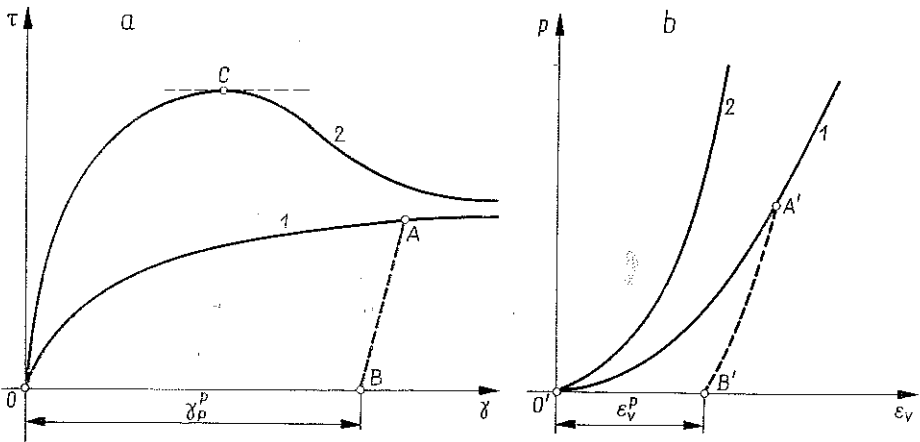


PEWNE PROBLEMY BRZEGOWE DLA CIAŁ ROZDROBNIONYCH O WZMOCNIENIU GĘSTOŚCIOWYM

Z. MRÓZ i K. KWASZCZYŃSKA (WARSZAWA)

1. WSTĘP

W niniejszej pracy zajmiemy się sformułowaniem związków fizycznych i rozwiązaniem kilku problemów brzegowych dla materiałów sprężysto-plastycznych, których własności są przedstawione schematycznie na rys. 1a, b.



Rys. 1. Charakterystyki materiałów o różnych gęstościach
a — dla ścinania, b — dla ciśnienia hydrostatycznego

Krzywą obciążenia przy działaniu naprężenia ścinającego przedstawia rys. 1a, a przy działaniu ciśnienia hydrostatycznego rys. 1b. Jeśli materiał o pewnej gęstości początkowej będziemy wszechstronnie ściskali ciśnieniem p , ulegnie on dalszemu zagęszczeniu, przy czym zmiany gęstości mają charakter nieodwracalny. Tak więc po zagęszczeniu materiału wzdłuż krzywej 1 do punktu A' po zdjęciu ciśnienia odciążenie następuje wzdłuż krzywej $A'B'$. Odcinek $O'B'$ przedstawia nieodwracalną zmianę objętości materiału, odpowiadającą określonej przyrostowi gęstości. Drugą istotną cechą materiału jest zależność postaci krzywej ścinania i ściskania od początkowej gęstości materiału. Krzywe 1 i 2 odpowiadają dwóm różnym gęstościom początkowym ρ_{a_1} i ρ_{a_2} . Przy mniejszej gęstości ρ_{a_1} krzywa ścinania jest

monotonicznie rosnąca aż do granicznej wartości naprężenia ścinającego, którą osiąga przy dużych odkształceniach. Natomiast przy większej gęstości początkowej krzywa ścinania osiąga najpierw ekstremum (punkt *C* na krzywej 2), a następnie opada dążąc do tego samego naprężenia granicznego, leżącego poniżej wartości ekstremalnej. Zatem wartość graniczna naprężenia ścinającego nie zależy od początkowej gęstości materiału. Po zniknięciu naprężenia ścinającego w materiale pozostają trwałe odkształcenia, przedstawione odcinkiem *OB* na rys. 1a.

Tego rodzaju własności obserwuje się dla szeregu materiałów rozdrobnionych takich, jak grunty, masy sproszkowane, materiały ziarniste itp. W technice często wykorzystuje się zdolność materiału do wzmocnienia pod wpływem zagęszczania. Typowym przykładem może być masa formierska stosowana w odlewnictwie. Aby uzyskać odpowiednią wytrzymałość formy odlewniczej, masę poddaje się prasowaniu przy odpowiednio wysokim ciśnieniu (dochodzącym do 40 kG/cm²) tak, aby nie nastąpiło jej zniszczenie lub zmiana kształtu pod wpływem ciśnienia wlewane go metalu. Wykorzystujemy tu zatem własności materiału reprezentowane przez odcinek *OC* krzywej obciążenia, leżący poniżej maksymalnej wytrzymałości odpowiadającej punktowi *C* na rys. 1a. Wzmocnienie materiału pod wpływem zagęszczenia może również występować jako efekt szkodliwy. Należy tu wymienić zdolność materiałów sproszkowanych do tworzenia nawisów i sklepień w silosach, utrudniających prawidłowy wypływ i zmuszających technologów do stosowania dodatkowych urządzeń mechanicznych.

Na gruncie teorii plastyczności dla materiałów ze wzmocnieniem — w p. 2 sformułujemy związki fizyczne dla ciał o wzmocnieniu gęstościowym. Rozwiiniemy tu w sposób bardziej formalny koncepcje sformułowane w pracach [1–8]. Następnie podamy rozwiązanie kilku problemów brzegowych, mając na celu zilustrowanie stosowalności wyprowadzonych związków do analizy konkretnych zagadnień.

2. ZWIĄZKI FIZYCZNE

Załóżmy, że dowolny układ wielofazowy będziemy traktowali jako materiał jednorodny, którego stan w danym punkcie jest określony przez podanie dwóch parametrów: tensora naprężenia σ_{ij} i jednostkowej gęstości ρ . W przypadku materiału dwufazowego gęstość ρ można prosto wyrazić przez gęstość obu faz ρ_1 i ρ_2 oraz ich udział objętościowy w_1 i w_2 : $\rho = \rho_1 w_1 + \rho_2 w_2$, gdzie $w_1 + w_2 = 1$. Jeśli materiał jest porowaty, to stopień porowatości w_1 jest związany z gęstością ρ prostym związkiem $w_1 = 1 - \rho/\rho_2$.

W miarę zagęszczania materiału rośnie jego wytrzymałość na ścinanie (spójność). Tłumaczyć to możemy zaklinowywaniem się poszczególnych ziaren przy wzroście gęstości oraz powstawaniem wiązań adhezyjnych w miejscach styku ziaren. Wiązania te są wynikiem różnego rodzaju sił takich, jak siły przyciągania pomiędzy cząsteczkami (siły Van der Waalsa, siły walencyjne), występowanie napięć powierzchniowych oraz warstw adsorbcyjnych w ośrodku nawilgoconym. W pewnych przypadkach między ziarnami mogą tworzyć się silne wiązania w wyniku krystalizacji.

zacji rozpuszczonych substancji, np. soli lub osadzania cząstek koloidalnych. Wszystkie te siły rosną w miarę zwiększania powierzchni kontaktu oraz nacisku pomiędzy ziarnami. Na odwrót, przy odkształceniu ścinającym wiązania te ulegają stopniowemu niszczeniu i spójność materiału maleje.

W ogólnym przypadku część sił kohezyjnych powstaje jednocześnie z przyłożeniem naprężenia, a część rozwija się w miarę upływu czasu, np. krystalizacja na granicach ziaren. Siły te również zależą w sposób istotny od wilgotności i temperatury ośrodka. W niniejszej pracy rozważymy najprostszy przypadek, pomijając efekty czasowe i zakładając, że spójność materiału powstaje jednocześnie z przyłożeniem ciśnienia.

Warunek plastyczności będzie miał zatem ogólną postać

$$(2.1) \quad f = f(\sigma_{ij}, \rho) = 0,$$

i da się przedstawić geometrycznie jako pewna powierzchnia w przestrzeni naprężeń, ograniczająca obszar sprężysty lub sztywny. Gdy zachodzi plastyczne płynięcie, zmiany objętości powodują zmiany gęstości materiału i początkowa powierzchnia płynięcia zmienia swój kształt. Założmy, że ściskające naprężenie i odkształcenie będziemy przyjmować jako dodatnie. Zakładając, że materiał jest sztywno-plastyczny, zmiana gęstości ρ da się prosto wyrazić przez przyrost odkształceń objętościowych (powtarzający się indeks oznacza sumowanie po wskaźnikach $i=1, 2, 3$)

$$(2.2) \quad d\rho = \rho d\varepsilon_{ii}^p.$$

Założmy, że przyrosty odkształceń plastycznych są określone następującym związkiem fizycznym:

$$(2.3) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

nazywanym często stowarzyszonym prawem płynięcia [warunek plastyczności (2.3) jest jednocześnie potencjałem plastycznym].

Aby określić współczynnik wzmocnienia λ w prawie płynięcia (2.3), rozpatrzmy małe przyrosty naprężenia i gęstości $d\sigma_{ij}$, $d\rho$, odpowiadające pewnemu przyrostowi odkształceń plastycznych. Jeśli stan $\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}$, $\rho + d\rho$ również leży na powierzchni płynięcia, to mamy

$$(2.4) \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho = 0.$$

Wykorzystując (2.2) i (2.3), z (2.4) otrzymujemy

$$(2.5) \quad \lambda = \frac{df_\sigma}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \rho \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}}}$$

i prawo płynięcia (2.3) przyjmie postać

$$(2.6) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \frac{df_\sigma}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) \rho \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie

$$df_{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}.$$

Geometrycznie wyrażenie df_{σ} możemy interpretować jako iloczyn skalarny wektora przyrostu naprężenia $d\sigma$ i wektora gradientu $\partial f/\partial \sigma$, skierowanego wzdłuż zewnętrznej normalnej do powierzchni płynięcia. Zmiany objętościowe określone są następującym związkiem:

$$(2.7) \quad de_{ii}^p = \frac{df_{\sigma}}{\left(-\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)\rho}.$$

Załóżmy ogólnie, że $\partial f/\partial \rho < 0$; ze wzoru (2.7) wynika, że przyrost odkształceń objętościowych ma ten sam znak co df_{σ} . Zatem dla miejsc na powierzchni płynięcia, dla których $de_{ii}^p > 0$, wektor przyrostu naprężenia musi być skierowany na zewnątrz powierzchni płynięcia; na odwrót, jeśli $de_{ij}^p < 0$, to przyrost wektora naprężenia musi być skierowany do jej wnętrza. Inaczej mówiąc, płynięcie plastyczne związane z przyrostem gęstości prowadzi do rozszerzenia się powierzchni płynięcia, a dla przyrostów naprężenia wywołujących małe gęstości, powierzchnia ta będzie się kurczyć⁽¹⁾.

Aby zilustrować własności rozpatrywanego modelu ciała, rozpatrzmy szczególny stan naprężenia, występujący w tzw. próbie, trójosiowego ściskania, gdzie próbka walcowa poddana jest działaniu siły osiowej i ciśnienia hydrostatycznego. Dwa naprężenia główne w płaszczyźnie południkowej i obwodowej są wtedy równe, $\sigma_2 = \sigma_3$. Niech σ_1 oznacza główne naprężenie działające wzdłuż osi walca. Stan naprężenia wygodnie jest opisać dwoma parametrami, które można określić następująco:

$$(2.8) \quad p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_2), \quad q = \sigma_1 - \sigma_2,$$

gdzie p oznacza średnie ciśnienie hydrostatyczne, a q jest podwojonym maksymalnym naprężeniem ścinającym. Dwa parametry określające stan odkształcenia możemy zdefiniować podobnie do (2.8):

$$(2.9) \quad \varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, \quad \varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

przy czym $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

(1) Można by ogólnie założyć, że wektor przyrostu odkształceń plastycznych nie jest normalny do powierzchni płynięcia i zmiany objętościowe zależą jeszcze od pewnego współczynnika $0 \leq n(\sigma, \rho) \leq 1$:

$$de_{ij}^p = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{1}{3} n \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}} \delta_{ij} \right), \quad de_v^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} n(\sigma, \rho),$$

gdzie de_{ij}^p oznacza dewiator przyrostu odkształcenia, a de_v^p przyrost odkształcenia objętościowego. Wzór (2.7) pozostawałby nadal poprawny, natomiast składowe dewiatora de_{ij}^p uległyby zmianie.

Określenie funkcji $n(\sigma, \rho)$ jest jednak niemożliwe na podstawie dotychczasowych badań doświadczalnych, jakkolwiek niektórzy autorzy wyraźnie wskazują, że przyrost odkształceń objętościowych jest mniejszy, niż to wynika ze związku (2.3). W niniejszej pracy przyjmujemy, że $n=1$ i przy tym założeniu będziemy rozwiązywać problemy brzegowe w p. 4.

Rozpatrzmy dla przykładu następujący warunek plastyczności:

$$(2.10) \quad f(p, q, \rho) = b^2 [p - a + c]^2 + a^2 q^2 - a^2 b^2 = 0,$$

gdzie a , b i c są pewnymi funkcjami gęstości. Równanie (2.10) określa rodzinę elips, których półosie rosną wraz z gęstością. Tego rodzaju warunek plastyczności może być użyty do opisu plastycznych własności proszków, gdzie obserwuje się wzrost kohezji przy rosnącym ciśnieniu konsolidacji⁽²⁾. W szczególnym przypadku, gdy $c = \text{const}$, tzn. gdy materiał ma stałą wytrzymałość na rozrywanie (rys. 2a), przyrosty odkształceń plastycznych określimy ze wzorów:

$$(2.11) \quad d\varepsilon_p^p = - \frac{b^2(p-a+c) dp + a^2 q dq}{\rho \left[b \frac{db}{d\rho} (p-a+c)^2 + b^2(p-a+c) \frac{da}{d\rho} + aq^2 \frac{da}{d\rho} - a \frac{da}{d\rho} b^2 - a^2 b \frac{db}{d\rho} \right]},$$

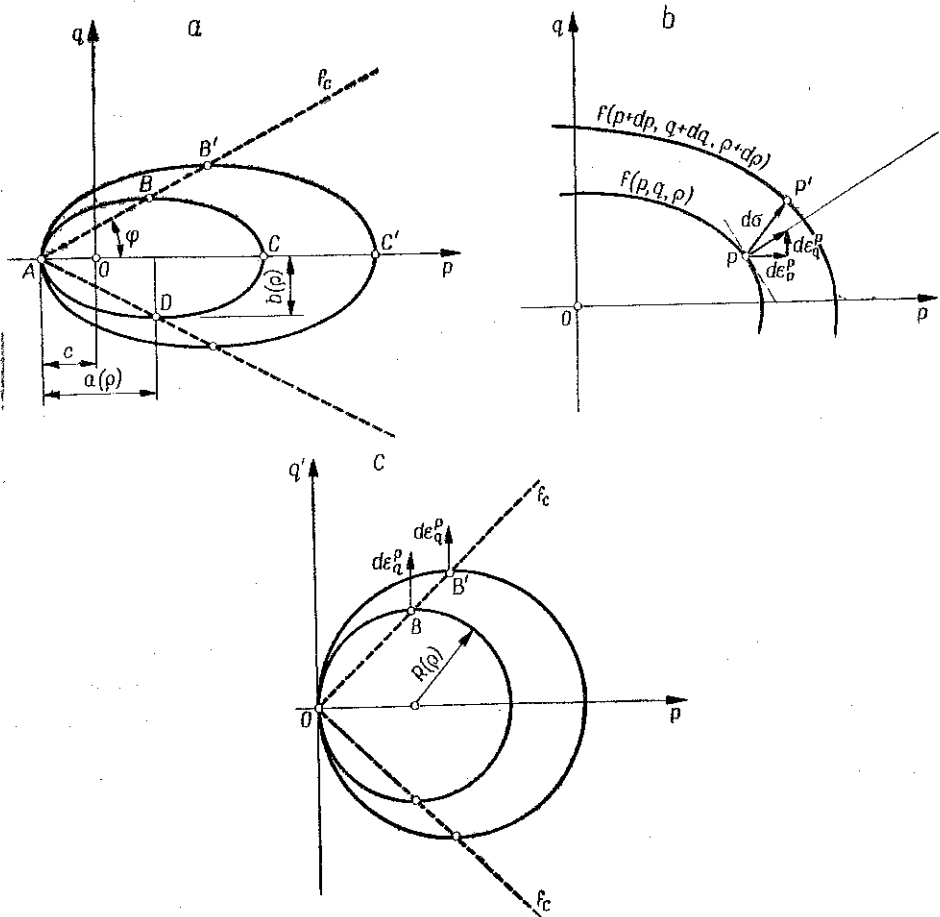
$$d\varepsilon_q^p = - \frac{a^2 q [b^2(p-a+c) dp + a^2 q dq]}{\rho \left[b \frac{db}{d\rho} (p-a+c)^2 + b^2(p-a+c) \frac{da}{d\rho} + aq^2 \frac{da}{d\rho} b^2 - a^2 b \frac{db}{d\rho} \right] b^2(p-a+c)}$$

Obszar, w którym $d\varepsilon_p^p > 0$, będziemy nazywali *obszarem zagęszczania* materiału, a dla $d\varepsilon_p^p < 0$ otrzymujemy *obszar rozluźniania*. Stan krytyczny odpowiada tym punktom na powierzchni płynięcia, gdzie możliwe jest ścinanie materiału bez zmiany objętości ($d\varepsilon_p^p = 0$). Ponieważ wektor przyrostu odkształceń plastycznych jest skierowany wzdłuż zewnętrznej normalnej do chwilowej powierzchni płynięcia, linia krytyczna łączy punkty BB' na chwilowych elipsach płynięcia leżące na półosiach $b(\rho)$; dzieli ona płaszczyznę pq na obszar zagęszczania i rozluźniania materiału. Równanie linii krytycznej jest zatem określone przez formuły

$$(2.12) \quad q_k = b(\rho), \quad p_k = a(\rho) - c.$$

Wychodząc z równań (2.11) możemy określić trwałe odkształcenia materiału dla dowolnego programu obciążenia. Ponieważ równania te wiążą przyrosty odkształceń plastycznych i naprężeń, odkształcenie końcowe określimy przez całkowanie równań (2.11). Na płaszczyźnie pq całkowanie to możemy przeprowadzić graficznie. Rozpatrzmy dla przykładu punkt P leżący na chwilowej elipsie płynięcia $f(p, q, \rho) = 0$. Rozważmy mały przyrost naprężenia $d\sigma$ (dp, dq) z punktu P , skierowany na zewnątrz elipsy płynięcia w obszarze zagęszczania, a do wnętrza elipsy w obszarze rozluźnienia, rys. 2b. Ponieważ koniec wektora $d\sigma$ ma leżeć na nowej krzywej płynięcia, to określamy elipsę przechodzącą przez punkt P' ; jej półosie a i b wyznaczają przyrost gęstości $d\rho$, odpowiadający przejściu z P do P' . Przyrost gęstości pozwala wyznaczyć przyrost odkształcenia objętościowego, $d\varepsilon_v^p = d\rho/\rho$, a $d\varepsilon_q^p$ określamy z warunku normalności wektora przyrostu odkształceń $d\varepsilon^p(d\varepsilon_p^p, d\varepsilon_q^p)$ do krzywej płynięcia w punkcie P . Mając zatem daną historię naprężenia na płaszczyźnie pq , całkując krok po kroku, możemy określić wartość odkształcenia w dowolnym miejscu trajektorii obciążenia.

(2) W oddzielnej pracy przedstawimy próbę ilościowego opisu procesów deformacji dla konkretnego ośrodka przy wykorzystaniu warunku plastyczności typu (2.10). Ponieważ w literaturze brak jest danych doświadczalnych pozwalających na wyznaczenie funkcji $a(\rho)$, $b(\rho)$ i $c(\rho)$, nasze rozważania mają siłę rzeczy na tym etapie charakter jakościowy.

Rys. 2. Przykłady warunków plastyczności na płaszczyźnie pq

Dla prostszych programów obciążenia ze związków (2.11) możemy określić wartości odkształceń w postaci analitycznej. Rozpatrzmy szczególny przypadek warunku plastyczności (2.10), gdy $b/a = \text{const}$ i $c=0$. Warunek ten przedstawia rodzinę elips, przechodzących przez początek układu o proporcjonalnie rosnących półosiach a i b . Stany krytyczne leżą na dwóch prostych wychodzących z O i nachylonych pod kątem $\text{arctg } b/a$ do osi p . Wprowadzając transformację $p' = p$, $q' = q(a/b)$ na płaszczyźnie $p'q'$, rodzina elips przejdzie w rodzinę okręgów $(p' - a)^2 + q'^2 = a^2$; zatem bez szkody dla ogólności możemy rozpatrzyć warunek plastyczności $(p - R)^2 + q^2 - R^2 = 0$, gdzie $R = R(\rho)$ jest jedyną funkcją materiałową, określającą promień chwilowego okręgu przechodzącego przez punkt O (rys. 2c). Przyrosty odkształceń plastycznych określone są wzorami

$$(2.13) \quad de_v^p = \frac{(p-R) dp + q dq}{\rho \frac{dR}{d\rho} p}, \quad de_a^p = \frac{[(p-R) dp + q dq] q}{\rho \frac{dR}{d\rho} p (p-R)}$$

Załóżmy, że funkcja $R=R(\rho)$ ma postać

$$(2.14) \quad \frac{R}{R_0} = 1 + \gamma \left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1 \right),$$

gdzie R_0 i ρ_a odnoszą się do pewnego stanu początkowego, a γ jest bezwymiarową stałą. Rozpatrzmy program obciążenia radialnego $q=kp$ w obszarze zagęszczenia. Podstawiając tę wartość q do równań (2.13) po scałkowaniu otrzymujemy

$$(2.15) \quad \varepsilon_v^p = \ln \left[\frac{(k^2+1) p/R_0}{2\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \right], \quad \varepsilon_q^p = \frac{2k}{1-k^2} \ln \left[\frac{(1+k^2) q/R_0}{2k\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \right].$$

Gdy $k=0$, materiał jest konsolidowany przez działanie rosnącego ciśnienia hydrostatycznego. Wtedy

$$(2.16) \quad \varepsilon_q^p = \ln \left[\frac{p/R_0}{2\gamma} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \right], \quad \varepsilon_v^p = 0.$$

Gdy $k=1$, trajektoria obciążenia radialnego pokrywa się z linią krytyczną. Odształcenie ścinające osiąga wartość nieskończoną, podczas gdy odształcenie objętościowe rośnie wraz z ciśnieniem zgodnie z pierwszym równaniem (2.15). Rysunek 3 przedstawia kilka typowych krzywych umocnienia $p-\varepsilon_v^p$ i $q-\varepsilon_q^p$ przy obciążeniu radialnym dla $\gamma=4, 1, 9$. Widzimy, że krzywe $p=p(\varepsilon_q^p)$ są wypukłe od dołu, podobnie jak to przedstawiono szkicowo na rys. 1.

Rozpatrzmy obecnie inny program obciążenia. Materiał o początkowej gęstości ρ_a jest poddany najpierw działaniu ciśnienia hydrostatycznego, nie wywołującego uplastycznienia, a następnie ścinaniu przy stałym ciśnieniu p . Z rys. 4 widzimy, że dla $p > R_0$ rosnące naprężenie tnące będzie dalej zagęszczać materiał w czasie plastycznego płynięcia, dążąc asymptotycznie do stanu krytycznego. Natomiast gdy $p < R_0$, naprężenie ścinające osiąga najpierw wartość większą od wartości krytycznej; odształceniu plastycznemu towarzyszyć będzie wzrost objętości i kurczenie się początkowej krzywej płynięcia aż do osiągnięcia stanu krytycznego. Tak więc dla $p < R_0$ przy wymuszonym plastycznym płynięciu otrzymujemy niestateczną krzywą naprężenie-odkształcenie ścinające. Aby otrzymać analityczne wyrażenie na odształcenie plastyczne, scałkujemy równanie (2.13) przy $dp=0$. Po spełnieniu warunków brzegowych, otrzymujemy:

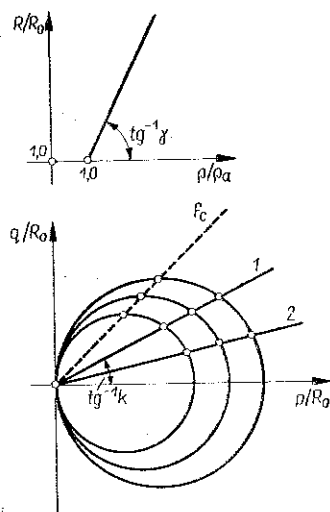
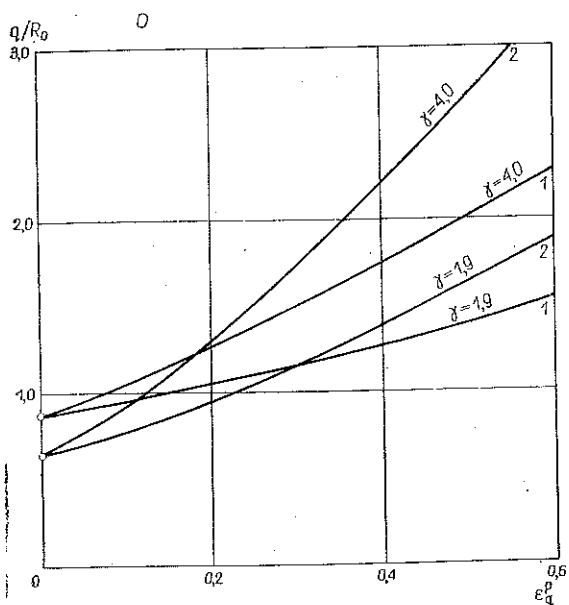
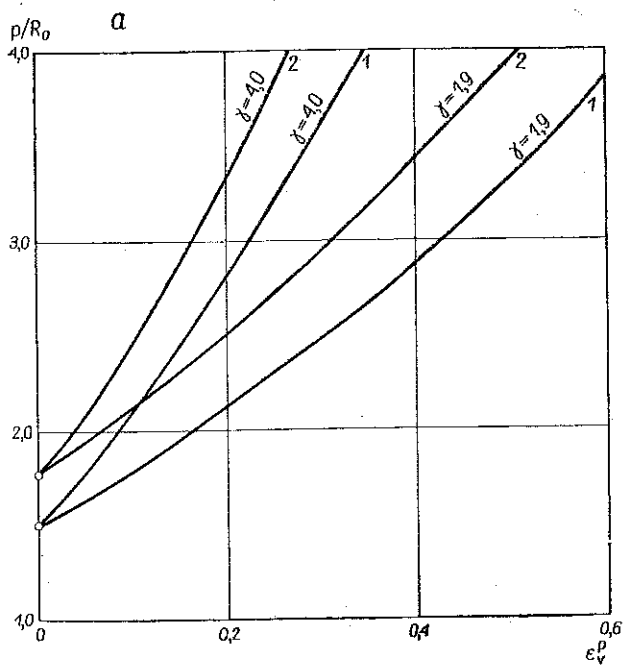
$$(2.17) \quad \varepsilon_v^p = \ln \left[\frac{\bar{q}^2 + \bar{p}^2 + 2\bar{p}(\gamma-1)}{2\bar{p}\gamma} \right],$$

$$\varepsilon_q^p = \frac{2}{\bar{p} + \gamma - 1} \left[\frac{1}{2} \bar{p} \ln \left| \frac{\bar{q} + \bar{p}}{q_0 + \bar{p}} \frac{\bar{p} - \bar{q}_0}{\bar{p} - \bar{q}} \right| + [\bar{p}^2 + 2\bar{p}(\gamma-1)]^{1/2} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \arctg \frac{\bar{q}_0}{[\bar{p}^2 + 2\bar{p}(\gamma-1)]^{1/2}} - \arctg \frac{\bar{q}}{[\bar{p}^2 + 2\bar{p}(\gamma-1)]^{1/2}} \right\} \right],$$

gdzie

$$q_0 = [\bar{p}(2-\bar{p})]^{1/2}.$$

Rysunek 4 przedstawia krzywe $q-\varepsilon_q^p$ dla kilku wartości p/R_0 .



Rys. 3. Krzywe umocnienia a: $p - \epsilon_q^p$, b: $q - \epsilon_q^p$ przy obciążeniu radialnym dla kołowego warunku plastyczności

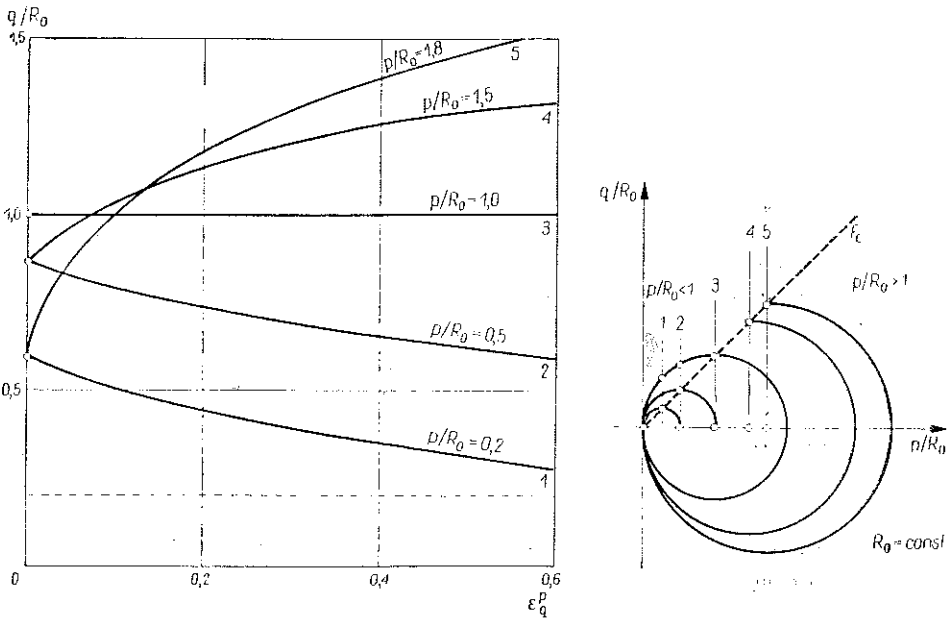
W przypadku stanu trójwymiarowego rozpatrzmy dwie szczególne postacie warunku plastyczności. Załóżmy najpierw, że

$$(2.18) \quad f = (I_1 - A)^2 + BI_2' - C = 0,$$

gdzie I_1 i I_2' oznaczają odpowiednio pierwszy niezmiennik tensora naprężenia i drugi niezmiennik dewiatora naprężenia; $A = A(\rho)$, $B = B(\rho)$, $C = C(\rho)$ są skalarnymi funkcjami gęstości materiału. Warunek plastyczności możemy również wyrazić następująco:

$$(2.19) \quad f = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + D(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - E(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + F = 0,$$

gdzie D, E, F są funkcjami gęstości materiału. W przestrzeni głównych naprężeń warunek (2.19) można przedstawić jako rodzinę elipsoid obrotowych, których oś obrotu pokrywa się z linią $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ i których środek ma współrzędne $\sigma_1^c = \sigma_2^c = \sigma_3^c = = D/3$. Równanie (2.19) jest zatem uogólnieniem warunku (2.10) wyrażonego przez zmienne p i q .



Rys. 4. Stateczne i niestateczne krzywe $q - \epsilon_q^p$ dla ścinania przy różnych wartościach ciśnienia hydrostatycznego (kołowy warunek plastyczności)

Rozpatrzmy jeszcze inną postać warunku plastyczności, wyrażonego przez dwa równania:

$$(2.20) \quad f_1 = I_2'^{1/2} - A_1 I_1 - B_1 = 0, \quad f_2 = I_2'^{1/2} + A_2 I_1 - B_2 = 0,$$

gdzie A_1 i A_2 są dodatnimi stałymi, a B_1 i B_2 są funkcjami ρ . W przestrzeni naprężeń głównych warunek ten przedstawiony jest przez dwie rodziny powierzchni stożkowych, których oś symetrii pokrywa się z linią $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Zgodnie z (2.6) przyrosty odkształceń plastycznych można przedstawić w postaci

$$(2.21) \quad \begin{aligned} d\epsilon_{ij}^p &= \lambda_1 \left[\frac{s_{ij}}{2I_2'^{1/2}} - A_1 \delta_{ij} \right], & \lambda_1 &= \frac{df_{1\sigma}}{3A_1 \rho \frac{dB_1}{d\rho}}, \\ d\epsilon_{ij}^p &= \lambda_2 \left[\frac{s_{ij}}{2I_2'^{1/2}} + A_2 \delta_{ij} \right], & \lambda_2 &= -\frac{df_{2\sigma}}{3A_2 \rho \frac{dB_2}{d\rho}}, \end{aligned}$$

gdzie δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera, a $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \sigma_{kk} \delta_{ij}$ jest dewiatorem naprężenia.

Rozluźnienie materiału zachodzi dla stanów naprężenia przedstawionych powierzchnią $f_1 = 0$, a zagęszczenie ma miejsce dla $f_2 = 0$. Stany krytyczne leżą na powierzchni utworzonej przez przecięcie się dwóch rodzin stożków.

Dla materiału sprężysto-plastycznego przyjmujemy, że całkowite odkształcenie jest sumą wyrazów «sprężystego» i «plastycznego». Załóżmy, że dewiator odkształcenia sprężystego jest liniowo związany z dewiatorem naprężenia, a sprężyste odkształcenie objętościowe jest logarytmiczną funkcją średniego ciśnienia. Możemy zatem napisać

$$(2.22) \quad d\epsilon_{ij}^e = L ds_{ij}, \quad d\epsilon_v^e = K \frac{dp}{p},$$

gdzie

$$e_{ij}^e = \epsilon_{ij}^e - \frac{1}{3} \epsilon_{kk}^e \delta_{ij}, \quad p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3}, \quad d\epsilon_v^e = \frac{1}{3} (\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e),$$

a L i K są stałymi materiałowymi. Jednostkowa energia sprężysta (na jednostkę objętości) określona jest zatem następująco:

$$(2.23) \quad W = \frac{1}{2L} e_{ij} e_{ij} + K \exp\left(\frac{\epsilon_v^e}{K}\right).$$

Całkowity przyrost odkształcenia wyniesie

$$(2.24) \quad d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p, \quad d\epsilon_v = d\epsilon_v^e + d\epsilon_v^p.$$

Podobnie przyrost gęstości da się określić jako suma wyrazów odwracalnego $d\rho_e$ i nieodwracalnego $d\rho_i$:

$$d\rho_e = (\rho_i + \rho_e) d\epsilon_v^e, \quad d\rho_i = (\rho_i + \rho_p) d\epsilon_v^p.$$

Zakładamy z kolei, że warunek plastyczności zależy od naprężenia i od trwałej zmiany gęstości ρ_i : $f = f(\sigma_{ij}, \rho_i)$. Prawo płynięcia (2.6) dla materiału sprężysto-plastycznego przyjmie zatem postać

$$(2.25) \quad d\epsilon_{ij}^p = \frac{df_\sigma}{\rho \left(-\frac{\partial f}{\partial \rho_i} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kk}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Bardziej wyczerpująca dyskusja praw płynięcia przy różnych warunkach plastyczności podana jest w pracy [7].

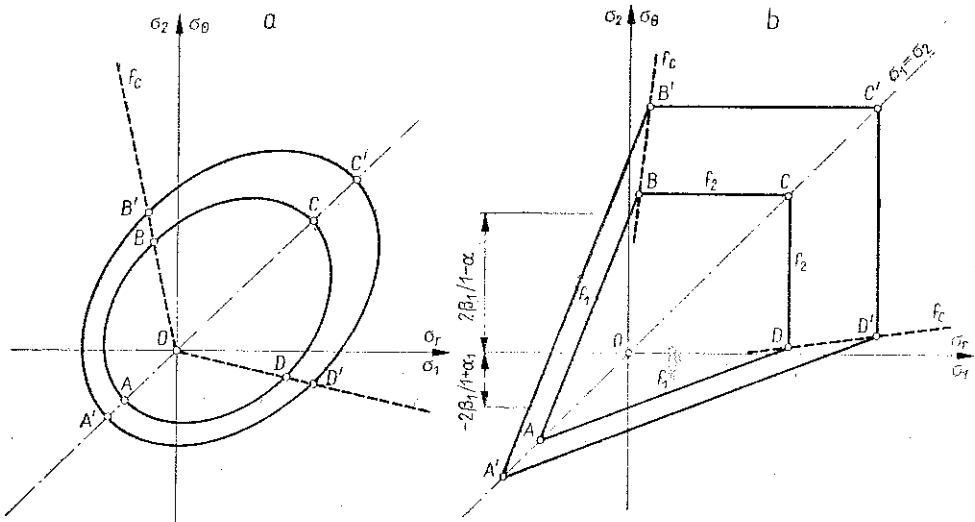
3. PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

Załóżmy, że odkształcenie zachodzi w płaszczyźnie $x_1 x_2$, gdzie x_1, x_2, x_3 oznaczają współrzędne kartezjańskie, przy czym kierunek głównego naprężenia σ_3 i odkształcenia ε_3 jest normalny do płaszczyzny $x_1 x_2$. Dla materiału sztywnoplastycznego z warunku $d\varepsilon_3=0$ i warunku plastyczności (2.19) otrzymujemy

$$(3.1) \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} E - \frac{1}{2} D (\sigma_1 + \sigma_2)$$

i warunek plastyczności przyjmie postać

$$(3.2) \quad \sigma_1^2 \left(1 - \frac{1}{4} D^2\right) + \sigma_2^2 \left(1 - \frac{1}{4} D^2\right) - D \left(\frac{1}{2} D - 1\right) \sigma_1 \sigma_2 + E \left(\frac{1}{2} D - 1\right) (\sigma_1 + \sigma_2) + \left(F - \frac{1}{4} E^2\right) = 0.$$



Rys. 5. Przykłady warunków plastyczności dla płaskiego stanu odkształcenia

Dla $D > 2$ równanie (3.2) przedstawia rodzinę elips, których środki leżą na linii $\sigma_1 = \sigma_2$ (rys. 5a). Przyrosty odkształceń plastycznych są następujące:

$$(3.3) \quad d\varepsilon_1^p = \frac{df_{\sigma} \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{4} D^2\right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{2} D - 1\right) (E - D \sigma_2) \right\}}{\rho \left(-\frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{4} D^2\right) (\sigma_1 + \sigma_2) + \left(\frac{1}{2} D - 1\right) [2E - D (\sigma_1 + \sigma_2)] \right\}},$$

$$d\varepsilon_2^p = \frac{df_{\sigma} \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{4} D^2\right) \sigma_2 + \left(\frac{1}{2} D - 1\right) (E - D \sigma_1) \right\}}{\rho \left(-\frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \left\{ 2 \left(1 - \frac{1}{4} D^2\right) (\sigma_1 + \sigma_2) + \left(\frac{1}{2} D - 1\right) [2E - D (\sigma_1 + \sigma_2)] \right\}},$$

gdzie

$$(3.4) \quad \frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{dD}{d\rho} \left[-\frac{1}{2} D (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - D \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2 + \frac{1}{2} E (\sigma_1 + \sigma_2) \right] + \\ + \frac{dE}{d\rho} \left[\frac{1}{2} D (\sigma_1 + \sigma_2) - \frac{1}{2} E \right] + \frac{dF}{d\rho}, \\ df_\sigma = 2 \left(1 - \frac{1}{4} D^2 \right) (\sigma_1 d\sigma_1 + \sigma_2 d\sigma_2) + \left(\frac{1}{2} D - 1 \right) [E (d\sigma_1 + d\sigma_2) - \\ - D (\sigma_2 d\sigma_1 + \sigma_1 d\sigma_2)].$$

Warunek plastyczności (2.20) przyjmie postać

$$(3.5) \quad f_1 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| - \alpha_1 \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \beta_1 = 0, \\ f_2 = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2| + \alpha_2 \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \beta_2 = 0,$$

gdzie

$$(3.6) \quad \alpha_1 = \frac{3A_1}{(1-3A_1^2)^{1/2}}, \quad \beta_1 = \frac{B_1}{(1-3A_1^2)^{1/2}}, \\ \alpha_2 = \frac{3A_2}{(1-3A_2^2)^{1/2}}, \quad \beta_2 = \frac{B_2}{(1-3A_2^2)^{1/2}};$$

naprężenia σ_3 mają postać następującą:

$$(3.7) \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + 3A_1 I_2'^{1/2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) - 3A_2 I_2'^{1/2}$$

odpowiednio dla stanów przedstawionych powierzchniami $f_1 = 0$ i $f_2 = 0$. Ponieważ A_1 i A_2 przyjęliśmy jako stałe, a B_1 i B_2 jako funkcję ρ , to warunek plastyczności (3.5) reprezentuje cztery rodziny linii prostych AB , BC , CD i DA , przemieszczające się równolegle przy zmianie gęstości (rys. 5b). W tym przypadku równania (3.5) przypominają nam formalnie klasyczny warunek plastyczności Coulomba z tą różnicą, że obszar sztywny jest ograniczony czterema prostymi i zmienia się wraz z gęstością. Przyrosty odkształceń plastycznych dla boków wyrażają się następująco:

$$(3.8) \quad AD: \quad d\epsilon_1^p = - \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) - \alpha_1 (\sigma_1 + \sigma_2)}{\rho \frac{d\beta_1}{d\rho}} \left(\frac{1 - \alpha_1}{4\alpha_1} \right), \\ d\epsilon_2^p = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2) - \alpha_1 (\sigma_1 + \sigma_2)}{\rho \frac{d\beta_1}{d\rho}} \left(\frac{1 + \alpha_1}{4\alpha_1} \right), \\ AB: \quad d\epsilon_1^p = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - \alpha_1 (\sigma_1 + \sigma_2)}{\rho \frac{d\beta_1}{d\rho}} \left(\frac{1 + \alpha_1}{4\alpha_1} \right),$$

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_2^p &= -\frac{(d\sigma_2 - d\sigma_1) - \alpha_1(d\sigma_1 + d\sigma_2)}{\rho \frac{d\beta_1}{d\rho}} \left(\frac{1 - \alpha_1}{4\alpha_1} \right), \\
 DC: \quad d\varepsilon_1^p &= \frac{(d\sigma_1 - d\sigma_2) + \alpha_2(d\sigma_1 + d\sigma_2)}{\rho \frac{d\beta_2}{d\rho}} \left(\frac{1 + \alpha_2}{4\alpha_2} \right), \\
 (3.8) \quad d\varepsilon_2^p &= -\frac{(d\sigma_1 - d\sigma_2) + \alpha_2(d\sigma_1 + d\sigma_2)}{\rho \frac{d\beta_2}{d\rho}} \left(\frac{1 - \alpha_2}{4\alpha_2} \right), \\
 [c.d.] \\
 BC: \quad d\varepsilon_1^p &= -\frac{(d\sigma_2 - d\sigma_1) + \alpha_2(d\sigma_1 + d\sigma_2)}{\rho \frac{d\beta_2}{d\rho}} \left(\frac{1 - \alpha_2}{4\alpha_2} \right), \\
 d\varepsilon_2^p &= \frac{(d\sigma_2 - d\sigma_1) + \alpha_2(d\sigma_1 + d\sigma_2)}{\rho \frac{d\beta_2}{d\rho}} \left(\frac{1 + \alpha_2}{4\alpha_2} \right),
 \end{aligned}$$

a dla linii AOC i linii krytycznych $OD-D'$ i $OB-B'$ prędkości odkształceń leżą w kątach zawartych między normalnymi do przylegających.

Przedstawiony warunek plastyczności i prawa płynięcia, opisane równaniami (3.5)–(3.8), można traktować jako uogólnienie modelu rozpatrzonego przez A. W. JENIKE i R. T. SHIELDA [3] z tą różnicą, że w przypadku trójosiowym warunek (3.5) nie przechodzi w warunek plastyczności Coulomba.

4. ANALIZA PLASTYCZNEGO PLYNIĘCIA RURY W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

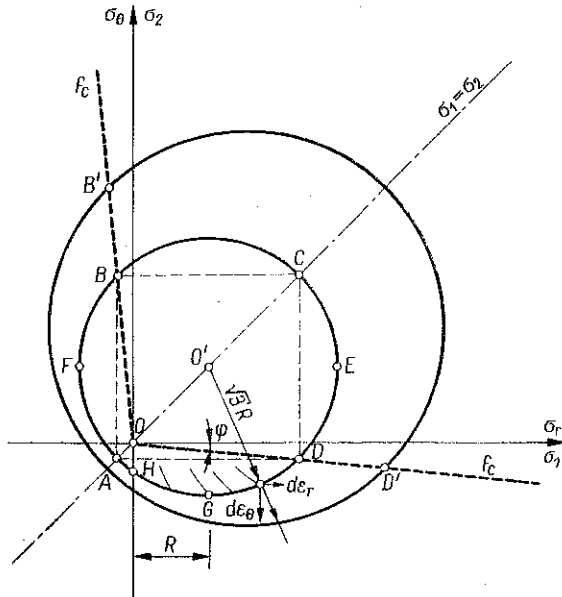
4.1. Nieliniowy warunek plastyczności

Wykorzystując związki fizyczne wyprowadzone w poprzednim punkcie, rozpatrzmy obecnie osiowo-symetryczne płynięcie rury grubościennej pod działaniem wewnętrznego ciśnienia. Zakładamy, że długość rury jest wielokrotnie większa od jej średniego promienia, tak że rozkład naprężeń i odkształceń w dostatecznej odległości od końców rury nie zmienia się po jej długości, a przekroje poprzeczne pozostają płaskimi. Mamy więc do czynienia z płaskim stanem odkształcenia. Rozpatrzmy najpierw nieliniowy warunek plastyczności (3.2) przy założeniu $D=F=0$; wtedy z (3.1) mamy $\sigma_3 = E/2 = R$ i (3.2) przyjmie postać

$$(4.1) \quad (\sigma_1 - R)^2 + (\sigma_2 - R)^2 = 3R^2,$$

gdzie $R = E/2$ jest funkcją ρ . Równanie (4.1) przedstawia zatem rodzinę kół, których środki leżą na linii $\sigma_1 = \sigma_2$ (rys. 6).

W analizie pominiemy odkształcenie sprężyste, traktując materiał jako sztywno-plastyczny. Zatem przy rosnącym ciśnieniu możemy mieć dwa przypadki: a) cała rura przechodzi jednocześnie ze stanu sztywnego w stan plastyczny, b) strefa plastycz-



Rys. 6. Nieliniowy warunek plastyczności dla płaskiego stanu odkształcenia w postaci kół o zmiennym promieniu $R(\rho)$ i jego aproksymacja prostokątem $ABCD$

na propaguje się od wewnątrz, obejmując stopniowo całą rurę. Zbadajmy obecnie warunki jednoczesnego uplastycznienia całej rury zakładając, że w chwili początkowej gęstość materiału jest wszędzie jednakowa.

Wprowadźmy układ współrzędnych walcowych r, θ, z , gdzie oś z pokrywa się z osią rury. Ze względu na osiową symetrię problemu naprężenie radialne σ_r i obwodowe σ_θ są naprężeniami głównymi, a naprężenie $\sigma_z = R$ zmienia się wraz z gęstością. Pole prędkości określone jest składową radialną $v_r = v(r)$, bowiem dwie pozostałe składowe są równe zero, $v_\theta = v_z = 0$. Prędkości odkształceń określone są wzorami

$$(4.2) \quad \dot{\varepsilon}_r = -\frac{\partial v}{\partial r}, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{v}{r}, \quad \dot{\varepsilon}_z = 0$$

zgodnie z przyjętą umową, że naprężenia ściskające i odpowiadające im odkształcenia są dodatnie.

Równanie równowagi

$$(4.2') \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

oraz warunek plastyczności (4.1) w postaci

$$(4.3) \quad \sigma_{\theta_1} = R + (2R^2 + 2R\sigma_r - \sigma_r^2)^{1/2}, \quad \sigma_{\theta_2} = R - (2R^2 + 2R\sigma_r - \sigma_r^2)^{1/2}$$

określają dwa rozwiązania statyczne. Pierwszy warunek (4.3) odpowiada części *ECBF* okręgu uplastycznia, drugie zaś części *FHDE*. Łatwo jest stwierdzić na podstawie prawa płynięcia, że dla części *ECBF* mamy $\dot{\epsilon}_\theta = -v/r > 0$, a dla *FHDE* mamy $\dot{\epsilon}_\theta = -v/r < 0$. Zatem pierwsze naprężenie (4.3) odpowiada plastycznemu płynięciu do środka rury, drugie zaś płynięcie odśrodkowemu.

Założmy, że początkowy promień wewnętrzny rury wynosi $r_w = a_0$, a promień zewnętrzny $r_z = b_0$. Rozpatrując ogólniejszy przypadek, kiedy rura jest poddana działaniu zarówno ciśnienia wewnętrznego jak i zewnętrznego, po scałkowaniu równania (4.2), wykorzystując (4.3) i spełniając warunki brzegowe $\sigma_r = p_a$ dla $r = a_0$ i $\sigma_r = p_b$ dla $r = b_0$, otrzymujemy w przypadku płynięcia dośrodkowego ($v < 0$)

$$\frac{r}{b_0} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_r}{R} - 1 \right) - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right) - \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_r}{R} - 1 \right) - \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_r}{R} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(4.4) \quad \frac{a_0}{b_0} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_a}{R} - 1 \right) - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right) - \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_a}{R} - 1 \right) - \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_a}{R} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{2}};$$

przy płynięciu zaś odśrodkowym ($v > 0$) mamy

$$\frac{r}{b_0} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right) - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_r}{R} - 1 \right) \right] \right\} \times$$

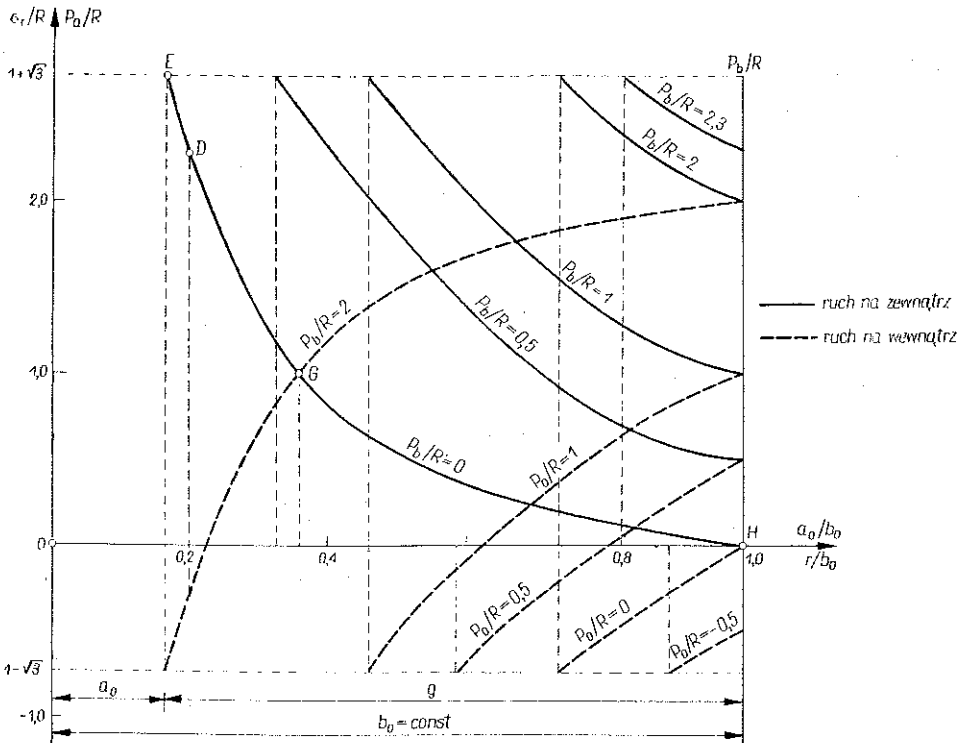
$$\times \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right) + \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_r}{R} - 1 \right) + \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sigma_r}{R} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$(4.5) \quad \frac{a_0}{b_0} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right) - \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_a}{R} - 1 \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left[\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right) + \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_b}{R} - 1 \right)}{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_a}{R} - 1 \right) + \cos \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{p_a}{R} - 1 \right)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Równania (4.4) i (4.5) określają rozkład naprężeń promieniowych oraz stosunek promieni rury a_0/b_0 odpowiadający stanowi pełnego uplastycznienia. Interesującą

rzeczą jest fakt, że naprężenia σ_r i σ_θ są jedynie funkcją stosunku r/b_0 , a nie zależą od wewnętrznego promienia rury. Wykres na rys. 7 przedstawia rozkład początkowych naprężeń promieniowych, odpowiadających ruchowi odśrodkowemu lub



Rys. 7. Wykresy rozkładu początkowych naprężeń promieniowych odpowiadające ruchowi odśrodkowemu i dośrodkowemu dla rury o różnych stosunkach a_0/b_0

dośrodkowemu. Z wykresu tego możemy odczytać wielkość jednego z ciśnień odpowiadających pełnemu uplastycznieniu lub też grubość rury g , gdy ciśnienia są dane. Jak widać, dla rozpatrywanego warunku plastyczności (4.1) wielkości ciśnień mogą zmieniać się w granicach $1 - \sqrt{3} < \sigma_r/R < 1 + \sqrt{3}$.

Rozpatrzmy obecnie przypadek płynięcia plastycznego rury, która uległa pełnemu uplastycznieniu w chwili początkowej. Ograniczymy się do przypadku, gdy rura jest poddana działaniu tylko ciśnienia wewnętrznego. Stan naprężenia w chwili początkowej przedstawiony jest częścią $H-D-E$ krzywej uplastycznienia na rys. 6, przy czym punkt H reprezentuje stan na zewnętrznym obwodzie rury, a stan na obwodzie wewnętrznym odpowiada punktowi leżącemu poniżej E na części $H-D-E$. Ponieważ zgodnie z prawem płynięcia składowa obwodowa prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_\theta = -v/r = 0$ w punkcie E przy pełnym uplastycznieniu w chwili początkowej, przeto stan naprężenia na obwodzie wewnętrznym musi leżeć poniżej E , tak aby był spełniony warunek $v > 0$ w całym obszarze. Linia krytyczna f_c łączy punkty odpowiadające zerowej zmianie objętości ($\dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_r = 0$), część DE zaś odpowiadać

będzie zagęszczaniu materiału, a DH rozluźnianiu. Zatem w miarę plastycznego płynięcia powierzchnia plastyczności będzie się zmieniać w każdym punkcie i materiał stanie się niejednorodny, ulegając wzmocnieniu lub osłabieniu w różnych obszarach.

Wychodząc ze stanu początkowego, określonego wzorami (4.5), rozważmy małe przyrosty naprężeń i przemieszczeń $\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma_\theta$, $\Delta u = v dt$ odpowiadające stanowi plastycznemu. Wielkości przyrostowe spełniają następujący układ równań:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \frac{d\Delta\sigma_r}{dr} + \frac{\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\theta}{r} &= 0, \\ 2(\sigma_r - R)(\Delta\sigma_r - \Delta R) + 2(\sigma_\theta - R)(\Delta\sigma_\theta - \Delta R) &= \sigma R \Delta R, \\ \Delta\varepsilon_r &= 2\lambda(\sigma_r - R), \quad \Delta\varepsilon_\theta = 2\lambda(\sigma_\theta - R), \\ \Delta\varepsilon_r &= -\frac{d\Delta u}{dr}, \quad \Delta\varepsilon_\theta = -\frac{\Delta u}{r}, \quad \frac{\Delta R}{R_0} = \gamma \frac{\Delta\rho}{\rho_a}. \end{aligned}$$

Pierwsze równanie (4.6) jest równaniem równowagi dla przyrostów, drugie wynika z warunku plastyczności (4.1) i wyraża fakt, że stan naprężenia $\sigma_r + \Delta\sigma_r$, $\sigma_\theta + \Delta\sigma_\theta$ również spełnia warunek (4.1) dla promienia koła uplastycznienia $R + \Delta R$. Równania trzecie i czwarte wyrażają prawa płynięcia, równania przedostatnie związku geometryczne, ostatnie zaś równanie wynika z przyjętej zależności promienia R od gęstości

$$(4.7) \quad \frac{R}{R_0} = 1 + \gamma \left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1 \right),$$

gdzie $\gamma = m\rho_a/R_0 > 1$ jest stałą materiałową, R_0 początkowym promieniem okręgu na rys. 6, ρ_a gęstością materiału w stanie początkowym oraz $m = (R - R_0)/(\rho - \rho_a)$.

Wykorzystując wynikający z (2.2) związek

$$(4.8) \quad \Delta\rho = -\rho \left(\frac{d\Delta u}{dr} + \frac{\Delta u}{r} \right)$$

układ równań (4.6) sprowadzamy do dwóch równań różniczkowych o dwóch niewiadomych funkcjach $\Delta\sigma_r$ i Δu :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \frac{\gamma\rho}{\rho_0} \frac{\Delta u}{r} \left(\frac{\sigma_r}{R_0} \eta + \frac{\sigma_\theta}{R_0} \eta + 1 \right) + \frac{\Delta\sigma_r}{R_0} \left(\frac{\sigma_r}{R_0} \eta + \frac{\sigma_\theta}{R_0} \eta - 2 \right) + \\ + \left(\frac{\sigma_\theta}{R_0} \eta - 1 \right) r \frac{d}{dr} \frac{\Delta\sigma_r}{R_0} = 0, \\ \frac{d\Delta u}{\Delta u} = \frac{\left(\frac{\sigma_r}{R_0} \eta - 1 \right)}{\left(\frac{\sigma_\theta}{R_0} \eta - 1 \right)} \frac{dr}{r}, \end{aligned}$$

gdzie $\eta = R/R_0$.

Otrzymany układ (4.9) rozwiązujemy numerycznie krok po kroku z uwzględnieniem następujących warunków brzegowych:

$$\left[\frac{\Delta\sigma_r}{R_0} \right]_{r=a} = \frac{\Delta p_a}{R_0}, \quad \left[\frac{\Delta\sigma_r}{R_0} \right]_{r=b} = 0,$$

a następnie wykorzystując (4.6) obliczamy odpowiadające przyrosty $\Delta\sigma_\theta$, Δu , Δp , ΔR .

Z uwagi na złożoność obliczeń w pracy ograniczono się do przeliczenia kilku kolejnych przyrostów przemieszczenia dla rury, której początkowy stan naprężenia leży w obszarze rozluźnienia i jest przedstawiony częścią $D-H$ krzywej na rys. 6. Odpowiada to stosunkowi promieni $a_0/b_0=0,2$ (rys. 7). Przyjęto, że stała materiałowa wynosi $\gamma=1,5$. Na rys. 6 naniesiono szkicowo profile naprężeń zmieniające się w procesie plastycznego płynięcia rury. Należy zauważyć, że zmierzają one do linii krytycznej f_c . Zależność przemieszczenia wewnętrznego brzegu rury $r_w=a_0$ od przyłożonego ciśnienia p_a przedstawiono na rys. 9 krzywą ciągłą w zestawieniu z odpowiednimi wykresami otrzymanymi z przytoczonych niżej rozwiązań dla liniowego warunku plastyczności.

Ze względu na rozluźnienie materiału krzywe te są niestateczne. Nie ma zatem ogólnie jednoznaczności rozwiązania. Należy jednak przypuszczać, że przedstawione rozwiązanie jest jedyne w klasie rozwiązań osiowo-symetrycznych i odpowiada pełnemu plastycznemu płynięciu.

4.2. Zlinearyzowany warunek plastyczności

Jak widzimy, zastosowanie nieliniowego warunku plastyczności w postaci (4.1) prowadzi do znacznych trudności przy rozpatrywaniu nawet prostych zagadnień brzegowych, które można rozwiązywać jedynie za pomocą metod numerycznych. Aby móc uzyskać rozwiązanie w postaci analitycznej, rozpatrzmy zlinearyzowany warunek plastyczności, aproksymując okrąg na rys. 6 prostokątem $ABCD$. W sposób formalny możemy dojść do tego warunku przyjmując w (3.5) $\alpha_1=\alpha_2=1$. Oba główne naprężenia $\sigma_1=\sigma_r$ i $\sigma_2=\sigma_\theta$ mogą być obecnie niezależnymi od siebie funkcjami gęstości. Załóżmy, że stan krytyczny przedstawiony jest liniami prostymi $OB-B'$ i $OD-D'$ tworzącymi kąt φ odpowiednio z osią σ_θ i σ_r . Zależność naprężeń głównych od gęstości przyjmujemy w postaci

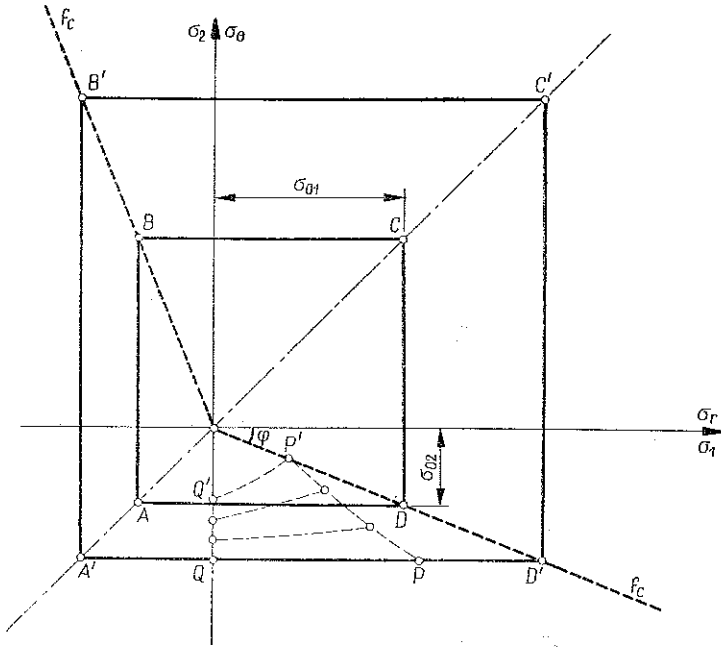
$$(4.10) \quad -\frac{\sigma_2}{\sigma_{02}} = 1 + \gamma \left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1 \right), \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_{01}} = 1 + \gamma \left(\frac{\rho}{\rho_a} - 1 \right),$$

gdzie $\sigma_{02}/\sigma_{01} = \operatorname{tg} \varphi$, σ_{01} i σ_{02} są granicami plastyczności przy gęstości początkowej ρ_a , $\gamma > 1$ zaś jest stałą materiałową.

4.2.1 Ośrodkowe skończone płynięcie rury pod działaniem ciśnienia wewnętrznego

Wykorzystując tak uproszczony warunek plastyczności, rozpatrzmy skończone płynięcie rury pod działaniem ciśnienia wewnętrznego p zakładając, że nawet w przypadku rozwiązania niestatecznego płynięcie to zachowuje osiową symetrię.

Przedyskutujemy najpierw przypadek, gdy w chwili początkowej cały przekrój poprzeczny rury przechodzi jednocześnie w stan plastyczny. Oznaczmy jak poprzednio początkowe wartości wewnętrznego i zewnętrznego promienia rury przez a_0 i b_0 , a odpowiednio ich wartości w dowolnie rozpatrywanym momencie deformacji przez a i b . Podobnie przez r_0 i r oznaczymy promień dowolnego punktu przed i w czasie



Rys. 8. Zlinearyzowany warunek plastyczności w płaskim stanie odkształcenia

deformacji. Należy zauważyć, że analogicznie jak dla punktów E i F powierzchni plastyczności (4.1) plastyczne płynięcie nie jest możliwe dla stanów przedstawionych bokami AB i CD . Dla rur o niewielkim stosunku b_0/a_0 (który określimy później) będziemy poszukiwali rozwiązania dla stanu naprężenia przedstawionego bokiem AD warunku plastyczności (rys. 8). Zgodnie z prawem płynięcia mamy

$$(4.11) \quad \dot{\varepsilon}_r = -\frac{dv}{dr} = 0, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{v}{r} = 0.$$

Z (4.11) wynika, że $v = \text{const}$; otrzymujemy zatem proste związki pomiędzy chwilowymi i początkowymi wymiarami rury oraz gęstościami:

$$(4.12) \quad a = a_0 + vt, \quad b = b_0 + vt, \quad r = r_0 + vt,$$

$$\rho = \frac{r_0}{r} \rho_a = \rho_a \left(1 - \frac{vt}{r}\right),$$

gdzie t oznacza czas deformacji. Zatem z (4.12) wynika, że

$$(4.13) \quad \sigma_\theta = -\sigma_{z2} \left(1 - \gamma \frac{vt}{r}\right).$$

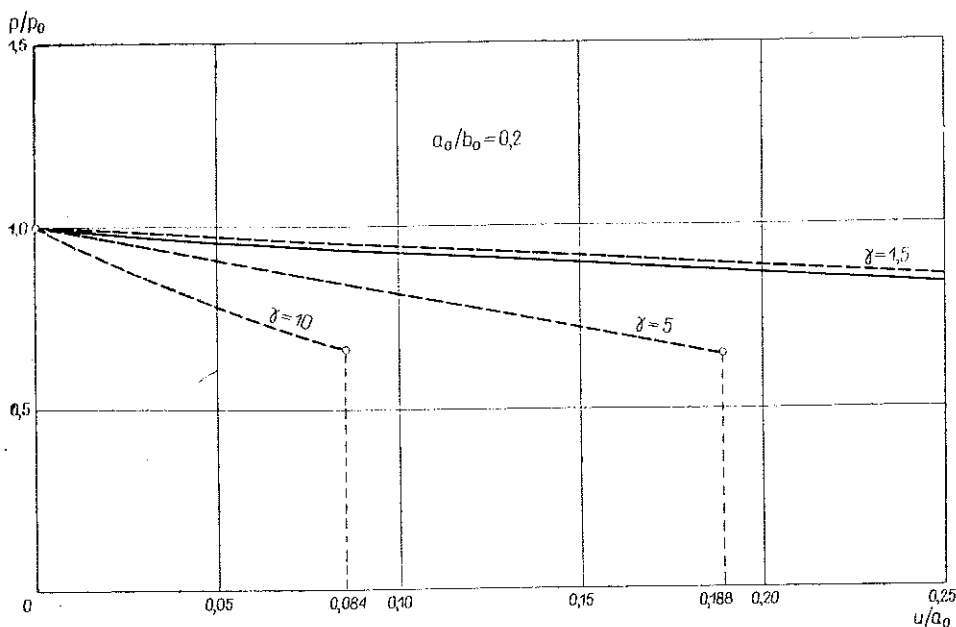
Pole naprężeń otrzymamy całkując równanie równowagi (4.2'), wykorzystując jednocześnie wyrażenie (4.13). Po spełnieniu warunku brzegowego $\sigma_r=0$ dla $r=b$ otrzymujemy

$$(4.14) \quad \sigma_r = \sigma_{02} \left(\frac{b}{r} - \gamma \frac{vt}{r} \ln \frac{b}{r} - 1 \right).$$

Zależność pomiędzy ciśnieniem wewnętrznym p a przemieszczeniem wewnętrznego brzegu rury Δa_0 wynika bezpośrednio z (4.14). Przyjmując $r=a$ otrzymujemy

$$(4.15) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\frac{b}{a} - 1 - \gamma \frac{\Delta a_0}{a} \ln \frac{b}{a}}{\frac{b}{a} - 1},$$

gdzie $\Delta a_0 = vt$, a $p_0 = \sigma_{02} (b/a_0 - 1)$ oznacza początkową wartość ciśnienia uplastyczniającego całą rurę. Na rys. 9 liniami przerywanymi przedstawiono otrzy-



Rys. 9. Niestateczne krzywe ciśnienie-przemieszczenie w przypadku skończonego płynięcia rury o stosunku $a_0/b_0=0,2$ dla nieliniowego i liniowego warunku plastyczności

mane z (4.15) niestateczne krzywe, określające zależność ciśnienia od przemieszczenia $\Delta a_0/a_0$. Obliczenia przeprowadzono dla rury o parametrach takich samych jak w przykładzie dla nieliniowego warunku plastyczności (krzywa ciągła na rys. 9): $a_0/b_0=0,2$, $\tan \varphi=0,1010$; $\gamma=1,5$ oraz dodatkowo dla $\gamma=5$ i 10. Jak widzimy, liniowa aproksymacja warunku plastyczności pozwala na uzyskanie rozwiązania

w bardzo prostej postaci, przy czym krzywe ciśnienie-przemieszczenie dla obu rozwiązań leżą blisko siebie.

Rozwiązanie odpowiadające bokowi AD jest poprawne do chwili, gdy stan naprężenia na wewnętrznym brzegu rury osiąga stan krytyczny. Mamy zatem warunek

$$(4.16) \quad \sigma_{\theta} \leq -\sigma_r \operatorname{tg} \varphi \quad \text{dla} \quad r=a.$$

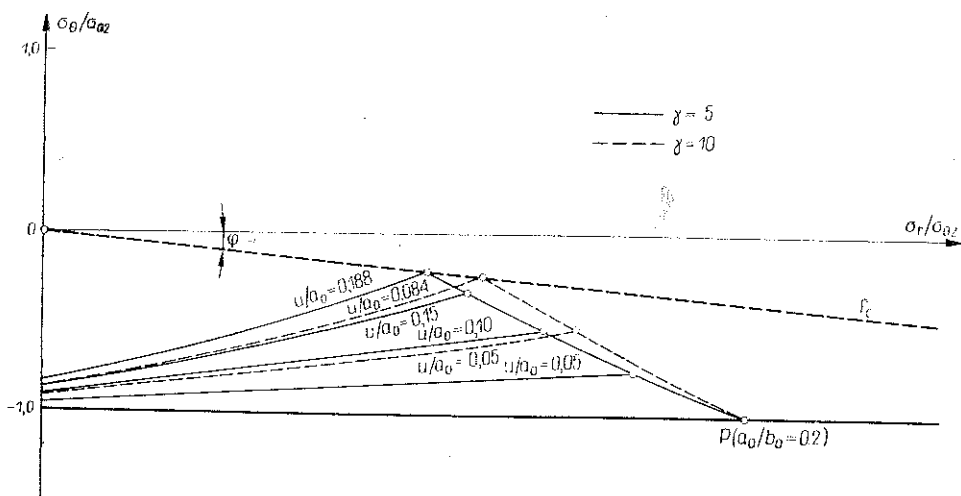
Wykorzystując (4.14) i (4.15), z (4.16) otrzymujemy nierówność

$$(4.17) \quad \frac{b}{a} + \gamma \frac{\Delta a_0}{a} \ln \frac{a}{b} - 1 - \operatorname{ctg} \varphi + \gamma \frac{\Delta a_0}{a} \operatorname{ctg} \varphi \leq 0.$$

Dla $\Delta a_0 = 0$, z (4.17) otrzymamy następujący warunek

$$(4.18) \quad \frac{b_0}{a_0} - 1 \leq \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{02}} \quad \text{lub} \quad \frac{b_0}{a_0} \leq 1 + \frac{\sigma_{01}}{\sigma_{02}},$$

określający zakres rozwiązania dla boku AD w chwili początkowej. Dla każdego stosunku b_0/a_0 spełniającego (4.18) nierówność (4.17) pozwala na określenie wielkości przemieszczeń Δa_0 , dla których jest poprawne wyżej przedstawione rozwiąza-



Rys. 10. Profile naprężeń w deformowanej rurze o stosunku $a_0/b_0 = 0,2$ (rozwiązanie dla boku AD)

nie, odpowiadające bokowi AD . Dla większych przemieszczeń stan naprężenia w pewnym obszarze rury będzie odpowiadać linii krytycznej. Z rys. 10, przedstawiającego profile naprężeń w deformowanej rurze o parametrach $a_0/b_0 = 0,2$ i $\gamma = 5; 10$, możemy łatwo odczytać krańcowe wartości przemieszczeń, ograniczające obszar rozwiązania ($u/a_0 = 0,188$ dla $\gamma = 5$ i $u/a_0 = 0,084$ dla $\gamma = 10$).

Dla grubych rur, gdy nie jest spełniony warunek (4.18), należy oczekiwać, że uplastycznienie wystąpi wpierv przy wewnętrznym brzegu i będzie się propagować na zewnątrz w miarę wzrostu ciśnienia. Rozpatrzmy zatem obecnie drugi przypadek,

gdy rura jest dostatecznie gruba ($b_0/a_0 > 1 + \text{ctg } \varphi$). Zakładamy, że strefa plastyczna istnieje w obszarze $a < r < \xi$, obszar zaś na zewnątrz jest sztywny. Przyjmujemy poza tym, że stan naprężenia w obszarze plastycznym $a < r < \xi$ jest przedstawiony linią krytyczną $OD-D'$, tzn.

$$(4.19) \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_r} = -\text{tg } \varphi,$$

natomiast dla obszaru sztywnego $\xi < r < \infty$ stan naprężenia leży we wnętrzu początkowego prostokąta $ABCD$. Z warunku równowagi i zależności (4.19) otrzymamy dla $a < r < \xi$

$$(4.20) \quad \sigma_r = p(t) \left[\frac{a(t)}{r} \right]^{1+\text{tg } \varphi}, \quad \sigma_\theta = -p(t) \text{tg } \varphi \left[\frac{a(t)}{r} \right]^{1+\text{tg } \varphi}.$$

Z zależności (4.10) otrzymujemy wzór na zmienną gęstości

$$(4.21) \quad \rho = \rho_a \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} + \bar{p} \left(\frac{a}{r} \right)^{1+\text{tg } \varphi} \frac{1}{\gamma} \right],$$

gdzie $\bar{p} = p/\sigma_{01}$.

Pole prędkości możemy określić z równania ciągłości

$$(4.22) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial r} v = -\rho \left(\frac{v}{r} + \frac{dv}{dr} \right).$$

Podstawiając (4.21) do (4.22) otrzymujemy liniowe, niejednorodne równanie różniczkowe

$$(4.23) \quad \frac{dv}{dr} \left[\gamma - 1 + \bar{p} \left(\frac{a}{r} \right)^{1+\text{tg } \varphi} \right] + \frac{v}{r} \left[\gamma - 1 - \bar{p} \left(\frac{a}{r} \right)^{1+\text{tg } \varphi} \text{tg } \varphi \right] + \left(\frac{a}{r} \right)^{1+\text{tg } \varphi} \left[\frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{\bar{p}}{a} (1 + \text{tg } \varphi) \frac{da}{dt} \right] = 0.$$

Po scałkowaniu równania (4.23) i uwzględnieniu warunku brzegowego $v=0$ dla $r=\xi$ pole prędkości w obszarze uplastycznionym ma postać następującą:

$$(4.24) \quad v_1 = \frac{a^{1+\text{tg } \varphi} \left[\frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{\bar{p}}{a} (1 + \text{tg } \varphi) \frac{da}{dt} \right] \left[\frac{1}{r^{\text{tg } \varphi - 1}} - \frac{1}{\xi^{\text{tg } \varphi - 1}} \right]}{r(\text{tg } \varphi - 1) \left[\gamma - 1 + \bar{p} \left(\frac{a}{r} \right)^{1+\text{tg } \varphi} \right]}.$$

Na granicy stref dla $r=\xi$ naprężenie σ_r jest równe granicy plastyczności σ_{01} . Stąd z (4.20) wynika

$$(4.25) \quad \bar{p} = \left(\frac{\xi}{a} \right)^{1+\text{tg } \varphi}.$$

Prędkość przemieszczenia wewnętrznej krawędzi rury $v_1(a) = da/dt$ może być określona z (4.24) przez podstawienie $r=a$. Wykorzystując (4.25), z (4.24) otrzy-

mujemy następujący związek wyrażający zależność skończonych przemieszczeń wewnętrznego brzegu rury od wewnętrznego ciśnienia:

$$(4.26) \quad \ln \left(\frac{a}{a_0} \right) = \int_1^p \frac{\bar{p}^{\frac{1-\operatorname{tg} \varphi}{1+\operatorname{tg} \varphi}} - 1}{(1-\operatorname{tg} \varphi)(\gamma-1+\bar{p}) + (1-\operatorname{tg} \varphi)(\bar{p}-\bar{p}^{\frac{2}{1+\operatorname{tg} \varphi}})} d\bar{p}.$$

Gdy promień ξ oddzielający strefę plastyczną od sztywnej osiągnie taką wartość, że będzie spełniona równość $b_0/\xi = 1 + \sigma_{01}/\sigma_{02}$ (por. (4.18)), to zewnętrzny obszar ulegnie uplastycznieniu i stan naprężenia w tym obszarze będzie przedstawiony przez bok AD , podobnie jak dla przypadku rury cienkiej, rozpatrzonej poprzednio. A zatem w obszarze $\xi < r < b$ stan naprężenia jest określony formułami (4.13) i (4.14), a w obszarze $a < r < \xi$ wzorami (4.20). Na granicy dwóch obszarów musi być zachowana ciągłość naprężeń i prędkości; z warunku ciągłości σ_r i σ_θ dla $r = \xi$ otrzymujemy

$$(4.27) \quad \bar{p} = \left(\frac{\xi}{a} \right)^{1+\operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{b}{\xi} + \gamma \frac{v_0 t}{\xi} \ln \frac{\xi}{b} - 1 \right],$$

$$\bar{p} \left(\frac{a}{\xi} \right)^{1+\operatorname{tg} \varphi} = 1 - \gamma \frac{v_0 t}{\xi},$$

gdzie v_0 oznacza stałą prędkość w obszarze $\xi < r < b$. Równanie (4.23), poprawne dla obszaru $a < r < \xi$, po scałkowaniu z uwzględnieniem warunku ciągłości prędkości dla $r = \xi$, daje dodatkowy związek:

$$(4.28) \quad v = \frac{dr}{dt} = v_1 + v_0 \frac{\xi}{r} \frac{\gamma-1+\bar{p} \left(\frac{a}{\xi} \right)^{1+\operatorname{tg} \varphi}}{\gamma-1+\bar{p} \left(\frac{a}{r} \right)^{1+\operatorname{tg} \varphi}},$$

gdzie v_1 jest określone wzorem (4.24).

Podstawiając odpowiednio do (4.28) $r = a$ i $r = b$ otrzymamy dwa równania różniczkowe dla da/dt i db/dt , które wraz z równaniami (4.27) pozwalają określić trzy nieznanne funkcje: $a(t)$, $b(t)$ i $\xi(t)$ w zależności od $p(t)$. Numeryczne obliczenia są jednak dość zawiłe i dlatego nie będą dyskutowane w tej pracy.

4.2.2. Rura pod działaniem ciśnienia wewnętrznego; rozwiązanie dla małych przemieszczeń

Dalsze uproszczenie analizy możemy uzyskać ograniczając się do rozpatrzenia małych przemieszczeń i odnosząc równanie równowagi oraz związki geometryczne do konfiguracji początkowej. Zamiast (4.22) możemy zatem napisać

$$(4.29) \quad \frac{dp}{\rho_a} = \varepsilon_p^p = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur),$$

gdzie u oznacza małe przemieszczenie promieniowe.

Rozpatrzmy przypadek rury o dużej grubości, gdy strefa plastyczna propaguje się od wewnętrznego brzegu. Wykorzystując zależności (4.20) i (4.21), określające stan naprężenia w obszarze plastycznym, z (4.29) otrzymujemy

$$(4.30) \quad ur = \frac{1}{\gamma} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{\bar{p} a^{1+\lg \varphi}}{(1-\lg \varphi) r^{\lg \varphi - 1}} \right] + c,$$

gdzie c oznacza stałą całkowania.

Spełniając warunek brzegowy $u=0$ dla $r=\xi$, pole przemieszczeń w obszarze $a < r < \xi$, odpowiadające zagęszczaniu na linii krytycznej, przedstawimy w postaci

$$(4.31) \quad ur = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} (r^2 - \xi^2) + \bar{p} \frac{a^{1+\lg \varphi}}{1-\lg \varphi} \left[\frac{1}{\xi^{\lg \varphi - 1}} - \frac{1}{r^{\lg \varphi - 1}} \right] \right\}.$$

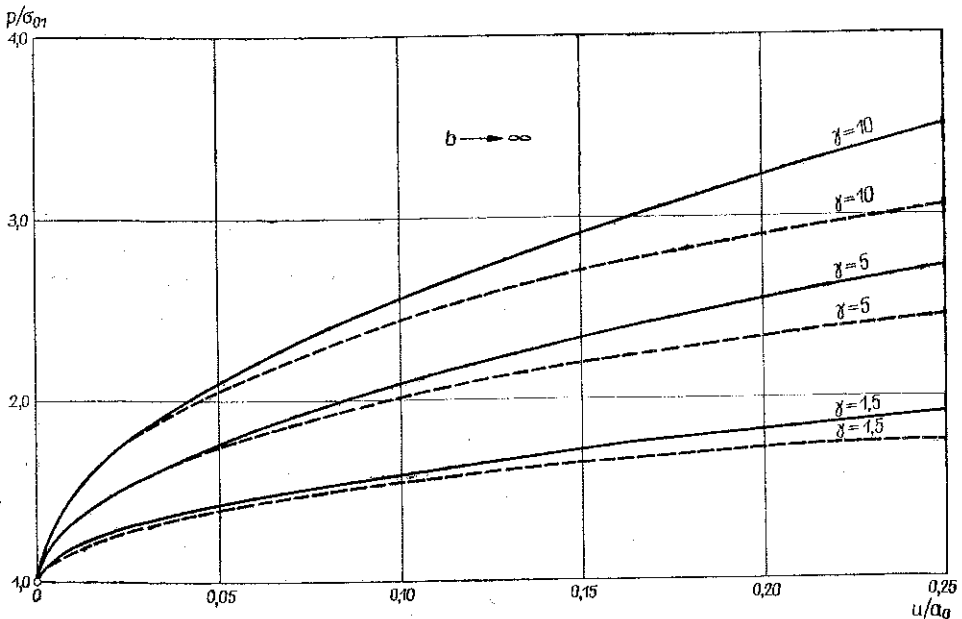
Z (4.25) otrzymujemy

$$(4.32) \quad \xi = a \bar{p}^{\frac{1}{1+\lg \varphi}}.$$

Wstawiając (4.32) do (4.31) i przyjmując $r=a$, otrzymujemy następującą zależność przemieszczenia u_a od przyłożonego ciśnienia:

$$(4.33) \quad \bar{u} = \frac{u_a}{a} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \bar{p}^{\frac{2}{1+\lg \varphi}}) + \frac{1}{1-\lg \varphi} [\bar{p}^{\frac{2}{1+\lg \varphi}} - \bar{p}] \right\}.$$

Oba rozwiązania (4.26) i (4.33) dla skończonych i małych odkształceń określają przemieszczenia wewnętrznego brzegu rury w przypadku, gdy istnieje nieuplastycz-



Rys. 11. Krzywe ciśnienie-przemieszczenie w przypadku propagacji strefy plastycznej w obszar sztywny rury dla skończonych i małych przemieszczeń

niony obszar zewnętrzny (w szczególności rozwiązania te odnoszą się do rury nieskończenie grubej). Rysunek 11 przedstawia krzywe określające zależność $\bar{u} = \bar{u}(\bar{p})$, obliczoną dla kilku wartości γ . Jak widać z wykresów, w obrębie odkształceń nie przekraczających 20% rozwiązania dla skończonych i małych przemieszczeń leżą bardzo blisko siebie.

Analogicznie do dyskutowanego uprzednio rozwiązania dla skończonych przemieszczeń zewnętrzny obszar sztywny zostanie uplastyczniony, gdy promień strefy plastycznej ξ osiągnie wartość krytyczną ξ_k , określoną na podstawie warunku (4.18), tak że będzie zachodził związek

$$(4.34) \quad \frac{b_0}{\xi_k} = 1 + \operatorname{ctg} \varphi.$$

Oznacza to, że w obszarze zewnętrznym $\xi_k < r < b$ stan naprężenia odpowiada bokowi AD i dla obszaru tego poprawne jest rozwiązanie, jak dla przypadku cienkiej rury rozpatrzonej uprzednio w p. 4.2.1. A zatem przy całkowitym uplastycznieniu grubej rury w obszarze $a < r < \xi_k$ stan naprężenia odpowiada linii krytycznej i określony jest wzorami (4.20); natomiast w obszarze $\xi_k < r < b$ stan naprężenia odpowiada bokowi AD i określony jest formułami

$$(4.35) \quad \sigma_r = \sigma_{02} \left(\gamma \frac{u_0}{r} \ln \frac{r}{b} + \frac{b}{r} - 1 \right), \quad \sigma_\theta = -\sigma_{02} \left[1 - \gamma \frac{u_0}{r} \right],$$

gdzie $u_0 = \text{const}$.

Z warunku ciągłości naprężeń σ_r i σ_θ oraz prędkości u na granicy dwóch stref, tj. dla $r = \xi$, otrzymujemy następujący związek pomiędzy ξ i \bar{p} :

$$(4.36) \quad \frac{\bar{p}}{\operatorname{tg} \varphi} \left(\frac{a}{\xi} \right)^{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \left[\bar{p} \left(\frac{a}{\xi} \right)^{1 + \operatorname{tg} \varphi} - 1 \right] \ln \frac{b}{\xi} + \frac{b}{\xi} - 1$$

oraz następujące wzory określające zależność przemieszczenia wewnętrznego brzegu rury $r = a$ od przyłożonego ciśnienia:

dla $a < \xi < \xi_k$

$$(4.37) \quad \bar{u} = \frac{u_a}{a_0} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\xi}{a_0} \right)^2 \right] + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \varphi} \left[\left(\frac{\xi}{a_0} \right)^2 - \left(\frac{\xi}{a_0} \right)^{1 + \operatorname{tg} \varphi} \right] \right\};$$

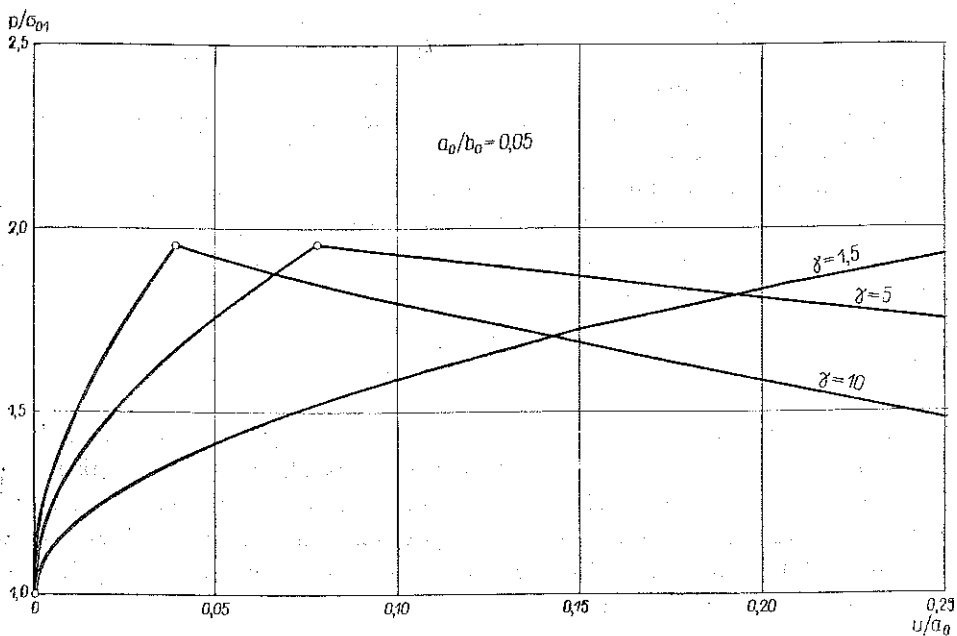
dla $\xi_k < \xi < b$

$$(4.38) \quad \bar{u} = \frac{u_a}{a_0} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \left(\frac{\xi}{a_0} \right)^2 \right] - \frac{\bar{p}}{1 - \operatorname{tg} \varphi} \left[1 - \left(\frac{\xi}{a_0} \right)^{1 - \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{tg} \varphi \right] \right\}.$$

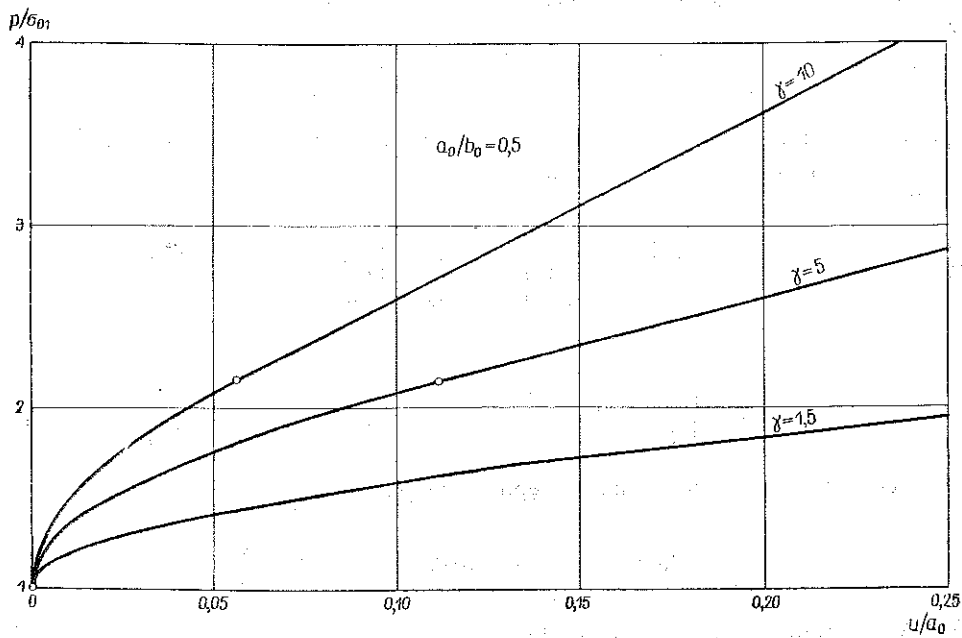
Obliczenia przeprowadzono dla następujących parametrów:

$$\frac{a_0}{b_0} = 0,05, \quad \operatorname{tg} \varphi = 0,1010, \quad \gamma = 1,5, 5, 10.$$

Wyniki przedstawiono na rys. 12. Jak widać z wykresów, w strefie wewnętrznej zgodnie z (4.37) krzywe zależności $\bar{u} = \bar{u}(\bar{p})$ są stateczne (zageszczenie materiału),



Rys. 12. Krzywe ciśnienie-przemieszczenie dla całkowicie uplastycznionej rury o stosunku $a_0/b_0 = 0,05$



Rys. 13. Krzywe ciśnienie-przemieszczenie dla rury w sztywnej osłonie o stosunku $a_0/b_0 = 0,5$

natomiast w strefie zewnętrznej $\xi_k < r < b$ rozwiązanie ma charakter niestateczny (rozluźnienie materiału).

4.2.3. Rura w sztywnej osłonie; rozwiązanie dla małych przemieszczeń

Zanalizujmy jeszcze jeden przykład, mianowicie rurę rozpychaną od środka ciśnieniem p , która na swym zewnętrznym obwodzie o promieniu b zamknięta jest sztywną obejmą. Mechanizm uplastycznienia takiej rury składa się z dwóch etapów. W pierwszym etapie strefa plastyczna o promieniu ξ propaguje się zgodnie z (4.32) aż do momentu, w którym ξ osiągnie wartość b . A zatem dla obszaru $a < r < \xi$ zależność przemieszczeń \bar{u} od ciśnienia \bar{p} określa wzór (4.33). Drugi etap płynięcia następuje w wyniku uplastycznienia całej rury, co zachodzi dla wartości $\bar{p} > (b/a)^{1+\lg \varphi}$. W celu określenia funkcji $\bar{u} = \bar{u}(\bar{p})$ dla tej strefy wykorzystujemy równanie (4.30), które rozwiązujemy z uwzględnieniem warunku brzegowego $u=0$ dla $r=b$; w wyniku otrzymujemy

$$(4.39) \quad ur = -\frac{1}{2\gamma}(b^2 - r^2) + \frac{\bar{p}}{(1 - \lg \varphi)\gamma} r^2 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{1+\lg \varphi} \frac{b^2}{r^2} - \left(\frac{a}{r}\right)^{1+\lg \varphi} \right].$$

Zależność przemieszczenia wewnętrznego brzegu rury od przyłożonego ciśnienia p otrzymuje się z (4.39) przyjmując $r=a$. Mamy zatem

$$(4.40) \quad \bar{u} = \frac{u_a}{a} = \frac{1}{\gamma} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1 \right] + \frac{\bar{p}}{1 - \lg \varphi} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{1-\lg \varphi} - 1 \right] \right\}.$$

Na rys. 13 przedstawiono wyniki obliczeń dla rury o $a_0/b_0 = 0,5$ i $\gamma = 1,5; 5; 10$.

5. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawione w p. 4 rozwiązania dla rury grubościennej przy pominięciu odkształceń sprężystych mają charakter jakościowy i ilustrują mechanizm odkształcania się rury przy rosnącym ciśnieniu wewnętrznym. Interesującą rzeczą jest fakt, że istnieje krytyczna wartość stosunku b/a , powyżej której obszar przylegający do brzegu wewnętrznego ulega zagęszczeniu, obszar zaś zewnętrzny rozluźnieniu. Ten fakt wynikający z rozwiązania może być łatwo poddany weryfikacji doświadczalnej.

Drugą istotną cechą, mogącą budzić pewien niepokój, jest niestateczność rozwiązań. W przypadku opadającej krzywej ciśnienie-przemieszczenie nie ma oczywiście jednoznaczności i możliwe są inne rozwiązania odpowiadające np. zlokalizowanym poślizgom wzdłuż pewnych linii nieciągłości. W pracy niniejszej przedyskutowaliśmy jedno z możliwych niestatecznych rozwiązań odpowiadające osiowo-symetrycznemu płynięciu.

Aby opisać materiał, należy znać warunek plastyczności, jego zależność od zmiennej gęstości, własności sprężyste oraz prawo płynięcia. W powyższej pracy rozpatrzyliśmy najprostszy przypadek, gdy jedna funkcja gęstości wystarcza do opisanego materiału, charakteryzującego się nieliniowym lub zlinearyzowanym warunkiem plastyczności. Tym niemniej nawet przy tak uproszczonych założeniach

napotykały na duże trudności przy analitycznym rozwiązywaniu problemów brzegowych, szczególnie przy nieliniowym warunku uplastycznienia lub przy rozpatrywaniu skończonych odkształceń.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. D. C. DRUCKER, R. E. GIBSON, D. J. HENKEL, *Soil mechanics and workhardening theories of plasticity*, Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., **122**, 338 – 346, 1957.
2. K. H. ROSCOE, H. B. POOROOSHASB, *A theoretical and experimental study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clays*, Geotechnique, **13**, 12 – 38, 1963.
3. A. W. JENIKE, R. T. SHIELD, *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*, J. Appl. Mech., **29**, 599 – 602, 1959.
4. A. С. Григорьян, *Об основных представлениях динамики грунтов*, Прикл. Мат. Мех., **24**, 1057 – 1072, 1960.
5. Z. MRÓZ, A. DRESCHER, *Limit plasticity approach to some cases of flow of bulk solids*, J. Eng. for Industry, **91**, 2, 1969.
6. W. PARISEAU, *Gravity flows of ideally plastic material through slots*, J. Eng. for Industry, **91**, 2, 414 – 423, 1969.
7. Z. MRÓZ, *On a theory of density-hardening media*, Acta Mech. (w druku).
8. P. R. PASLAY, J. P. WEIDLER, *Analysis of triaxial test for granular soils*, J. Engng. Mech. Div., Proc. ASCE, **95**, NO EM3, 587 – 609, June 1969.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЗЕРНИСТЫХ СРЕД С МАССОВЫМ УПРОЧНЕНИЕМ

Рассматривается модель зернистой среды, для которой условие пластичности зависит от напряженного состояния и от плотности, которая может изменяться, при пластическом деформировании. В зависимости от напряженного состояния, материал может упрочняться ослабляться или же вести себя как идеально пластическая среда. Выводятся конститутивные уравнения для нескольких видов функции течения. В качестве примера, исследуется пластическое течение толстостенной трубы, под действием внутреннего давления для малых и больших перемещений.

SUMMARY

SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR GRANULAR DENSITY-HARDENING MEDIA

Consideration is given to a model of a granular medium which is time-independent, elastic-plastic, with the yield condition depending on the stress state and the variable material density. Due to density variation, the initial yield surface may expand, contract or undergo more complex changes. Constitutive rate equations are derived and applied to the problem of a thick-walled tube subjected to internal pressure. Both stable and unstable behaviour is discussed assuming the axisymmetric deformation mode for large and small plastic deformations.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 czerwca 1970 r.