez  $\sigma$  oznaczono naprężenie,  $\varepsilon$  odkształcenie,  $E$  jest modułem sprężystości,  $\Psi$  funkcją relaksacji, a  $t$  czasem. Jeżeli w równaniu (2.1) opisującym ośrodek podlegający starzeniu się założyć, że jądro  $\Psi(t, \tau)$  ma postać  $\Psi(t, \tau) = \Psi(t - \tau)$ , to uzyskujemy ogólną postać równań liniowej lepkosprężystości [7 i 8]

$$(2.2) \quad \sigma(t) = E \left( \varepsilon(t) + \int_0^t \Psi(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right).$$

## 3. RÓWNANIA ZAGADNIENIA

Założymy, że dany jest układ prętowy sprężysty,  $N$ -krotnie geometrycznie niewyznaczalny, dla którego równania metody przemieszczeń mają postać

$$(3.1) \quad \varphi_i M_{ij}^\circ + \varphi_r^\circ M_{rj}^\circ = M_j^\circ, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad r = 1, 2, \dots, P.$$

W układzie równań (3.1)  $\varphi_i$  jest poszukiwanym przemieszczeniem uogólnionym (przemieszczeniem lub obrotem) punktu  $x_i$ ,  $\varphi_r^\circ$  danym przemieszczeniem punktu  $x_r$ ,  $M_{ij}^\circ$  uogólnioną siłą (siłą lub momentem) działającą w punkcie  $x_j$  odpowiadającą jednostkowemu wymuszaniu przemieszczenia  $\varphi_i = \mathbf{1}_i$  w miejscu  $x_i$  a  $M_j^\circ$  uogólnioną siłą w punkcie  $x_j$ . W równaniu (3.1) i dalszych należy stosować konwencję sumacyjną Einsteina. Ponadto uogólnioną siłę będziemy nazywali krótko siłą, podobnie uogólnione przemieszczenie krótko przemieszczeniem.

Wykorzystamy teraz wyniki zawarte w pracy [10], w szczególności zaś liniową postać zależności między przemieszczaniem a naprężeniem w różnych cząstkach ośrodka. Dodatkowo przyjmując, że siły wewnętrzne będą traktowane jako siły wzajemnego oddziaływania, znajdziemy

$$(3.2) \quad M_j(t) = \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(\tau) M_{ij}(t, \tau) d\tau \quad (\text{nie sumować!}),$$

gdzie  $M(x_j, t) = M_j(t)$  jest siłą w punkcie  $x_j$ ,  $\varphi_i(t)$  przemieszczeniem w punkcie  $x_i$ , a  $M_{ij}(t, \tau)$  pewną funkcją w dalszej części dokładnie omówioną, w ogólności zależną od fizycznych właściwości materiału oraz położenia punktów  $x_i$  i  $x_j$ .

Dla porównania dodajmy, że wzór (3.2) dla układu sprężystego ma postać

$$(3.3) \quad M_j = \varphi_i M_{ij}^\circ.$$

Równania metody przemieszczeń dla układów sprężystych (3.1) są w istocie pewną sumą formuł postaci (3.3) wyrażających warunki równowagi w punkcie  $x_j$  (równowaga węzła lub piętra).

Postępując taką samą drogą jak poprzednio przy konstruowaniu równań metody przemieszczeń dla układu  $N$ -krotnie geometrycznie niewyznaczalnego, sprężystego uzyskujemy układ równań metody przemieszczeń dla takiego samego układu, lecz wykonanego z materiału podlegającego procesowi starzenia się:

$$(3.4) \quad \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(\tau) M_{ij}(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r^\circ(\tau) M_{rj}(t, \tau) d\tau = 0, \\ \tau \in (-\infty, t], \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad r = 1, 2, \dots, P.$$

Ponadto, jeżeli na cząstkę  $x_j$  działa siła uogólniona  $P_j^\circ(t)$  odpowiadająca fizycznie warunkowi, które dane równanie reprezentuje, to wówczas układ (3.4) przyjmie nieco ogólniejszą postać

$$(3.5) \quad \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(\tau) M_{ij}(t, \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r^\circ(\tau) M_{rj}(t, \tau) d\tau = P_j^\circ(t).$$

W równaniach (3.4) i (3.5)  $\varphi_i(t)$  jest poszukiwanym przemieszczeniem punktu  $x_i$ ,  $\varphi_r^\circ$  danym przemieszczeniem punktu  $x_r$ ,  $P_j^\circ$  daną siłą działającą na cząstkę  $x_j$ ,  $M_{ij}(t, \tau)$  siłą działającą w punkcie  $x_j$  wywołaną odpowiadającym tej sile przemieszczeniem cząstki  $x_i$ , równym jedności  $\varphi_i(t) = \mathbf{1}_i H(t)$ , gdzie  $H(t)$  oznacza funkcję Heaviside'a. Podobnie  $M_{rj}(t, \tau)$  wywołane jest siłą  $\varphi_r(t, \tau) = \mathbf{1}_r H(t - \tau)$ , gdzie  $\tau_r$  oznacza początkową chwilę wymuszenia przemieszczenia  $\mathbf{1}_r$ .

Znacznie prostszą postać równań (3.5) otrzymamy przyjmując, że funkcje  $M_{ij}(t, \tau)$  są postaci  $M_{ij}(t, \tau) = M_{ij}(t - \tau)$ , co odpowiada [10] liniowej lepkospężystości.

Uzyskujemy wtedy następujący układ równań metody przemieszczeń dla układu lepkospężystego:

$$(3.6) \quad \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(\tau) M_{ij}(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r^\circ(\tau) M_{rj}(t - \tau) d\tau = P_j^\circ(t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

Założymy teraz, że proces narastania obciążeń i przemieszczeń związany jest tylko z przedziałem czasu  $[0, \infty)$  przy braku przemieszczeń i naprężeń w chwili  $t = 0$ :

$$(3.7) \quad \varphi_j(s) \equiv 0, \quad \varphi_r^\circ(s) \equiv 0, \quad P_j^\circ(s) \equiv 0, \quad s = t \text{ dla } t \in (-\infty, 0].$$

Wtedy układ równań (3.6) napiszemy w równoważnej postaci

$$(3.8) \quad \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} M_{ij}(\tau) \varphi_i(t - \tau) d\tau + \varphi_i(t) M_{ij}(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} M_{rj}(\tau) \varphi_r^\circ(t - \tau) d\tau + \\ + \varphi_r^\circ(t) M_{rj}(0) = P_j^\circ(t).$$

Analizując funkcje  $M_{ij}(t)$  wywołane działaniem stałego w czasie przemieszczenia, stwierdzimy ([3], str. 68), że można je przedstawić w postaci

$$(3.9) \quad M_{ij}(t) = M_{ij}^{\circ} g(t),$$

gdzie  $M_{ij}^{\circ}$  jest równe  $M_{ij}^{\circ}$  w równaniach (3.1) zagadnienia sprężystego, a  $g(t)$  zależy od modelu ośrodka i jest podana w paracy [3] na str. 69, gdzie została oznaczona przez  $F(t)$  ( $g(t) \equiv F(t)$ ). Wtedy z (3.6) uzyskujemy równania postaci

$$(3.10) \quad M_{ij}^{\circ} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r(\tau, \tau_r) M_{rj}(t-\tau, \tau_r) d\tau = P_j^{\circ}(t).$$

Równania (3.10) będą przydatne do rozwiązania ważnego praktycznie przypadku, w którym pewne ustalone przemieszczenie  $\bar{\varphi}$  przesuwa się ze stałą prędkością  $v$  wzdłuż układu, tzn.  $\varphi_r(t, t_r)$  będzie postaci

$$(3.11) \quad \varphi_r(t, t_r) = \bar{\varphi}(x_p - vt) H(t - t_r), \quad x_r = x_p - vt,$$

gdzie punkt  $x_r$  jest zmienny i oznacza aktualne miejsce przemieszczenia  $\bar{\varphi}$  w układzie w chwili  $t = t_r$  ( $x_p$  jest ustalone). Mamy wtedy z (3.10) i (3.11) układ równań

$$(3.12) \quad M_{ij}^{\circ} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} [\bar{\varphi}(x_p - vt) H(t - t_r)] M_{rj}(t-\tau, \tau_r) d\tau = 0.$$

Układ równań (3.12) może być przydatny przy rozwiązywaniu konstrukcji poddanych działaniu przesuującego się ze stałą prędkością  $v$  przemieszczenia, co odpowiada rzeczywistej pracy konstrukcji na terenach szkód górniczych. Przemieszczenie  $\bar{\varphi}$  z reguły przesuwa się dosyć wolno, stąd wpływ tego przemieszczenia na pracę konstrukcji tak w sensie ilościowym jak i jakościowym musi być znaczny, tym bardziej, że wpływ tego przemieszczenia uwidoczni się na pracy konstrukcji po zniknięciu przyczyny.

Jeżeli w układzie równań (3.10) założymy, że  $M_{ij}^{\circ} g(t) = M_{ij}^{\circ} H(t)$ , tzn. że przemieszczeniu jednostkowemu w punkcie  $x_i$  odpowiadać będzie stała siła  $M_{ij}^{\circ}$ , to uzyskamy przypadek równań metody przemieszczeń w sprężystym układzie quasi-statycznym:

$$(3.13) \quad \varphi_i(t) M_{ij}^{\circ} + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r(\tau, \tau_r) M_{rj}(t, \tau_r) d\tau = P_j^{\circ}(t)$$

lub

$$(3.14) \quad \varphi_i(t) M_{ij}^{\circ} + \varphi_r(t, t_r) M_{rj}(t, t_r) = P_j^{\circ}(t).$$

Wreszcie, jeżeli  $\varphi_r$  jest niezależne od czasu, tzn.  $\varphi_r = \varphi_r^{\circ} H(t)$ , to uzyskujemy wyjściowy układ metody przemieszczeń dla przypadku sprężystego, statycznego.

4. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

4.1. Układy lepkospężyste

Rozpatrywane w pracy równania metody przemieszczeń są z formalnego punktu widzenia układem równań całkowych Volterry o jądrach typu splotu, których rozwiązanie nie nastęrcza poważniejszych trudności przynajmniej dla niektórych typów funkcji obciążenia.

Najprostszą drogą wiodącą do rozwiązania jest zastosowanie przekształceń Laplace'a, zdefiniowanych wzorami

$$(4.1) \quad \varphi(p) = \mathcal{L}[\varphi(t)] = \int_0^{\infty} \varphi(t) e^{-pt} dt, \quad \varphi(t) = \mathcal{L}^{-1}[\varphi(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} \varphi(p) e^{pt} dp.$$

Przypisując funkcjom ich transformaty  $\varphi_i(t) \approx \varphi_i(p)$ ,  $M_{ij}(t) \approx M_{ij}(p)$ ,  $P_j(t) \approx P_j(p)$  wykorzystując twierdzenie o splocie oraz założenie o nieodkształconym stanie początkowym, otrzymujemy

$$(4.2) \quad p\varphi_i(p) M_{ij}^{\circ} g(p) + \mathcal{L} \left[ \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r(\tau, \tau_r) M_{rj}(t-\tau) d\tau \right] = P_j(p).$$

Po podzieleniu przez  $pg(p)$  i oznaczeniu

$$S_j(p) = \mathcal{L} \left[ \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r(\tau, \tau_r) M_{rj}(t-\tau) d\tau \right] - P_j(p)$$

uzyskujemy

$$(4.3) \quad M_{ij}^{\circ} \varphi_i(p) + (p \cdot g(p))^{-1} S_j(p) = 0.$$

Otrzymany w ten sposób układ równań algebraicznych (4.3) pozwala napisać następujące ogólne wyrażenie na wartość każdego z nieznanych przemieszczeń:

$$(4.4) \quad \varphi_i(p) = (pg(p))^{-1} (\det \mathring{\mathbf{A}})^{-1} \det \mathbf{A},$$

gdzie  $\mathring{\mathbf{A}}$  i  $\mathbf{A}$  są odpowiednimi macierzami

$$(4.5) \quad \mathring{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} M_{11}^{\circ}, \dots, M_{1i}^{\circ}, \dots, M_{1N}^{\circ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{N1}^{\circ}, \dots, M_{Nj}^{\circ}, \dots, M_{NN}^{\circ} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_{11}^{\circ}, \dots, M_{1,i-1}^{\circ}, S_1(p), M_{1,i+1}^{\circ}, \dots, M_{1N}^{\circ} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{N1}^{\circ}, \dots, M_{N,i-1}^{\circ}, S_N(p), M_{N,i+1}^{\circ}, \dots, M_{NN}^{\circ} \end{bmatrix}.$$

Tutaj  $\det \mathring{\mathbf{A}}$  jest liczbą, natomiast  $\det \mathbf{A}$  będzie zawsze miało postać  $\det \mathring{\mathbf{A}} = \sum_{j=1}^{j=N} s_{ji} S_j(p)$ , gdzie  $s_{ji}$  są pewnymi współczynnikami liczbowymi.

Oznaczając retransformatę ułamka  $(pg(p))^{-1}$  przez  $K(t)$ ,  $(\mathcal{L}^{-1}[(pg(p))^{-1}] = K(t))$  uzyskujemy następujące, ogólne wyrażenie na wartość nieznaną funkcji przemieszczenia  $\varphi_i(t)$ :

$$(4.6) \quad \varphi_i(t) = (\det \mathring{A})^{-1} \int_0^t K(t-\tau) \det A \, d\tau = \sum_{j=1}^{j=N} (\det \mathring{A})^{-1} s_{ji} \int_0^t K(t-\tau) S_j(\tau) \, d\tau.$$

W uzyskanym wyniku końcowym dla pewnych obciążeń i modeli ośrodka może wyniknąć trudność z wyznaczeniem transformaty  $\mathcal{L} \left[ \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r(\tau) M_{rj}(t-\tau) \, d\tau \right]$  oraz retransformaty funkcji  $\mathcal{L}^{-1}[(pg(p))^{-1}] = K(t)$ .

#### 4.2. Układy z materiału podlegającego procesowi starzenia się

Dla układu równań (3.5) znacznie trudniej znaleźć efektywną metodę postępowania, przynoszącą natychmiastowe wyniki. Wydaje się, że w przypadku ogólnym najprościej będzie, jeżeli układ równań przemieszczeń (3.5) ulegnie rozprzężeniu. Zostanie wtedy zastąpiony przez układ  $N$  wzajemnie niezależnych od siebie równań całkowych, liniowych, w których poszukiwać się będzie po jednej nieznaną funkcji  $\varphi_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). Rozwiązanie zaś każdego z tych równań nie jest trudne i jest podane w literaturze dotyczącej równań całkowych [14]. Odpowiednich przekształceń układu równań (3.5), zmierzających do jego rozsprzężenia, dokonamy posługując się twierdzeniem Efrosa o transformacie splotu uogólnionego [5]. Twierdzenie to głosi, że jeżeli  $f_1(t) \approx F_1(p)$  i  $f_2(t, \tau) \approx F_2(p) \cdot e^{-\tau q(p)}$ , gdzie  $F_1(p)$ ,  $F_2(p)$  i  $q(p)$  są funkcjami analitycznymi, to

$$(4.7) \quad \int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t, \tau) \, d\tau \approx F_2(p) F_1(q(p)).$$

Zdefiniujemy teraz funkcje  $\bar{M}_{ij}(t, \tau)$  i  $\bar{M}_{rj}(t, \tau)$ , zależnie od właściwości materiału, w sposób następujący [8]:

$$(4.8) \quad \bar{M}_{ij}(t, \tau) = M_{ij}^{\circ} m(t, \tau) H(t-\tau), \quad \bar{M}_{rj}(t, \tau) = M_{rj}(t, \tau) H(t-\tau),$$

gdzie  $M_{ij}^{\circ}$  jest wartością  $M_{ij}^{\circ}(s)$  w układzie równań (3.1), a  $m(t, \tau)$  jest funkcją zależną od właściwości materiału ([8], str. 180).

Możemy teraz układ równań (3.5) napisać w postaci

$$(4.9) \quad \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(\tau) \bar{M}_{ij}(t, \tau) \, d\tau + \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r(\tau) \bar{M}_{rj}(t, \tau) \, d\tau = P_j(t).$$

Wykorzystując twierdzenie Efrosa przy oznaczeniach

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \bar{M}_{ij}(t, \tau) &\approx M_{ij}^{\circ}(p) e^{-\tau q(p)}, \\ \bar{M}_{rj}(t, \tau) &\approx m_{rj}(p) e^{-\tau q(p)}, \end{aligned}$$

otrzymamy po wykonaniu transformacji Laplace'a układ

$$(4.11) \quad p\varphi_i(q(p)) M_{ij}^\circ m(p) + p\varphi_r(q_r(p)) m_{rj}(p) = P_j(p).$$

Po przekształceniu (4.11) mamy układ równań

$$(4.12) \quad \varphi_i(q(p)) M_{ij}^\circ + m(p)^{-1} R_j(q_r(p), p) = 0,$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenie:

$$(4.13) \quad m_{rj}(p) \varphi_r(q_r(p)) - \frac{1}{p} P_j(p) = R_j(q_r(p), p) = R_j(p).$$

Z układu równań (4.12) otrzymujemy układ  $N$  rozsprzężonych równań postaci

$$(4.14) \quad \varphi_i(q(p)) = (m(p))^{-1} (\det \mathbf{B})^{-1} \det \mathbf{B}_i,$$

w których  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_i$  są określone następująco:

$$(4.15) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} M_{11}^\circ, \dots, M_{1i}^\circ, \dots, M_{1N}^\circ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{N1}^\circ, \dots, M_{Ni}^\circ, \dots, M_{NN}^\circ \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} M_{11}^\circ, \dots, M_{1i-1}^\circ, R_1(p), M_{1i+1}^\circ, \dots, M_{1N}^\circ \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ M_{N1}^\circ, \dots, M_{Ni-1}^\circ, R_N(p), M_{Ni+1}^\circ, \dots, M_{NN}^\circ \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie przedstawiamy układ równań (4.14) w postaci

$$(4.16) \quad \det \mathbf{B} \varphi_i(q(p)) m(p) = \det \mathbf{B}_i$$

i powtórnie wykorzystamy twierdzenie Efrosa, uzyskując  $N$  równań całkowych

$$(4.17) \quad \det \mathbf{B} \int_0^\infty \varphi_i(\tau) \bar{M}_{ij}(t, \tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\{\det \mathbf{B}_i\} \quad (\text{nie sumować!}).$$

W równaniach (4.17)  $\det \mathbf{B}$  ma następującą ogólną formę:

$$(4.18) \quad \mathcal{L}^{-1}\{\det \mathbf{B}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \sum_{j=1}^{j=N} r_{ij} R_j(q_r(p)) \hat{m}_{rj}(p) \right\} = \\ = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \sum_{j=N}^{j=1} r_{ij} \frac{\hat{m}_{rj}(p)}{m_{rj}(p)} R_j(q_r(p)) m_{rj}(p) \right\} = \sum_{j=1}^{j=N} r_{ij} \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left[ \frac{\hat{m}_{rj}(p)}{m_{rj}(p)} \right] \times \\ \times \int_0^\infty R_j(\tau') \bar{M}_r(\tau, \tau') d\tau' d\tau = \sum_{j=1}^{j=N} r_{ij} \int_0^t N(t-\tau) \int_0^\tau R_j(\tau') M_r(\tau, \tau') d\tau d\tau' = \\ = F_i(t), \quad \tau' \in [0, \tau] \quad (\text{nie sumować!}).$$

Tutaj funkcję  $m_{rj}(p)$  tak dobrano, aby spełnić twierdzenie Efrosa [por. wzory (4.10)], a  $N(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{m}_{rj}(p) m_{rj}(p)^{-1}]$ . Zauważymy, że we wzorach (4.18) wszystkie wystę-

pujące funkcje są znane; stąd równania (4.17) mają postać równań całkowych

$$(4.19) \quad M_{ij}^{\circ -1} \det \mathbf{B} \int_0^t \varphi_i(\tau) M_{ij}(t, \tau) d\tau = F_i(t) \quad (\text{nie sumować!}).$$

Uzyskane równania rozwiązuje się dalej metodami znanymi z teorii równań całkowych (np. metodą iteracji; por. [14]).

Z przeprowadzonych w pracy rozważań wynika, że rozwiązywanie układów z materiału lepkosprężystego lub starzejącego się jest w stosunku do sprężystego utrudnione. W wielu jednak praktycznie ważnych przypadkach jest ono osiągalne w postaci zamkniętej, a w pozostałych za pomocą metod numerycznych. Ponadto uważna analiza obu sposobów rozwiązywania pozwala sformułować bardzo korzystny wniosek.

Rozpatrywać będziemy dwa różne układy o tej samej geometrycznej wyznaczalności, wykonane z identycznych materiałów. Pozostaje słuszne następujące stwierdzenie: *Jeżeli wyznaczmy nieznanne funkcje nadliczbowych przemieszczeń  $\varphi_i(t)$  w pierwszym układzie, a wymuszone przemieszczenia  $\varphi_r(t)$  i siły  $P_j(t)$  pierwszego układu występują w drugim, to nieznanne funkcje nadliczbowych przemieszczeń  $\varphi'_i(t)$  drugiego układu spełniają zależności*

$$(4.20) \quad \varphi'_i(t) = \alpha \varphi_i(t).$$

W równości (4.20)  $\alpha$  jest liczbą, którą można wyliczyć bez rozwiązywania układu równań całkowych w drugim układzie. Z powyższego wynika, że istnieje możliwość stabilizowania rozwiązań dla konkretnych funkcji przemieszczeń i obciążeń i wykorzystanie ich w praktyce projektowej.

## 5. WŁASNOŚCI RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Podane w pracy równania, uwzględniające właściwości reologiczne materiału, mające istotny wpływ na zachowanie się konstrukcji powodują, że posiadają one tylko sobie przypisane własności. Będziemy mieli w tym zakresie na uwadze ustalenie tej klasy funkcji przemieszczeń  $\varphi_r(t)$ , która zapewni identyczność rozwiązań z analogicznymi w układzie sprężystym, quasi-statycznym. Po wtóre rozpatrywać będziemy przypadek przemieszczeń harmonicznym w układzie lepkosprężystym i sprecyzujemy warunki zapewniające harmonicznosc przemieszczeń całego układu. Dodatkowo wykazemy, że harmonicznosc przemieszczeń może zachodzić tylko w lepkosprężystym układzie.

Na pierwszy z poruszanych problemów dają odpowiedź następujące twierdzenia.

**TWIERDZENIE 1.** *Jeżeli przemieszczenia  $\varphi_r(t)$  należą do funkcji klasy  $\mathcal{E}^1((\varphi_r \in \mathcal{E}^1[0, \infty))$ , obciążenie  $P_j(t) = 0$ , to przemieszczenia układu lepkosprężystego ( $l-s$ ) są identyczne z przemieszczeniami odpowiadającego mu układu sprężystego, quasi-statycznego ( $s$ ).*



Dowód twierdzenia wynika z analizy układów równań

$$(5.1) \quad \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_i(\tau) M_{ij}^\circ g(t-\tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r^\circ(\tau) M_{rj}^\circ g(t-\tau) d\tau = 0,$$

$$\varphi_i(t) M_{ij}^\circ + \varphi_r^\circ(t) M_{rj}^\circ = 0.$$

Po transformacji pierwszego z układów równań (5.1) i uproszczeniu przez  $g(p)$  ( $g(p) > 0$ ) uzyskujemy wprost drugi z układów (5.1), co wykazuje słuszność tezy.

Dla obciążeń przyłożonych w punktach  $x_j$  ośrodka sprężystego  $(s) P_j(t)_s$  i lepkospężystego  $(l-s) P_j(t)_{l-s}$  słuszne jest

**TWIERDZENIE 2.** *Jeżeli w układach sprężystym  $(s)$  i lepkospężystym  $(l-s)$  spełnione są założenia twierdzenia 1, a siły  $P_j(s)$  i  $P_j(l-s)$  związane są zależnościami:*

$$(5.2) \quad P_j(t)_{(l-s)} = \int_0^t P_j(\tau)_{(s)} g(t-\tau) d\tau,$$

to słuszna pozostaje teza twierdzenia 1.

Słuszność twierdzenia 2 łatwo wykazać na drodze identycznej z dowodem twierdzenia 1, wykorzystując porównanie transformat obu układów równań.

Podobny problem porównania rozwiązań ( $\varphi_{i(s)} = \varphi_{i(st)}$ ) w układach z materiałów sprężystych  $(s)$  i starzejących się  $(st)$  podejmuje

**TWIERDZENIE 3.** *Jeżeli w dwóch identycznych układach tak samo obciążonych, z których materiał pierwszego jest sprężysty a drugiego starzejący się, zachodzić będzie nierówność*

$$(5.3) \quad [\varphi_i(t)]_s \leq \int_0^t [\varphi_i(\tau)_{st}] M_{ij}(t, \tau) d\tau - M_{ij}^\circ (\det \mathring{\mathbf{B}})^{-1} F_i(t) + \varepsilon(t) + f_i(t),$$

to spełniona jest również nierówność

$$(5.4) \quad [\varphi_i(t)]_{st} \leq [f_i(t) - M_{ij}^\circ (\det \mathring{\mathbf{B}})^{-1} F_i(t) + \varepsilon(t)] \exp \left[ \int_0^t M_{ij}(t, \tau) d\tau \right].$$

Nierówność ta daje dogodną podstawę do oszacowania funkcji przemieszczeń  $\varphi_i(t)_{st}$ . W (5.3)  $F_i(t)$  jest funkcją z równań (4.19),  $f_i(t)$  wartością funkcji  $\varphi_i(t)$  z rozwiązania sprężystego, quasi-statycznego, a  $\varepsilon(t)$  pewną małą dodatnio określoną funkcją.

Dowód twierdzenia przeprowadzimy, jeżeli porównamy dwa równania:

$$(5.5) \quad \varphi_i(t)_s - f_i(t) = 0,$$

$$M_{ij}^\circ (\det \mathring{\mathbf{B}})^{-1} \int_0^t \varphi_i(\tau)_{st} M_{ij}(t, \tau) d\tau - F_i(t) = 0.$$

Jeżeli do drugiego z równań dodać funkcję  $\varepsilon(t)$ , to uzyskujemy nierówność (5.3). Dalszy dowód twierdzenia, tzn. wykazanie, że z (5.3) wynika (5.4), zawiera monografia [13].

Będziemy dalej rozpatrywali przypadek okresowych zmian wymuszonych przemieszczeń  $\varphi_r(t)$  na układzie lepkospężystym. Przyjmiemy bez dowodu zało-

zenie, że okresowe wymuszanie przemieszczeń na układzie sprężystym powoduje takie same okresowe przemieszczanie się całego układu oraz okresowość stanu naprężeń w nim panującego. Podamy dalej twierdzenia, które analizują ten problem w układach lepkosprężystych.

**TWIERDZENIE 4.** *Jeżeli przemieszczenia  $\varphi_r(t)$  i siły  $P_j(t)$  są funkcjami okresowymi o okresie  $T$   $\varphi_r(t) = \varphi_r(t+T)$ , to dla czasu  $t > t_0$  (gdzie  $t_0$  jest pewną chwilą znacznie odległą od  $t=0$ ) przemieszczenia całego układu będą dowolnie bliskie przemieszczeń okresowych o okresie  $T$ .*

Dowód. Słuszność tezy wykażemy, jeżeli udowodnimy, że funkcje  $\varphi_i(t)$  we wzorze (4.6) są okresowe:

$$(5.6) \quad \varphi_i(t) = \sum_{j=N}^{j=N} s_{ji} (\det \mathbf{A})^{-1} \int_0^t K(t-\tau) S_j(\tau) d\tau.$$

W równaniu (5.6) należy wykazać, że  $S_j(t)$  jest funkcją okresową. Mamy

$$(5.7) \quad S_j(t+T) = \int_0^{t+T} M_{jr}(t+T-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r^\circ(\tau) d\tau - P_j(t).$$

Zamieniając zmienne całkowania  $\tau = \tau' + T$  otrzymamy

$$(5.8) \quad S_j(t+T) = \int_{-T}^t M_{jr}(t-\tau') \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r^\circ(\tau) d\tau,$$

$$S_j(t+T) - S_j(t) = \int_{-T}^0 M_{jr}(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r^\circ(\tau) d\tau.$$

Funkcji  $P_j(t)$  w równościach (5.8) nie uwzględniono z uwagi na jej okresowość.

Oznaczamy teraz przez  $\Theta$  ( $\Theta < \infty$ ) największą wartość jaką może przyjąć funkcja  $\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_r^\circ(t)$  w przedziale  $[0, \infty)$ . Wykorzystując twierdzenie o wartości średniej, znajdziemy

$$(5.9) \quad |S_j(t+T) - S_j(t)| \leq \Theta T M_{jr}(t-T\lambda), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Biorąc następnie pod uwagę, że  $M_{jr}(t)$  jest funkcją malejącą uzyskujemy potwierdzenie okresowości funkcji  $S_j$ , a następnie powtarzając przeprowadzone rozumowanie w stosunku do równania (5.6) uzyskujemy potwierdzenie tezy twierdzenia 4. Oczywiście, jeżeli  $P_j(t) = 0$ ,  $\varphi_r(t+T) = \varphi_r(t)$  i odwrotnie  $P_j(t+T) = P_j(t)$ ,  $\varphi_r(t) = 0$ , to teza twierdzenia 4 pozostaje nadal słuszna.

W zakończeniu tego rozdziału podamy, że okresowe rozwiązania posiadają również układy spełniające założenia twierdzeń 1 i 2. Można również wykazać, że własności okresowe są związane tylko z układami sprężystymi i lepkosprężystymi, nie posiadają ich natomiast układy z materiału starzejącego się. W przypadkach tych materiałów, jądro  $K(t, \tau)$  nie pozwala napisać nierówności (5.9) [9].

6. ZASTOSOWANIE

Przykład 1. Będziemy poszukiwali przemieszczeń w belce z materiału lepkospężystego (rys. 1) wywołanych działaniem impulsu przemieszczenia  $U_1(t) = U_1^0 \delta(t-t_0)$  ( $\delta$  oznacza deltę Diraca). Przemieszczeń doznaje podpora 1 w chwili  $t=t_0$ . Załóżmy, że lepkospężysty materiał belki opisany jest przez model Maxwella. Równanie metody przemieszczeń dla rozpatrywanego układu ma postać:

$$(6.1) \quad \int_0^t \dot{\varphi}_2(\tau) M_{22}(t-\tau) d\tau + \int_0^t \dot{U}_1(\tau) M_{12}(t-\tau) d\tau = 0, \quad (\cdot) \equiv \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

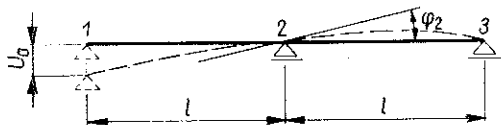
W równaniu (6.1)  $\varphi_2(t)$  jest poszukiwaną funkcją obrotu w punkcie 2, a  $M_{22}(t-\tau)$  i  $M_{12}(t-\tau)$  można przedstawić jako iloczyn sztywności  $M_{22}$  i  $M_{12}$ , wyliczonych jak w układzie sprężystym, pomnożonych przez funkcję relaksacji  $F(t) \equiv g(t)$  (por. [3], str. 69):

$$(6.2) \quad \begin{aligned} M_{12}(t-\tau) &= M_{12}^0 e^{-\kappa_3(t-\tau)}, \\ M_{22}(t-\tau) &= M_{22}^0 e^{-\kappa_3(t-\tau)}, \quad \kappa_3 = \frac{E}{3\eta}. \end{aligned}$$

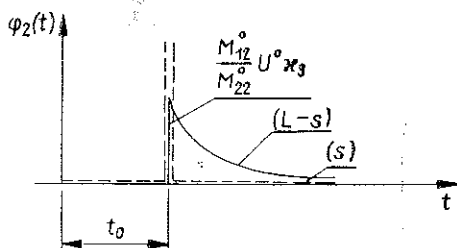
Podstawiając (6.2) do (6.1) otrzymamy

$$(6.3) \quad \int_0^t \dot{\varphi}_2(\tau) M_{22}^0 e^{-\kappa_3(t-\tau)} d\tau - U_1^0 M_{12}^0 \kappa_3 e^{-\kappa_3(t-t_0)} H(t-t_0) = 0,$$

gdzie  $H(t-t_0)$  jest funkcją Heavyside'a,  $E$  modułem sprężystości, a  $\eta$  współczynnikiem lepkości.



Rys. 1



Rys. 2

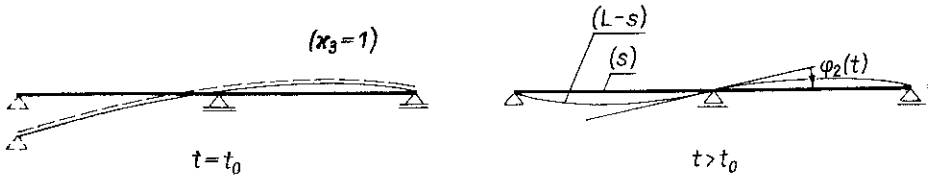
Po wykonaniu transformacji równania (6.3), uporządkowaniu i retransformacji uzyskujemy

$$(6.4) \quad \varphi_2(t) = \frac{M_{12}^0 U_1^0}{M_{22}^0} (\kappa_3 e^{-\kappa_3(t-t_0)} H(t-t_0)).$$

Rozwiązanie identycznego przypadku w układzie sprężystym prowadzi do następującej funkcji  $\varphi_2(t)$ :

$$(6.5) \quad \varphi_2(t) = \frac{M_{12}^0 U_1^0}{M_{22}^0} \delta(t-t_0).$$

Przedstawione na rys. 2 wykresy podają zmiany kąta obrotu podpory 2 jako funkcje czasu w układzie sprężystym i lepkosprężystym. Natomiast rys. 3 przedstawia zmiany odkształceń w całym układzie wywołane działaniem prze-



Rys. 3

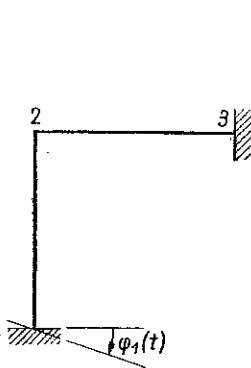
mieszczenia  $U_1 = U_1^0 \delta(t - t_0)$ . Porównanie przemieszczeń w układach sprężystym i lepkosprężystym wykazuje istnienie różnic zarówno w sensie ilościowym jak i jakościowym.

*Przykład 2.* Rozpatrywać będziemy teraz układ ramowy (rys. 4) z materiału lepkosprężystego opisanego modelem Maxwella. Obrót podpory 1 opisuje funkcja

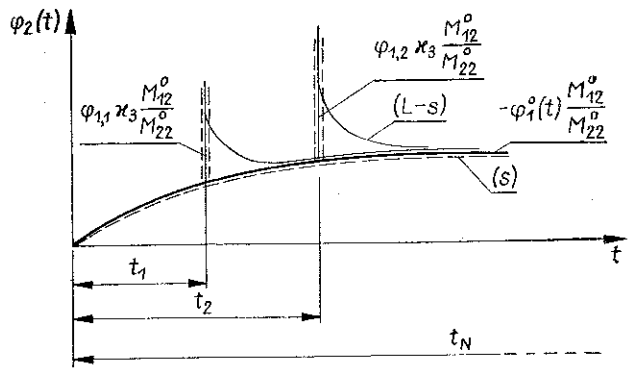
$$(6.6) \quad \varphi_1(t) = \varphi_1^0(t) + \sum_N \varphi_{1N} \delta(t - t_N).$$

Dla układu przedstawionego na rys. 4 równanie metody przemieszczeń jest postaci

$$(6.7) \quad \int_0^t \dot{\varphi}_2(\tau) M_{22}(t - \tau) d\tau + \int_0^t \dot{\varphi}_1(\tau) M_{12}(t - \tau) d\tau = 0.$$



Rys. 4



Rys. 5

Po uwzględnieniu, że funkcje  $M_{22}(t)$  i  $M_{12}(t)$  można przedstawić w postaci (6.2), otrzymamy

$$(6.8) \quad \int_0^t \dot{\varphi}_2(\tau) M_{22}(t - \tau) d\tau + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \varphi_1^0(\tau) + \sum_N \varphi_{1N} \delta(\tau - t_N) \right] M_{12}(t - \tau) d\tau = 0,$$

Jeżeli  $\varphi_1^\circ(t) \in \mathcal{C}[0, \infty)$ , to po wykorzystaniu twierdzenia 1 i przykładu 1 mamy:

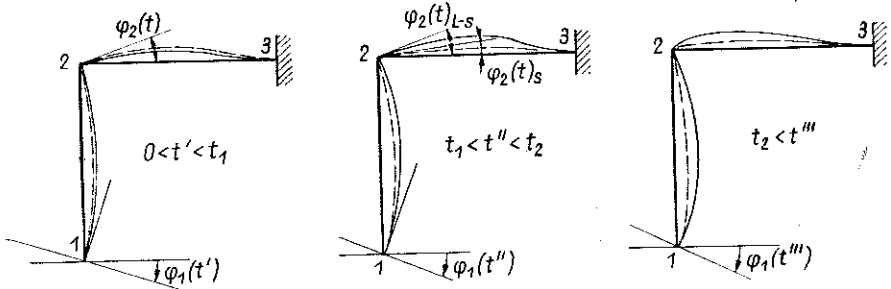
$$(6.9) \quad \varphi_2(t)_{(t-s)} = \frac{M_{12}^\circ}{M_{22}^\circ} \left[ -\varphi_1^\circ(t) + \sum_N \varphi_{1N} \kappa_3 e^{-\kappa_3(t-t_N)} H(t-t_N) \right].$$

W rozwiązaniu sprężystym — quasi-statycznym dla identycznej funkcji  $\varphi_1(t)$  i układu mamy

$$(6.10) \quad \varphi_2(t)_s = \frac{M_{12}^\circ}{M_{22}^\circ} \left[ -\varphi_1^\circ(t) + \sum_N \varphi_{1N} \delta(t-t_N) \right].$$

Wyniki są więc zasadniczo różne. Uzyskane wyniki są przedstawione na wykresach (rys. 5 i 6).

Pierwszy z wykresów przedstawia zmiany kąta obrotu jako funkcję czasu. Na rys. 6 przedstawiono schematycznie postać ramy odkształconej dla różnych czasów.



Rys. 6

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. R. BLAND, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.
2. R. FAURE, A. KAUFMAN, M. DENIS-PAPIN, *Mathématiques Nouvelles*, Paris 1964.
3. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Arkady, Warszawa 1963.
4. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1960.
5. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
6. R. SIKORSKI, *Funkcje rzeczywiste*, T. 2, PWN, Warszawa 1959.
7. E. STERNBERG, M. E. GURTIN, *On the linear theory of viscoelasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4 (1966), 387—404.
8. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Теория ползучести*, Москва 1968.
9. Ю. Н. РАБОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкции*, Наука, Москва 1966.
10. J. KUBIK, *Funkcjonały liniowe w ośrodku odkształcalnym*, Arch. Mech. Stos., (praca złożona w redakcji).
11. J. KUBIK, *Metoda sil i przemieszczeń — układy lepkospreżyste*. ZN Pol. Śl. Bud., Z. 25.
12. J. KUBIK, *Statyka lepkospreżystych układów prętowych*, Praca doktorska, Gliwice 1970. 3, 2 (1970).
13. R. BELLMAN, K. L. COOKE, *Differential-Difference Equations*, Academic Press, New York 1963.
14. С. Г. МИХЛИН, *Лекции по линейным интегральным уравнениям*, Физматгиз 1959.

## Резюме

## МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ СИСТЕМ

В работе даются уравнения метода перемещений для вязко-упругих систем и анализируются их свойства. Более важными из свойств уравнений метода перемещений, это гармоничность, перемещенных и напряженных состояний систем, вызванная гармоничными вынуждениями, а также случай идентичных перемещенных состояний, в упругих и вязко-упругих системах.

## SUMMARY

## METHOD OF DISPLACEMENT FOR VISCO-ELASTIC SYSTEMS

In the paper the equations of the method of displacements are given for visco-elastic systems and their properties are analyzed. The more significant of the analyzed properties of the set of equations of the method of displacements are the harmonicity and of displacement states and stresses of the system caused by harmonic forcing and the cases of identical displacement states in elastic and visco-elastic systems.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1970 r.*

---