

## OBLICZANIE TRWAŁYCH PIONOWYCH DEFORMACJI TORU W ZALEŻNOŚCI OD TYPU NAWIERZCHNI KOLEJOWEJ

STANISŁAWA BONKOWICZ-SITTAUER (WARSZAWA)

### 1. WSTĘP

Współczesny sposób eksploatacji toru kolejowego stawia przed konstruktorami wymagania, dla których spełnienia nie wystarczają tradycyjne sposoby obliczania nawierzchni, wywodzące się z metod stosowanych w statycznych obliczeniach budowlanych.

Istniejące metody pozwalają na sprawdzenie, czy w szynie oraz w podkładzie nie zostaną przekroczone naprężenia dopuszczalne, których wartość jest ustalana z warunków wytrzymałości danego materiału. Własności podłoża bierze się pod uwagę jedynie w celu ściślejszego obliczenia stanów sprężystych szyny i podkładu; natomiast w obliczeniach tego typu nie uwzględnia się trwałych zmian zachodzących w podłożu podkładów w czasie eksploatacji toru, a tym bardziej zmian tych się nie analizuje (<sup>1</sup>).

Trwałe odkształcenia podłoża są źródłem powstawania (i narastania w czasie eksploatacji) deformacji toru kolejowego. Przy obecnym sposobie obliczania nawierzchni uwzględnienie procesu deformowania się toru sprowadza się do przyjęcia naprężeń dopuszczalnych, przekazywanych przez podkład na podsypkę tak niskich, aby proces deformowania się tej warstwy w czasie eksploatacji przebiegał dostatecznie powoli [1].

Gdy deformacje toru osiągną swoje wartości graniczne, wykonuje się naprawę, dzięki czemu przywraca się konstrukcji pełną sprawność eksploatacyjną. Graniczne wartości deformacji toru określa się na podstawie analizy ruchu pojazdów, wychodząc z warunków zapewniających bezpieczną i spokojną jazdę.

Tempo narastania deformacji decyduje o zakresie i częstotliwości napraw toru, jest więc ważnym zagadnieniem ekonomicznym.

Proces tworzenia się i narastania deformacji zależy z jednej strony od konstrukcji, z drugiej od intensywności eksploatacji toru (<sup>2</sup>). Konstrukcję charakteryzują zarówno parametry podłoża jak i sztywność toru, a ściślej górnej części nawierzchni, czyli typ i rozstaw podkładów, a przede wszystkim sztywność szyny. Wzrost inten-

(<sup>1</sup>) Podłożem podkładów nazywamy łącznie: podtorze czyli warstwę gruntową oraz podsypkę, a więc warstwę grubego tłucznia kamiennego. W praktyce obie te warstwy pod wpływem obciążeń odkształcają się i to zarówno sprężyste jak i trwałe.

(<sup>2</sup>) Intensywność eksploatacji toru jest tu rozumiana jako wielkość nacisków osiowych, szybkość jazdy pociągów i obciążenie ogólne jakie przenosi dany odcinek toru w określonym czasie.

sywności eksploataowania torów, przyspieszając tempo ich deformowania, wymaga budowy mocniejszych, ale i dużo droższych konstrukcji nawierzchni.

Najbardziej kosztownym elementem toru jest szyna, a jednocześnie ma ona decydujący wpływ na powstawanie deformacji. Jest rzeczą oczywistą, że tor zbudowany z szyn sztywniejszych (tzn. szyn cięższych) będzie się mniej deformował niż tor z szyn lżejszych (o mniejszej sztywności). Z drugiej strony szyny cięższe są szynami kosztowniejszymi. Dodatkowe koszty wynikają z faktu, że obecnie w kraju produkuje się określony typ szyny. Decyzja o budowie pewnej liczby torów z szyn nowego, cięższego typu pociąga za sobą decyzję o uruchomieniu produkcji tego właśnie typu szyny. Dlatego prawidłowy wybór typu szyny jest sprawą dużej wagi. Wybór taki powinien być dokonywany w oparciu o znalezienie pewnego optimum: ciężaru szyny i zmniejszenia tempa narastania deformacji toru. W istocie rzeczy chodzi tu o znalezienie takiego typu szyny zwanego dalej «optymalnym», przy którym suma kosztów inwestycyjnych (zależna od ciężaru) i kosztów utrzymania (zależna od tempa narastania deformacji toru) byłaby najmniejsza.

Poszukiwanie tak pojętego optymalnego typu szyny trzeba wykonywać na podstawie znajomości funkcji charakteryzującej wielkość trwałych deformacji w zależności od parametrów charakteryzujących konstrukcję toru. Zależności takie otrzymuje się jedynie z doświadczeń i obserwacji już istniejących konstrukcji. Potrzebna jest więc metoda teoretycznego badania wspomnianej funkcji, która umożliwiłaby prześledzenie procesu deformowania się toru dla dużej ilości, nie zawsze nawet produkowanych typów szyn, a dopiero na tej podstawie, wybrania najbardziej odpowiedniego, optymalnego typu szyny.

Oczywiście funkcja uzależniająca wielkość deformacji toru od charakterystyk jego konstrukcji powinna pozwalać na uwzględnienie nie tylko typu szyny, ale i wpływu innych parametrów, a więc rozstawu podkładów i właściwości podłoża.

Oba te zagadnienia: metoda określania zależności deformacji toru od parametrów charakteryzujących jego konstrukcję oraz metoda znajdowania optymalnego typu szyny są przedmiotem przedstawionego artykułu.

W niniejszej pracy zbudujemy pewien matematyczno-mechaniczny model toru, w którym będziemy badali jedynie deformacje pionowe. Wyznamy mianowicie odkształcenia sprężyste, powstające pod wpływem sił zewnętrznych. Znajomość tych odkształceń pozwoli nam, opierając się na podanych w pracy [1] wzorach empirycznych, określić wielkość odkształceń trwałych.

Ustalając pewne warunki podparcia będziemy znajdowali deformacje toru dla różnych typów szyn. Te obliczenia będą wykonane numerycznie.

Następnie zaproponowaną w pracy metodą zostanie znaleziony «najkorzystniejszy»<sup>(3)</sup> typ szyny. Takie postępowanie zostanie powtórzone dla wielu warunków podparcia.

Jak się okaże, aczkolwiek wielkości deformacji zależą w sposób istotny od warunków podparcia, to najkorzystniejsze typy szyn są bardzo zbliżone, co pozwoli

<sup>(3)</sup> Wprowadzamy tu pojęcie «najkorzystniejszy» typ szyny dla typu wybranego przy danych warunkach podparcia, rezerwując pojęcie «optymalny» dla typu, który zostanie wybrany dla wszystkich rozważanych warunków podparcia.

na określenie typu optymalnego, a więc odpowiadającego wszystkim rozważanym warunkom podparcia. Oczywiście fakt ten jest szczególnie ważny ze względów eksploatacyjnych.

## 2. MODEL TORU I DEFORMACJE TRWAŁE

Jako model toru kolejowego przyjmijmy belkę poziomą, ciągłą, nieskończenie długą, opartą punktowo na równomiernie rozstawionych podporach. Ponadto przyjmijmy, że tor w pewnym ale tylko w jednym miejscu jest osłabiony w taki sposób, że mogą tworzyć się tam trwałe deformacje pionowe. W naszym modelu wyrazimy to przy pomocy założenia, że jedna i tylko jedna podpora jest podporą słabszą. To założenie powoduje, że miejscowym deformacjom toru odpowiadają w modelu różne wielkości osiadań podpór.

Przyjmijmy, że belka jest obciążona pojedynczą siłą skupioną  $P$ . Ponieważ analizujemy osiadanie podpór, zajmiemy się tylko położeniami siły na podporach. Siła  $P$  obrazuje nacisk, jaki jest przekazywany na szynę od pojedynczej osi dowolnego pojazdu poruszającego się po torze. Przykładanie siły  $P$  do kolejnych podpór belki naszego modelu ma odpowiadać przemieszczaniu się tej siły (osi pojazdu) wzdłuż toru.

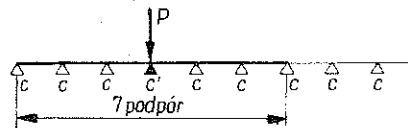
Wobec przyjęcia w modelu tylko jednej podpory słabszej od pozostałych określimy osiadanie trwale tylko dwóch podpór, mianowicie podpory słabszej i sąsiedniej. Osiedlenia te oczywiście będą różne. Za miarę trwałej deformacji pionowej przyjmijmy tangens kąta, jaki tworzy odcinek łączący rozpatrywane, obciążone w różnym stopniu podpory, z poziomem (ściślej, z pierwotnym położeniem) toru (rys. 1).

Ponieważ wpływ pojedynczej siły skupionej, działającej na daną podporę, jest, jak wykazują obserwacje, praktycznie ograniczony do trzech podpór z każdej strony; ponieważ odległości pomiędzy poszczególnymi osiami pojazdów są na ogół przeszło czterokrotnie większe od rozstawu podkładów, ostatecznie więc jako schemat obliczeniowy przyjmujemy belkę siedmiopodporową, obciążoną pojedynczą siłą skupioną  $P$ , przyłożoną do podpory środkowej.

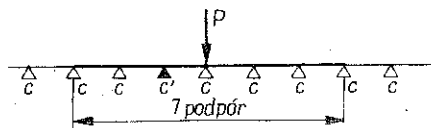
Osiadaniem trwałym podpory pod wpływem obciążeń zewnętrznych nazywamy różnicę między jej posadowieniem (położeniem) przed przyłożeniem obciążenia i po jego usunięciu.

Jak wynika z doświadczeń, osiadania trwale podpór przy jednorazowym obciążeniu są tak małe, że możemy je praktycznie pominąć. Wobec tego reakcje poszczególnych podpór, wywołane jednorazowym obciążeniem, będziemy określać przy

Schemat a



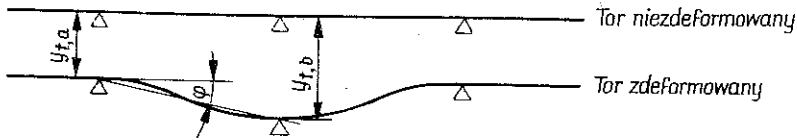
Schemat b



Rys. 1

założeniu, że podpory schematów obliczeniowych są wyłącznie podporami sprężystymi.

Obliczenia osiadań trwałych będą wykonywane dla dwóch schematów (rys. 1). W schemacie pierwszym, zwanym dalej schematem *a*, podpora środkowa jest podpo-



Rys. 2. Sposób oznaczenia kąta deformacji

rą osłabioną. W schemacie *b* podpora środkowa jest nieosłabiona, natomiast podporą słabszą jest podpora sąsiednia. W każdym z tych schematów wyznaczmy osiadania sprężyste podpory środkowej pod wpływem jednorazowego obciążenia *P*.

Interesujące nas osiadania trwałe podpór są wynikiem wielokrotnego obciążania tej samej podpory. Na podstawie doświadczeń określono empiryczny wzór, który uzależnia poszukiwane trwałe osiadania podpory  $y_t$ , powstające w wyniku wielokrotnego obciążania podpory siłą *P*, od odkształcenia sprężystego  $y_s$ , wywołanego jednorazowym przyłożeniem tej siły

$$(2.1) \quad y_t = A (y_s)^B,$$

gdzie *A* i *B* są stałymi zależnymi od charakterystyk podłoża oraz *P* i krotności przyłożeń siły *P* (\*).

Ze wzoru tego będziemy wyznaczali poszukiwane osiadania trwałe podpory środkowej w obu schematach, przy czym osiadania te oznaczymy odpowiednio:  $y_{t,a}$  i  $y_{t,b}$  co pozwoli znaleźć tangens kąta deformacji trwałej (rys. 2):

$$(2.2) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_{t,a} - y_{t,b}}{L},$$

*L* oznacza w tym wzorze odległość podpór.

Przejdźmy do obliczania osiadań sprężystych. Wyznamy je na podstawie równania pięciu momentów. Wypisując takie równania dla każdej podpory otrzymamy dla obu schematów odpowiednie układy równań liniowych z pięcioma niewiadomymi.

Do ułożenia tych równań są nam jeszcze potrzebne pewne założenia dodatkowe. Przyjmijmy więc, że rozpiętość wszystkich przęseł belki jest jednakowa i wynosi *L*, że moment bezwładności przekroju poprzecznego *J* jest stały i że współczynniki

(\*) W praktyce obciążenia toru zmieniają się w pewnym zakresie, więc i sprężyste osiadania są odpowiednio zmienne. Dlatego wspomniany wzór empiryczny traktuje osiadania sprężyste jako zmienną losową. Ponieważ jednak założyliśmy w naszym modelu, że obciążenia zewnętrzne są jednakowe, to sprężyste osiadania danej podpory są również jednakowe i wtedy wspomniany wzór przybiera postać (2.1).

sprężystości podpór mogą przybierać dwie wartości  $C$  i  $C'$ , przy czym  $C' < C$  odpowiada podporze słabszej.

Momenty podporowe oznaczmy odpowiednio dla obu schematów przez  $X_{a, i-1}$  oraz  $X_{b, i-1}$ , gdzie  $i=2, \dots, 6$  jest numerem podpory.

Po wykonaniu właściwych podstawień i uporządkowaniu wyrażeni otrzymamy następujące układy równań:

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{6}{CL^2}\right) X_{a_1} + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{4}{CL^2}\right) X_{a_2} + \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{a_3} = 0, \\
 & \left(\frac{L}{6EI} - \frac{4}{CL^2}\right) X_{a_1} + \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{5}{CL^2} + \frac{1}{C'L^2}\right) X_{a_2} + \\
 & \quad + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{2}{C'L^2}\right) X_{a_3} + \left(\frac{1}{C'L^2}\right) X_{a_4} = -\frac{P}{C'L}, \\
 & \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{a_1} + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{2}{C'L^2}\right) X_{a_2} + \left(\frac{4L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{4}{C'L^2}\right) X_{a_3} + \\
 & \quad + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{2}{C'L^2}\right) X_{a_4} + \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{a_5} = \frac{2P}{C'L}, \\
 & \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{a_2} + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{2}{C'L^2}\right) X_{a_3} + \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{5}{CL^2} + \frac{1}{C'L^2}\right) X_{a_4} + \\
 & \quad + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{4}{CL^2}\right) X_{a_5} = -\frac{P}{C'L}, \\
 & \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{a_3} + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{4}{CL^2}\right) X_{a_4} + \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{6}{CL^2}\right) X_{a_5} = 0, \\
 (2.3) \quad & b) \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{5}{CL^2} + \frac{1}{C'L^2}\right) X_{b_1} + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{2}{C'L^2}\right) X_{b_2} + \left(\frac{1}{C'L^2}\right) X_{b_3} = 0, \\
 & \left(\frac{L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{2}{C'L^2}\right) X_{b_1} + \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{2}{CL^2} + \frac{4}{C'L^2}\right) X_{b_2} + \\
 & \quad + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{2}{C'L^2}\right) X_{b_3} + \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{b_4} = \frac{P}{CL}, \\
 & \left(\frac{1}{C'L^2}\right) X_{b_1} + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{2}{CL^2} - \frac{2}{C'L^2}\right) X_{b_2} + \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{5}{CL^2} + \frac{1}{C'L^2}\right) X_{b_3} + \\
 & \quad + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{4}{CL^2}\right) X_{b_4} + \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{b_5} = \frac{2P}{CL}, \\
 & \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{b_2} + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{4}{CL^2}\right) X_{b_3} + \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{6}{CL^2}\right) X_{b_4} + \left(\frac{L}{6EI} + \frac{4}{CL^2}\right) X_{b_5} = -\frac{P}{CL}, \\
 & \left(\frac{1}{CL^2}\right) X_{b_3} + \left(\frac{L}{6EI} - \frac{4}{CL^2}\right) X_{b_4} + \left(\frac{4L}{6EI} + \frac{6}{CL^2}\right) X_{b_5} = 0.
 \end{aligned}$$

Po obliczeniu momentów podporowych można określić reakcje  $R_a$  i  $R_b$  podpór środkowych dla obu schematów. Jak wiadomo z [3] reakcję podpory środkowej w obu schematach można oznaczyć:

$$(2.4) \quad R_i = \frac{1}{L} (X_{i,2} - 2X_{i,3} + X_{i,4}) + P.$$

gdzie  $i=a$  lub  $b$ .

Ponieważ przyjęliśmy, że sprężyste osiadanie podpór określane jest za pomocą wzoru

$$(2.5) \quad y_s = \frac{R_i}{C_i},$$

to osiadania trwale środkowej podpory każdego ze schematów na mocy wzoru (2.1) wynoszą odpowiednio

$$(2.6) \quad y_{t,a} = A \left( \frac{R_a}{C'} \right)^B, \quad y_{t,b} = A \left( \frac{R_b}{C} \right)^B,$$

co po podstawieniu do wzoru (2.2) pozwala wyznaczyć tangens kąta deformacji trwałej.

### 3. DANE PRZYJĘTE DO OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Jak widać z otrzymanych wzorów, kąt  $\varphi$  zależy od działającej siły  $P$ , momentu bezwładności przekroju poprzecznego belki  $J$ , rozpiętości przęseł belki  $L$ , stałych  $A$  i  $B$  oraz od współczynników sprężystości podpór  $C$  i  $C'$ .

Zanim przejdziemy do omówienia sposobu przeprowadzania obliczeń wartości kąta deformacji dla różnych wartości tych parametrów przedyskutujemy zakresy ich zmienności oraz ustalimy wartości, które przyjmujemy do obliczeń numerycznych. Jest rzeczą zrozumiałą, że niektóre wnioski ogólne o tyle będą miały wartość praktyczną, o ile będą odpowiadały rzeczywistym warunkom eksploatacji torów.

*Obciążenie.* Siła  $P$  reprezentuje skupione naciski na tor. Naciski te wahają się w praktyce w granicach od 5T przy lekkich próżnych wagonach towarowych do 21T dla najcięższych typów lokomotyw nowoczesnych.

Ponieważ w obliczeniach siła  $P$  ma mieć stałą wartość, przyjęto, że odpowiada ona tzw. «statystycznej osi». Jest to średni nacisk, jaki wywierają na tor koła pojazdów poruszających się po całej sieci PKP w pewnym określonym czasie (np. jednego roku). Statystyczna oś wynosiła w r. 1967 — 11,98T. Wobec tego, że obliczenia są wykonywane dla jednej szyny, ostatecznie przyjęto  $P=6T$ .

*Sztywność belki.* Moment bezwładności przekroju poprzecznego  $J$  w praktyce zmienia się w przedziale  $1000 \text{ cm}^4 < J < 4600 \text{ cm}^4$ . Przedział ten obejmuje większość stosowanych na świecie typów szyn (tablica 1).

Wartości  $J$ , dla których wykonano obliczenia, zmieniają się co  $200 \text{ cm}^4$ . Dla naszych potrzeb jest to wystarczająca dokładność, aby na podstawie obliczonych wartości deformacji można było drogą interpolacji znajdować wartości deformacji odpowiadające konkretnym typom szyn.

*Odległości podpór modelu.* Rozstaw osi podkładów waha się od 50 cm (w konstrukcjach nowoczesnych) do 80 cm (w starych nawierzchniach typu lekkiego).

W praktyce kolejowej charakteryzując nawierzchnię, używa się pojęcia ilości sztuk na kilometr toru. Jest to wskaźnik dokładniejszy niż rozstaw podkładów, po-

Tablica 1. Charakterystyka istniejących typów szyn

L.p.	Typ (ciężar)	Moment bezwładności
1	c (węgierska)	934
2	P38	1223
3	S41	1355
4	S42	1443
5	P43	1489
6	S49	1815
7	P50	2006
8	S54	2346
9	T57	2680
10	S60	3055
11	P65	3543
12	P75	4597

Tablica 2. Współczynnik podłoża podkładu. Wartości otrzymywane drogą bezpośrednich pomiarów

Rodzaj podsypki	Podłoże	c	Uwagi		
zwir	złe	5	wg Hanker'a		
	dobre	10			
	b. dobre	15			
	tłuczeń	—	5	wg Wulferta	
		na narzucie kamiennym	3	wg Foerстера	
			8		
		złe		5	wg Hankera
			dobre	15	
			b. dobre	25	
		II gat.		10	wg Wulferta
I gat.			15		
b: dobry		suche	8	wg Foerстера	
		wytrzymałe			
		15			

nieważ ten ostatni w rzeczywistości znacznie nieraz odbiega od teoretycznego. Na PKP stosuje się obecnie zasadniczo dwa typy rozstawu podkładów: rozstaw normalny 65,5 cm, dla którego liczba podkładów na jeden kilometr toru wynosi 1640 sztuk, oraz tzw. rozstaw zagęszczony o liczbie 1730 sztuk na jeden kilometr toru i dla którego średni rozstaw podkładów wynosi 58,5 cm. Ten ostatni w ZSRR jest stosowany dla lżejszych i średnich typów nawierzchni (czemu odpowiadają szyny typu P43), natomiast w krajach Europy zachodniej rozstaw ten jest raczej zalecany do stosowania przy szynach typu UIC60, a więc dla cięższych konstrukcji nawierzchni. Rozstaw podkładów 55,5 cm, odpowiadający liczbie 1870 sztuk/km toru, był wprowadzany w Polsce na niektórych liniach o bardzo dużym natężeniu ruchu; jest on również powszechnie stosowany w ZSRR. Natomiast 50 cm (czyli 2000 sztuk/km) jest stosowany w ZSRR dla typów szyn P65 i P75, a więc dla najcięższych, będących w eksploatacji typów nawierzchni kolejowej.

Wobec powyższego w obliczeniach przyjęto następujące odległości podpór modelu: 65 cm, 60 cm, 55 cm, 50 cm.

*Warunki podparcia.* Charakterystykę sprężystości podpór oparto o wprowadzony przez A. WASIUTYŃSKIEGO [2] współczynnik podłoża podkładu  $c$ , odnoszący się do naprężeń przekazywanych przez podkład na podsypkę. Charakteryzuje on łącznie zarówno podsypkę jak i podtorze, zależy od stanu obu tych warstw, utrzymania

nawierzchni, a nawet od rodzaju pojazdów poruszających się po torze. Wartości tego współczynnika otrzymane drogą doświadczałą przez różnych badaczy podane są w tablicy 2.

W obliczeniach zastosujemy współczynnik skorygowany

$$(3.1) \quad C = cW,$$

gdzie  $W$  oznacza połowę pola powierzchni przylegania podkładu do podsypki.

Wzór na sprężyste osiadanie podkładu ma wtedy postać następującą:

$$(3.2) \quad y_s = \frac{R}{C} = \frac{R}{cW},$$

przy czym dla stosowanego na PKP podkładu drewnianego  $W = 2640 \text{ cm}^2$ .

Przyjęte do obliczeń kombinacje współczynników podłoża  $c$  i  $c'$  odpowiadają

Tablica 3. Stałe podparcia przyjęte do obliczeń

$c$	$c'$	$A$	$b$
15	10	200	2
15	5	20	2
10	5	200	3
25	20	200	2
25	10	2000	3
25	10	200	2

następującym warunkom:  $c = 10$ ,  $c' = 5$  — dla podsypki żwirowej lub słabej tłuczniowej leżącej na słabym podtorzu;  $c = 15$ ,  $c' = 10$  lub 5 — dla średnich najczęściej spotykanych warunków podparcia; dla bardzo dobrej podsypki na mocnym ustabilizowanym podłożu przyjęto  $c = 25$ ,  $c' = 20$  lub 10.

Szczegóły przyjętych do obliczeń warunków podparcia pokazuje tablica 3.

*Stale trwałego osiadania.* Stałe trwałego osiadania (dla obciążenia całkowitego wynoszącego 1 mln t) podane są również w ta-

blicy 3. Przyjęte wartości pochodzą z pracy [1] i badań własnych autorki prowadzonych w torach eksploatowanych.

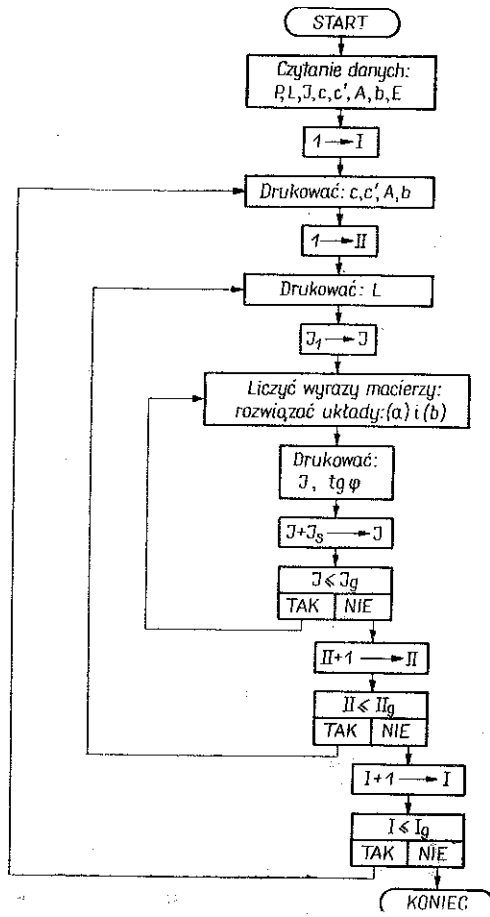
#### 4. OBLICZENIA ZALEŻNOŚCI DEFORMACJI OD TYPU SZYNY

Obliczenia numeryczne prowadzono w sposób następujący: ustalono warunki podparcia i obliczano wartości trwałych deformacji pionowych w zależności od sztywności belki. Następnie ustalano inne warunki podparcia i wykonywano analogiczne obliczenia aż do wyczerpania wszystkich wyżej ustalonych wartości (por. p. 3).

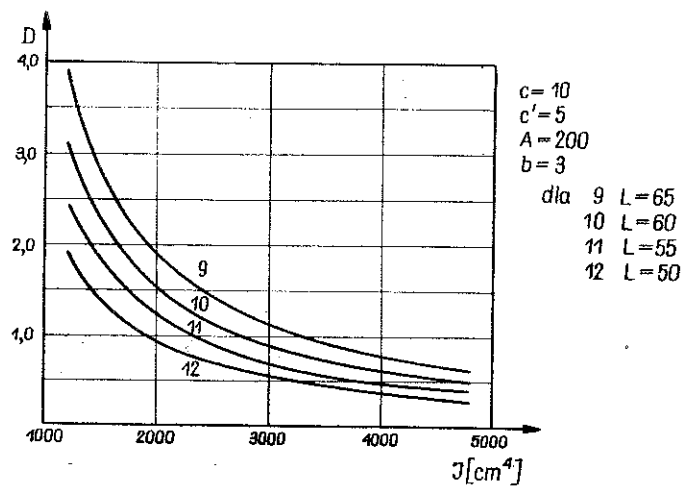
Rysunek 3 przedstawia schemat blokowy takich obliczeń. Pętla wewnętrzna obrazuje zmiany momentu bezwładności. Pętla środkowa dotyczy zmian rozpiętości przeseł belki, a zewnętrzna zmian parametrów podparcia. Program obliczeń został opracowany w języku MINAL, który jest reprezentacją ALGOL-u dla maszyny cyfrowej ODRA 1204. Wielokrotne rozwiązywanie układów równań liniowych wykonano za pomocą procedury zadeklarowanej na początku programu.

Niech  $D = 10^3 \text{ tg } \varphi$  będzie umowną jednostką deformacji. Na podstawie wyników otrzymanych z maszyny cyfrowej w postaci tablic wykonano wykresy zależności





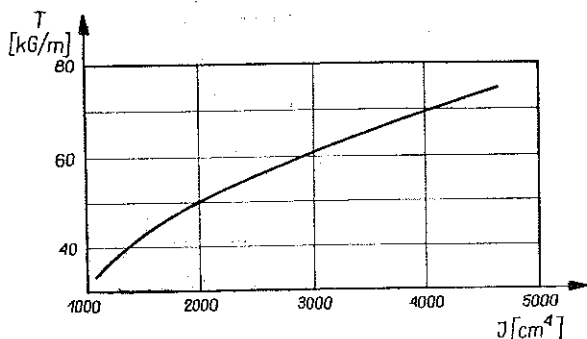
Rys. 3. Algorytm obliczania deformacji



Rys. 4. Przykładowe zależności  $D(J)$

$D$  od  $J$ . Są to wykresy funkcji malejących, przy czym charakter tych krzywych świadczy o tym, że efektywność zwiększania sztywności szyny jest większa w zakresie szyn lekkich niż ciężkich.

Przykłady tych zależności są podane na rys. 4. Ogólna liczba otrzymanych krzy-



Rys. 5. Zależność  $T(J)$

wych, jak wynika z tablicy 3, wynosi 24, mianowicie dla każdego warunków podparcia uwzględniono cztery różne rozstawy podpór belki.

Ponieważ pomiędzy tzw. ciężarem szyny  $T$  (jest to ciężar jednego metra szyny) a momentem bezwładności przekroju poprzecznego szyny  $J$  istnieje jednoznaczna zależność (rys. 5) oraz ponieważ w praktyce inżynierskiej operuje się pojęciem ciężaru szyny, określając w ten sposób jej typ, przeto zastąpiono zależność  $D$  od  $J$  zależnością  $D$  od  $T$ . Otrzymanych tablic wartości nie zamieszczamy, ponieważ w porównaniu z zależnościami  $D$  od  $J$ , których przykładowe wykresy już znamy, nie wnoszą one nic nowego. Zmiana ta była dokonana jedynie dla wygody obliczeń optymalizacyjnych.

## 5. OPTIMALIZACJA

Przedstawimy teraz w skrócie postępowanie jakie zastosowano w celu znalezienia optymalnego typu szyny.

Podzielmy zbiór argumentów funkcji  $D(T)$  na dwa podzbiory (dowolne) jednak w taki sposób, aby został zachowany następujący warunek. Jeżeli  $T_1$  oznacza dowolny argument pierwszego podzbioru, a  $T_2$  drugiego, to dla każdego takiego podziału musi być  $T_1 < T_2$ . Na każdym z tych podzbiorów zlinearyzujemy wykres funkcji stosując metodę najmniejszych kwadratów. Ze wszystkich możliwych podziałów wyróżnimy ten, któremu odpowiada najmniejsza suma kwadratów odchyleń od obu prostych. Sposób i kolejność wykonywania obliczeń na maszynie cyfrowej pokazuje rys. 6.

Przyjmujemy, że funkcja

$$(5.1) \quad D_P = \begin{cases} k_1 T + r_1 & \text{dla } T \leq T_0, \\ k_2 T + r_2 & \text{dla } T > T_0 \end{cases}$$

odpowiadająca wyróżnionemu podziałowi, najlepiej aproksymuje zależność  $D(T)$ . Wartość  $T=T_0$ , której odpowiada punkt kątowy wykresu tej funkcji nazwiemy optymalnym ciężarem szyny <sup>(5)</sup>.

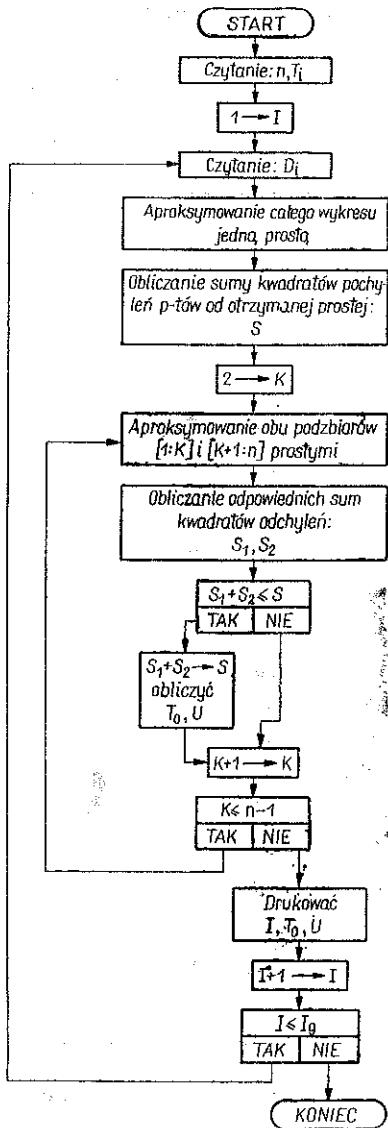
Współczynniki kątowe  $k_1$  i  $k_2$  dobrze charakteryzują efektywność zwiększania ciężaru szyny odpowiednio w przedziałach  $T < T_0$  i  $T > T_0$ , przy czym dla wszystkich rozważanych przypadków efektywność ta jest większa w przedziale  $T < T_0$  niż w przedziale  $T > T_0$ . Wobec tego stosunek  $U = k_1/k_2$  tych współczynników można uznać za wskaźnik zmniejszania efektywności przy przekroczeniu wartości  $T_0$ , co uzasadniałoby przyjęcie jej za wartość optymalną. Oznacza to bowiem, że zwiększenie ciężaru w przedziale  $T < T_0$  jest  $U$  razy bardziej efektywne niż w przedziale  $T > T_0$ . Wyniki obliczeń podane są w tabelicy 4. Otrzymane  $T_0$  i  $U$  zawierają się w następujących granicach:

$$2,458 < U < 2,990, \quad 56,151 < T_0 < 57,938.$$

Ciężar optymalny wyznaczony w opisany sposób dla różnych warunków podparcia zawiera się w bardzo wąskim (z punktu widzenia praktyki) przedziale. Niech  $S_0$  oznacza największą z tych liczb. Ponieważ dla wszystkich uwzględnionych w obliczeniach typów konstrukcji nawierzchni i warunków podparcia szyny cięższe od  $S_0$  nie przynoszą poważniejszych efektów w zmniejszaniu tempa narastania deformacji pionowych, należy przyjąć  $S_0$  za wielkość charakteryzującą optymalny typ szyny. W takim rozumieniu typem optymalnym jest szyna o ciężarze około 58 kg/m, co odpowiada momentowi bezwładności około 2830 cm<sup>4</sup>, a więc bardzo zbliżona do typu UIC 60, dla której  $T=60$  kg/m,  $J=3055$  cm<sup>4</sup>.

Otrzymane wyniki pozwalają stwierdzić, że aczkolwiek budowanie torów z zastosowaniem cięższych typów szyn zawsze wpływa na zmniejszenie tempa narastania trwałych pionowych deformacji, to efektywność tego zmniejszania bywa różna. Wyodrębniono dwa typy szyn. Do pierwszego typu możemy zaliczyć szyny lekkie i średnie, do drugiego — ciężkie.

<sup>(5)</sup> Odpowiada on wspomnianemu na wstępie najkorzystniejszemu typowi szyny.



Rys. 6 Algorytm obliczania optymalnego ciężaru szyny

W ten sposób wykazaliśmy, że optymalnym typem szyny ze względu na brany pod uwagę proces deformowania się toru, jest szyna zbliżona do typu UIC60. Wniosek ten jest zgodny ze światowymi doświadczeniami, dotyczącymi wprowadza-

Tablica 4. Optymalne ciężary szyn i wskaźniki zmiany efektywności

Nr krzywej	L	Parametry				U	T <sub>0</sub>
		c	c'	A	b		
1	65	15	10	200	2	2.581	56.444
2	60					2.562	56.426
3	55					2.519	56.438
4	50					2.458	56.478
5	65	15	5	20	2	2.756	56.308
6	60					2.712	56.313
7	55					2.645	56.339
8	50					2.561	56.392
9	65	10	5	200	3	2.990	56.151
10	60					2.915	56.188
11	55					2.844	56.241
12	50					2.806	56.302
13	65	25	20	200	2	2.549	57.711
14	60					2.563	57.938
15	55					2.536	56.488
16	50					2.514	56.455
17	65	25	10	2000	3	2.888	56.298
18	60					2.925	56.252
19	55					2.919	56.219
20	50					2.875	56.223
21	65	25	10	200	2	2.708	56.398
22	60					2.725	56.361
23	55					2.716	56.341
24	50					2.668	56.347

nia do eksploatacji szyn ciężkich. Poszczególne kraje uznają coraz częściej właśnie szynę o parametrach zbliżonych do szyny UIC60 za typ przynoszący największe efekty, przy czym należy pamiętać, że w ocenie takiej uwzględnia się wszystkie aspekty techniczne i ekonomiczne.

#### 6. OBLICZENIA DEFORMACJI W ZALEŻNOŚCI OD OBCIĄŻENIA CAŁKOWITEGO

Opisany w p. 2 model toru pozwala na rozpatrywanie deformacji tylko w jednym momencie czasowym. Do obliczeń był przyjęty moment, gdy obciążenie całkowite toru od początku jego eksploatacji wynosiło jeden milion ton. Zajmiemy się teraz

zbudowaniem takiego modelu, który pozwoli badać jak przebiega proces deformacji w czasie eksploatacji toru.

### 6.1. Założenia modelu

Ponieważ model ten jest w dużej mierze rozwinięciem modelu poprzedniego, bliżej omówimy więc jedynie założenia nowo wprowadzone.

Zajmijmy się zjawiskami zachodzącymi w torze w rejonie podpory osłabionej.

Po pierwszym przyłożeniu siły, a następnie jej usunięciu, wszystkie podpory osiadają trwale o pewne wielkości. Podpora osłabiona, oznaczmy ją przez  $k$ , i podpory bezpośrednio sąsiadujące z nią osiadają więcej od podpór dalszych, podpory dostatecznie oddalone od podpory  $k$  wykażą osiadanie jednakowe.

Celem naszych rozważań będzie prześledzenie procesu osiadania podpory osłabionej i podpór sąsiednich pod wpływem kolejnych cykli obciążeń. Cyklem obciążeń będziemy dalej nazywali cykl, w którym siła  $P$  obciąży jednokrotnie wszystkie podpory rozpatrywanego modelu.

Po pierwszym cyklu obciążeń otrzymamy więc belkę w rejonie osłabienia posadowioną na różnych poziomach.

Z obserwacji rzeczywistego toru kolejowego wiemy, że w przypadku określonych różnic poziomu posadowienia poszczególnych podkładów, w chwili gdy tor jest nieobciążony, tworzą się luzy między niektórymi podkładami a podsypką. Dla potrzeb naszego modelu taki podkład nazwiemy podporą wiszącą. Na tym etapie rozważań przyjmujemy, że co najwyżej jedna podpora może być podporą wiszącą. W naszym modelu będzie nią podpora  $k$ , ponieważ ta właśnie podpora, jako słabsza od pozostałych, osiadła najwięcej po pierwszym cyklu obciążania.

Podczas drugiego cyklu obciążania belki podpora wisząca będzie włączała się do współpracy dopiero po sprężystym obniżeniu się podpór sąsiednich i obniżeniu się wskutek tego przekroju nad podporą  $k$  o wielkość istniejącego luzu. Wystąpi wtedy zjawisko przeciążenia sąsiednich podpór, które można opisać następująco: część siły  $P$  przekazuje się jedynie na podpory pracujące w pierwszym stadium obciążenia, a więc na wszystkie podpory oprócz podpory wiszącej  $k$ . Tę część całkowitej siły oznaczmy  $P'$ . W chwili gdy sprężyste osiadanie podpór pracujących będzie takie, że belka oprze się na podporze  $k$ , podpora ta włączy się do współpracy, od tego momentu możemy rozpatrywać belkę na wszystkich podporach. Ta belka jest teraz obciążona siłą  $P'' = P - P'$ .

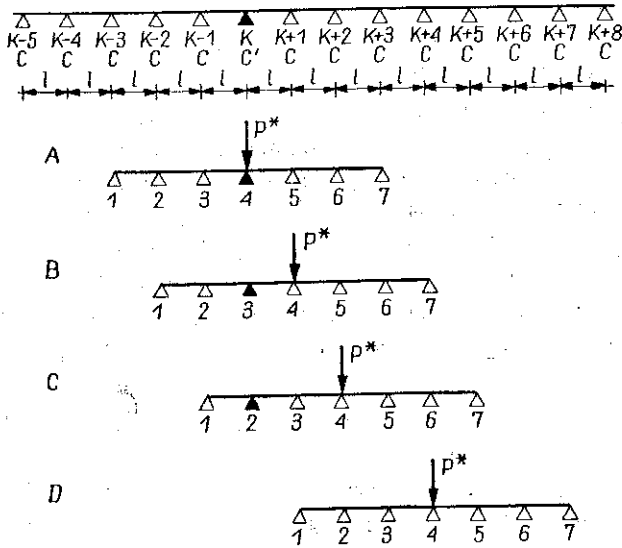
Całkowity luz nad podporą wiszącą zmienia się po każdym cyklu obciążeń. Oznaczmy go

$$(6.1) \quad f = y_{t,k} - y_{t,k-1},$$

gdzie  $y_{t,k}$  oznacza całkowite trwale osiadanie podpory  $k$ , a  $y_{t,k-1}$  odpowiednio podpory  $k-1$ .

Podobnie jak poprzednio przyjmijmy, że wpływ pojedynczej siły skupionej, przyłożonej do danej podpory, jest ograniczony do trzech podpór z każdej strony. Jako model obliczeniowy przyjmijmy więc belkę siedmiopodporową, obciążoną

pojedynczą siłą skupioną  $P$ , przyłożoną do podpory środkowej. Wobec tego dla każdej podpory, której osiadanie ma być określone, należy przyjąć osobny schemat belki siedmiopodporowej tak, aby rozpatrywana podpora była podporą środkową.



Rys. 7. Schematy belek siedmiopodporowych

Na wstępie przyjmijmy schemat A (rys. 7). W schemacie tym środkową podporą jest podpora słabsza  $k$ . Na podstawie tego schematu określamy ogólną ilość podpór, którą musimy uwzględnić w naszej analizie; są to oprócz podpory  $k$ , podpory  $k \pm 1$ ,  $k \pm 2$  oraz  $k \pm 3$ . Wobec symetrii ogólnego modelu toru zachodzą następujące równości:

$$(6.2) \quad y_{k+1} = y_{k-1}, \quad y_{k+2} = y_{k-2}, \quad y_{k+3} = y_{k-3},$$

dzięki czemu ilość schematów służących do określania osiadań podpór sąsiadujących z podporą  $k$  można zredukować do następujących:

- schemat B — dla określenia osiadań trwałych podpór  $k+1$  i  $k-1$ ;
- schemat C — dla podpór  $k+2$  i  $k-2$ ;
- schemat D — dla podpór  $k+3$  i  $k-3$ ,

przy czym w schemacie ostatnim nie występuje podpora osłabiona. Przyjęto tu mianowicie, że podpory  $k+3$  i  $k-3$  są już dostatecznie oddalone od podpory osłabionej, a co za tym idzie, że wpływ osłabienia do nich nie sięga. W konsekwencji nie będzie się w schemacie D uwzględniało wpływu podpory  $k$  na posadowienia podpór tego schematu.

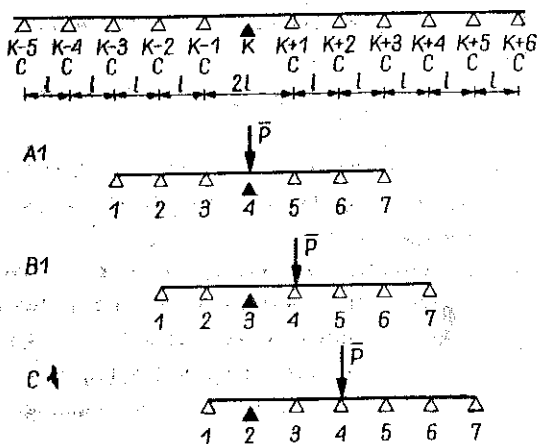
Osiadania sprężyste podpór powstające w chwili, gdy belka jest obciążona, jak to wyjaśniono poprzednio są wielokrotnie większe od osiadań trwałych wywołanych tym obciążeniem. Tak więc we wszystkich wymienionych schematach reakcje podpór, wywoływane danym obciążeniem, będziemy określać przy założeniu, że podpory są wyłącznie podporami sprężystymi. Osiadania trwałe poszczególnych

podpór, powstające w danym cyklu obciążenia, będziemy uwzględniać dopiero w następnym cyklu. Tak więc poczynając od cyklu drugiego będziemy rozpatrywali belkę na podporach posadowionych na różnych poziomach. Poziomy posadowienia podpór w każdym cyklu będą określane jako suma osiadań trwałych, powstałych we wszystkich poprzednich cyklach.

Ostatecznie mamy więc, że schematy A, B i C są belkami na sprężystych podporach, posadowionych na różnych poziomach, oraz że poziomy te zmieniają się względem siebie dla kolejnych cykli obciążeń. Natomiast schemat D jest belką na sprężystych podporach pozostających stale na jednakowym względem siebie poziomie.

Omówiliśmy teraz kolejność wykonywanych obliczeń. Przyjeliśmy, że po pewnej liczbie cykli obciążeń belka nad podporą  $k$  wisi na wysokości  $f$ .

Dalej ustaliliśmy, że na to, aby podpora  $k$  włączyła się do współpracy w następnym cyklu obciążenia, musi być zużyta pewna siła  $P'$ , będąca częścią siły  $P$  obciążającej belkę.



Rys. 8. Schematy belek sześciopodporowych

Tak więc siła  $P'$  obciąża belkę sześciopodporową, jaką widzimy na schematach A1, B1, C1 (rys. 8), które utworzono ze schematów A, B, C przez wprowadzenie podpory wiszącej. Wielkość siły  $P'$  zależy od położenia siły  $P$ , czyli od rozwiązywanego schematu podstawowego oraz do luzu  $f$  występującego nad podporą wiszącą  $k$ . Wartość siły  $P'$  jest obliczana w trakcie rozwiązywania schematu belki sześciopodporowej w danym cyklu obciążenia.

Wywołane działaniem siły  $P'$  sprężyste ugięcia podpór tego schematu dodaje się do całkowitego trwałego osiadania tych podpór. W ten sposób otrzymuje się wartości posadowienia podpór, potrzebne dla rozwiązania schematu siedmiopodporowego obciążonego siłą  $P''$ .

W oparciu o rozwiązanie obu schematów: podstawowego i pochodnego określa się trwałe osiadania podpory środkowej w każdym schemacie. Osiadanie to zależy od reakcji tej podpory liczonej jako suma  $R'$  i  $R''$ , wywołanych odpowiednio siłami

$P'$  i  $P''$ ; przy czym odnosi się to do każdej podpory typu  $k, k+1, k+2$ . Oczywiście, osiadanie podpory  $k$  jest liczone w efekcie tylko od reakcji  $R''$ , bowiem  $R'$  dla tej podpory jest równe zero. Natomiast osiadanie podpory typu  $k+3$  jest liczone od reakcji  $R$  wywołanej całkowitą siłą  $P$ .

Przeprowadzenie obliczeń dla wszystkich schematów podstawowych, poprzedzone zawsze rozwiązaniem odpowiednich schematów pochodnych i określeniem odpowiednich wartości siły  $P'$ , a zakończone znalezieniem wielkości osiadań trwałych wszystkich podpór, kończy obliczenia danego cyklu i pozwala przystąpić do obliczeń cyklu następnego.

## 6.2. Sposób rozwiązywania opisanego modelu

Do obliczenia niewiadomych wielkości statycznych zastosowano tak jak poprzednio równania pięciu momentów, otrzymując odpowiednie układy równań liniowych, przy czym odpowiednie wielkości oznaczano podobnie jak w p. 2.

Momenty podporowe oznaczono zgodnie z rysunkami 7 i 8.

Układy równań liniowych dla poszczególnych schematów podstawowych zostały napisane w ogólnej postaci macierzowej

$$(6.3) \quad [a_{r,j}] [X_r] = [b_j],$$

gdzie  $X_r$  oznacza niewiadome momenty podporowe,  $r$  kolejny numer obliczanego momentu, nierówny numerowi podpory,  $a_{r,j}$  współczynniki przy niewiadomych,  $b_j$  - wyrazy wolne,  $r=j$  zmienia się od 1 do 5.

W tablicy 5 podajemy poszczególne wyrazy wszystkich macierzy w postaci odpowiednich wzorów. Dla schematu D wyrazy wolne zależą jedynie od siły obciążającej belkę. Dla pozostałych schematów w wyrażeniach  $b_j$  pojawiają się składniki zależne od poziomu posadowienia podpór. Siłę obciążającą daną belkę oznaczono  $P^*$ ; może ona w zależności od cyklu obciążenia i rozpatrywanego schematu wynosić  $P$  lub  $P''$ .

Postać macierzową dla schematów belek sześciopodporowych zapiszemy nieco inaczej. Mianowicie, przy rozwiązywaniu tych schematów siła  $P'$ , obciążająca schemat początkowo, jest nieznaną. Jej wielkość musi być określona dopiero w trakcie obliczeń. Przedstawimy więc omawiane układy równań w postaci

$$(6.3') \quad [a_{r,j}] [X_r] = [b_j] P' + [c_j],$$

gdzie  $X_r$  oznacza niewiadome momenty podporowe,  $r$  kolejny numer obliczanego momentu, nierówny numerowi podpory,  $a_{r,j}$  współczynniki przy niewiadomych,  $b_j P' + c_j$  wyrazy wolne, przy czym  $c_j$  wyrażają wpływ różnego posadowienia podpór;  $r=j$  zmienia się od 1 do 4.

Celem dalszego postępowania jest znalezienie wzoru określającego wartość siły  $P'$ . Wobec liniowości układu (6.3') możemy go zastąpić dwoma równoważnymi mu układami

$$(6.4) \quad [a_{r,j}] [X_r(P')] = [b_j] P', \quad [a_{r,j}] [X_r(c)] = [c_j].$$



Tablica 5. Macierze współczynników układów równań liniowych dla schematów belek siedmiopodporowych

$r = j = 1 \dots 5$ ,  $d_i$  — obniżenie podpory,  $i$  — oznaczenie podpory,  $i$  — oznaczenie podpory,  $P^*$  — siła obciążająca belkę,  $P^* = P$  lub  $P^* = P''$

$j \backslash r$	$[a_{rj}]$					$[b_j]$
	1	2	3	4	5	
D	1	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{5}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	$\frac{1}{CL^2}$	0	0
	2	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	$\frac{1}{CL^2}$	$-\frac{1}{CL} P^*$
	3	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	$\frac{2}{CL} P^*$
	4	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$\frac{1}{CL} P^*$
	5	0	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	0
A	1	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{1}{CL^2}$	$\frac{1}{CL^2}$	0	$-\frac{1}{L} (d_1 - 2d_2 + d_3)$
	2	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{5}{CL^2} + \frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{2}{CL^2}$	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{1}{C'L} P^* - \frac{1}{L} (d_2 - 2d_3 + d_4)$
	3	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{2}{CL^2} + \frac{4}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{CL^2}$	$\frac{2}{C'L} P^* - \frac{1}{L} (d_3 - 2d_4 + d_5)$
	4	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{5}{CL^2} + \frac{1}{CL^2}$	$\frac{1}{C'L} P^* - \frac{1}{L} (d_4 - 2d_5 + d_6)$
	5	0	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} + \frac{4}{CL^2}$	$-\frac{1}{L} (d_5 - 2d_6 + d_7)$

Tablica 5. (c.d.)

r	[a <sub>rj</sub> ]					[b <sub>j</sub> ]	
	1	2	3	4	5		
B	1	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{1}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{1}{C'L^2}$	0	0	$-\frac{1}{L}(d_1 - 2d_2 + d_3)$
	2	$\frac{L}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{2}{CL^2} + \frac{4}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{1}{CL^2}$	0	$-\frac{1}{CL}P^* - \frac{1}{L}(d_2 - 2d_3 + d_4)$
	3	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{5}{CL^2} + \frac{1}{6EJ} - \frac{1}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{2}{CL}P^* - \frac{1}{L}(d_3 - 2d_4 + d_5)$
	4	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$-\frac{1}{CL}P^* - \frac{1}{L}(d_4 - 2d_5 + d_6)$
	5	0	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$-\frac{1}{L}(d_5 - 2d_6 + d_7)$
C	1	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{2}{CL^2} + \frac{4}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{1}{CL^2}$	0	0	$-\frac{1}{L}(d_1 - 2d_2 + d_3)$
	2	$\frac{L}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{2}{6EJ} - \frac{2}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{5}{CL^2} + \frac{1}{6EJ} - \frac{1}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$\frac{1}{CL^2}$	0	$-\frac{1}{CL}P^* - \frac{1}{L}(d_2 - 2d_3 + d_4)$
	3	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4}{6EJ} + \frac{6}{CL^2} + \frac{1}{6EJ} - \frac{4}{CL^2} + \frac{C'L^2}{6EJ}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4}{CL^2}$	$\frac{2}{CL}P^* - \frac{1}{L}(d_3 - 2d_4 + d_5)$
	4	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$-\frac{1}{CL}P^* - \frac{1}{L}(d_4 - 2d_5 + d_6)$
	5	0	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ} - \frac{4}{CL^2}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$-\frac{1}{L}(d_5 - 2d_6 - d_7)$

Tablica 6. Macierze współczynników układów równań liniowych dla schematów belek sześciopodporowych

schemat	[a <sub>rj</sub> ]				[b <sub>j</sub> ]	[c <sub>j</sub> ]	X <sub>r</sub> =M <sub>t</sub>
	1	2	3	4			
A1	1	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{7}{2CL^2}$	0	$-\frac{1}{L}(d_1 - 2d_2 + d_3)$	M <sub>2</sub>
	2	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{6L}{6EJ} + \frac{7}{2CL^2}$	$\frac{2L}{6EJ}$	$\frac{3}{2CL^2}$	$-\frac{1}{L}(2d_2 - 3d_3 + d_5)$	M <sub>3</sub>
	3	$\frac{1}{2CL^2}$	$\frac{2L}{6EJ}$	$\frac{3}{6EJ} + \frac{7}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$-\frac{1}{L}(d_3 - 3d_5 + 2d_6)$	M <sub>5</sub>
	4	0	$\frac{1}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{7}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$-\frac{1}{L}(d_5 - 2d_6 + d_7)$	M <sub>6</sub>
B1	1	$\frac{6L}{6EJ} + \frac{7}{2CL^2}$	$\frac{2L}{6EJ}$	$\frac{3}{2CL^2}$	0	$-\frac{1}{2L}(2d_1 - 3d_2 + d_4)$	M <sub>2</sub>
	2	$\frac{2L}{6EJ}$	$\frac{6L}{6EJ} + \frac{7}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{3}{2CL^2}$	$-\frac{1}{2L}(d_2 - 3d_4 + 2d_5)$	M <sub>4</sub>
	3	$\frac{1}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{3}{6EJ} + \frac{7}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$-\frac{1}{L}(d_4 - 2d_5 + d_6)$	M <sub>5</sub>
	4	0	$\frac{1}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{7}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$-\frac{1}{L}(d_5 - 2d_6 + d_7)$	M <sub>6</sub>
C1	1	$\frac{6L}{6EJ} + \frac{7}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{7}{2CL^2}$	0	$-\frac{1}{2L}(d_1 - 3d_3 + 2d_4)$	M <sub>3</sub>
	2	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{4L}{6EJ} + \frac{6}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{4}{CL^2}$	$-\frac{1}{L}(d_3 - 2d_4 + d_5)$	M <sub>4</sub>
	3	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{4}{6EJ} + \frac{6}{2CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$-\frac{1}{L}(d_4 - 2d_5 + d_6)$	M <sub>5</sub>
	4	0	$\frac{1}{CL^2}$	$\frac{L}{6EJ}$	$\frac{6}{6EJ} + \frac{6}{CL^2}$	$-\frac{1}{L}(d_5 - 2d_6 + d_7)$	M <sub>6</sub>

Układ (6.4)<sub>1</sub> wyraża zależność momentów podporowych wyłącznie od siły  $P'$ , a układ (6.4)<sub>2</sub> zależność momentów podporowych wyłącznie od różnego względnego posadowienia podpór. Oczywiście zgodnie z [4] będzie zachodzić związek

$$(6.5) \quad X_r = X_r(P') + X_r(c).$$

Oznaczmy obniżenie się belki nad podporą wiszącą, wywołane siłą  $P'$  lub różnym posadowieniem podpór odpowiednio  $f(P')$  i  $f(c)$ . Ponieważ suma tych przesunięć jest równa wielkości luzu nad podporą wiszącą, to

$$(6.6) \quad f(P') = f - f(c).$$

Obniżenie się belki nad podporą wiszącą pod wpływem siły obciążającej belkę zależy od wielkości sprężystego ugięcia podpór sąsiednich pod wpływem tego obciążenia. Jest to zależność liniowa [por. wzór (2.5)]. Pomijamy tu sprężyste ugięcie się belki występujące przy rozpatrywaniu schematu A1 jako dużo mniejsze. Zauważamy również, że układ (6.4)<sub>1</sub> jest układem liniowym względem siły  $P'$ . Ponieważ wielkość tej siły jest na razie nie znana, rozwiązujemy układ w założeniu, że belka jest obciążona siłą  $\bar{P} = 1$ . Korzystamy wtedy z następujących zależności:

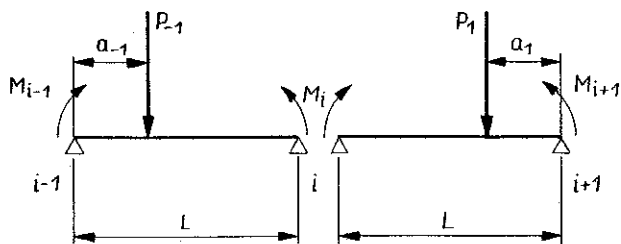
$$(6.7) \quad X_r(P') = X_r(\bar{P})P', \quad [a_{r,j}] [X_r(\bar{P})]P' = [b_j]P', \quad f(P') = f(\bar{P})P'.$$

Ostatecznie zamiast układu (6.4)<sub>1</sub> rozwiązujemy układ

$$(6.8) \quad [a_{r,j}] [X_r(\bar{P})] = [b_j],$$

z którego otrzymujemy wartości  $X_r(\bar{P})$ , następnie  $f(\bar{P})$ . Rozwiązując układ (6.4)<sub>2</sub> otrzymamy  $f(c)$ . Wobec zależności (6.6) i zależności (6.7)<sub>3</sub> mamy ostatecznie poszukiwane wyrażenia na wartość siły  $P'$ :

$$(6.9) \quad P' = \frac{f - f(c)}{f(\bar{P})}.$$



Rys. 9. Schemat oznaczeń dla obliczania reakcji  $R_i$  belki ciągłej

Tablica 6 obejmuje odpowiednie macierze układów równań (6.4)<sub>2</sub> i (6.8). Macierze te różnią się kolumną wyrazów wolnych i w ten sposób zostały zapisane w tablicy.

Określiwszy na podstawie wzorów (6.7)<sub>1</sub> i (6.5) wartości momentów podporowych od siły  $P'$ , obliczamy odpowiednie reakcje wszystkich podpór danej belki. Korzystamy tu ze wzoru podanego w pracy [3], którego uproszczoną postacią był

wzór (2.4). Obecnie potrzebna jest postać bardziej ogólna (oznaczenia podano na rys. 9)

$$(6.10) \quad R_i = \frac{1}{L_{-1}} (M_{i-1} - M_i) - \frac{1}{L_{+1}} (M_i - M_{i+1}) + P_{-1} \frac{a_{-1}}{L_{-1}} + P_{+1} \frac{a_{+1}}{L_{+1}}$$

Sprężyste ugięcia podpór są określane wg wzoru (2.5). Wobec tego poziomy posadowienia podpór odpowiedniego schematu podstawowego obliczamy jako

$$(6.11) \quad d_i = y_{t,i} + y_{s,i}$$

Po rozwiązaniu schematów podstawowych obciążanych siłą  $P''$  i obliczeniu osiadań trwałych obliczamy wartość tangensa kąta deformacji trwałej wg wzoru (2.2).

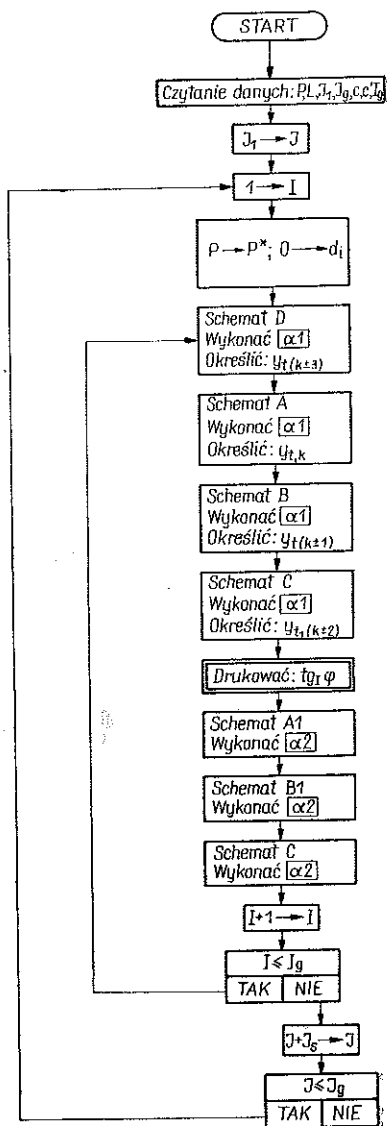
Opisany sposób rozwiązania przyjętego modelu pozwala badać, jak zmienia się  $tg \varphi$  wraz ze wzrostem liczby cykli obciążeń. Szczegółowy sposób i kolejność wykonywania obliczeń pokazuje rys. 10.

Zastosowanie opracowanej metody wymaga dokładnej znajomości parametrów odkształcalności podłoża. Parametry te kształtują się w bardzo szerokich granicach, a ponadto wykazują tendencje do zmian przy powtórnych obciążeniach.

Rys. 10. Algorytm obliczania deformacji w zależności od obciążenia całkowitego

**Blok a1.**  
 - Liczenie wyrazów macierzy współczynników dla układu równań; - rozwiązanie układu  $[a_{r,j}] [X_r] = [b_j]$ ; - obliczenie reakcji podpory środkowej

**Blok a2.**  
 Określać  $d_r$  po  $I$  cyklach, liczyć wyrazy macierzy układów ównań; rozwiązać oba układy:  
 $[a_{r,j}] [X_r(P)] = [b_j]$ ,  $[a_{r,j}] [X_r(c)] = [c_j]$ ;  
 liczyć:  $P'$ ;  $X_r$ ;  $R_t$ ;  $y_{s,r}$ ; liczyć dla schematu podstawowego po  $I+1$  cyklach  
 $d_r = y_s + y_t$ ,  $P^* = P'' = P - P'$



LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. BASIEWICZ, *Tor na podkładach betonowych*, WKŁ, Warszawa 1963.
2. A. WASIUTYŃSKI, *Drogi żelazne*, Gebethner i Wolf, Warszawa 1921.
3. W. WIERZBICKI, *Statyka budowli*, PWN, Warszawa 1955.
4. A. MOSTOWSKI i M. STARK, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1965.

## Резюме

РАСЧЕТ ОСТАТОЧНЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПУТЕЙ  
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТИПА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПОЛОТНА

Источником возникновения деформаций железнодорожного полотна являются остаточные деформации основания. В большой степени они зависят от жесткости рельсов, являющихся наиболее дорогостоящим элементом полотна. С другой стороны, скорость нарастания деформаций определяет частоту и объем ремонтных работ. Поэтому правильный выбор типа рельсов является важным экономическим вопросом.

В статье изложен метод выбора «оптимального» типа рельсов, по отношению к процессу возникновения вертикальных остаточных деформаций. Построена математически-механическая модель полотна, дающая возможность определить величину деформаций в зависимости от жесткости рельсов. Такие зависимости были определены для различных условий закрепления рельсов. На основе предложенного в работе метода найден «оптимальный» тип рельсов.

Показано, что этот тип весьма близок к типу UIC60, который, во многих странах, рассматривается как наиболее подходящий для путей с наибольшей интенсивностью движения.

Описанные в статье расчеты выполнены численно на ЭЦВМ «Одра» — 1204.

В следующей части статьи, математически-механическая модель полотна расширена таким образом, чтобы могла быть осуществлена симуляция процесса возникновения и нарастания деформаций под влиянием последовательных циклов нагружения. Далее, приводится метод численного определения функции деформации полотна, в зависимости от жесткости рельсов, расстояния между шпалами, способа их закрепления, величины одинарной нагружающей силы и кратности ее приложения.

## SUMMARY

THE CALCULATION OF STABLE VERTICAL DEFORMATIONS OF  
A TRACK DEPENDING ON THE TYPE OF RAILWAY SURFACE

The source of deformations of a railway track are stable deformations of the subsurface. To a large degree these depend on the rigidity of the rail, which is the most expensive element of the track. On the other hand, the rate of deformation growth determines the frequency and scope of track repairs. Therefore the correct selection of rail type is of economic importance.

In this paper is presented a method of «optimum» selection of the type of rail having regard to the process of the formation of stable vertical deformations. A mathematical-mechanical model of the track is constructed, enabling determination of the magnitude of deformation as a function of the rigidity of the rail. Such functions are determined for different conditions of support. Subsequently, the «optimum» rail type is found by means of the method suggested in the paper.

This is found to be very similar to the UIC-60 type, which is at present considered in many countries to be the most advisable for high volume of traffic.

The calculations described in this paper were carried out numerically on the ODR A-1204 computer.

In the remaining part of the paper, the mathematical and mechanical model of the track has been transformed in order to make possible the simulation of the process of deformation growth under the consecutive loading cycles. Moreover, the method has been presented of numerical determination of the track deformation function dependent on the rail rigidity, the sleeper spacing and supporting, the magnitude of a single force and the number of its application.

CENTRALNY OŚRODEK BADAŃ I ROZWOJU TECHNIKI KOLEJNICTWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 listopada 1969 r.