

## WPLYW NIELINIOWYCH CHARAKTERYSTYK ZAWIESZENIA SAMOCHODU NA KOMFORT JAZDY

ZYG M U N T P I S K O R Z (K R A K Ó W)

### WSTĘP

Spośród wielu wymagań, jakie obecnie stawia się nowoczesnym konstrukcjom pojazdów mechanicznych, należy w pierwszym rzędzie wymienić następujące:

- a) wymagania dotyczące bezpieczeństwa jazdy,
- b) wymagania dotyczące komfortu jazdy, a zatem izolacja organizmu ludzkiego przed szkodliwym oddziaływaniem drgań.

W samochodzie wymagania te powinno spełniać dobrze skonstruowane zawieszenie. Nadmienić należy, że równoczesne spełnienie obydwu wymagań znacznie komplikuje problem, ponieważ np. zwiększenie twardości resorów i amortyzatorów zwiększa bezpieczeństwo jazdy (koła nie tracą kontaktu z drogą), natomiast psuje jej komfort (większe siły są przenoszone na nadwozie a zatem i pasażera). Jeżeli chodzi o komfort jazdy, to wg badań REICHERA i MISTERA [1] organizm ludzki reaguje na zmiany częstości drgań, amplitudy przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń. Nie bez znaczenia są również zmiany okresu czasu, w którym drgania oddziałują na człowieka. Badania te doprowadziły do podziału stopnia odczuwalności drgań na sześć klas. Z przedstawionych wyników wyraźnie widać, że dopuszczalne wartości amplitud dla przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń zależą od zakresu częstości drgań. I tak np. w klasie drgań wyraźnie odczuwalnych przyspieszenia o wartości  $38 \text{ [cm/s}^2\text{]}$  przy częstości  $1 \text{ [Hz]}$  są tak samo odczuwalne jak przyspieszenia  $20 \text{ [cm/s}^2\text{]}$  przy częstości  $10 \text{ [Hz]}$ . Prędkości o wartości  $6,05 \text{ [cm/s]}$  przy częstości  $1 \text{ [Hz]}$  są tak samo odczuwalne jak prędkości  $0,318 \text{ [cm/s]}$  przy częstości  $10 \text{ [Hz]}$ . Przemieszczenia  $0,96 \text{ [cm]}$  przy częstości  $1 \text{ [Hz]}$  są tak samo odczuwalne jak przemieszczenia  $0,00505 \text{ [cm]}$  przy częstości  $10 \text{ [Hz]}$ .

Należy nadmienić, że podział na klasy odczuwalności nie uwzględnia stopnia odczuwalności drgań poszczególnych organów ciała ludzkiego. W pracy [2] podano trzy skale wrażliwości organizmu ludzkiego na zmianę przyspieszeń w zależności od częstości drgań (w palach, stopniach «K» i «Wz»). Dla skali «Wz» podano również wartości dopuszczalnych czasów przebywania w zasięgu drgań o danej amplitudzie i częstości. Wg. VDI [2] łączną wrażliwość na zmianę częstości i przyspieszeń ocenia się na podstawie wzoru

$$K = \sqrt{\sum_{i=1}^N K_i^2},$$

gdzie  $K_i$  oznacza stopień wrażliwości na zmianę wartości przyspieszenia w różnych pasmach częstotliwości.

MITSCHE [2] jako kryterium komfortu jazdy podaje minimum średniej wartości przyspieszenia:

$$\ddot{z}_{sr} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [\omega^2 a(\omega)]^2 d\omega} = \min,$$

gdzie  $a(\omega)$  jest amplitudą nierówności. Kryterium to jednak nie uwzględnia zmiany częstotliwości.

W pracy [3] sformułowano kryterium jakości zawieszenia samochodu na podstawie współczynnika odczuwalności drgań, podanego przez DIECKMANA dla drgań harmoniczných:

$$K = \begin{cases} wf^2, & \text{jeśli } f < 5 \text{ c/s,} \\ 5wf, & \text{jeśli } 5 < f < 40 \text{ c/s,} \\ 200w, & \text{jeśli } 40 < f \text{ c/s,} \end{cases}$$

gdzie  $w$  oznacza amplitudę.

Kryterium to ma następującą postać:

$$Q = \sqrt{2\pi \int_{0,3}^{40} S_z(f) a^2(f) df}.$$

Opierając się na tym kryterium (sformułowanym dla przedziału 0,3–40 [c/s]) autorzy starają się dobrać optymalne parametry zawieszenia samochodu.

Jak więc widać, do tej pory nie ma jednolitego poglądu na kwestię komfortu jazdy, ponieważ w wyżej przedstawionych kryteriach preferuje się różne czynniki decydujące o stopniu odczuwalności drgań. Brak również kryteriów uwzględniających większą ilość parametrów mających wpływ na komfort jazdy. Tak więc synteza zawieszenia samochodu, a zatem optymalny dobór jego parametrów, jest zagadnieniem trudnym, tym bardziej, że na parametry te nałożone są dodatkowe ograniczenia natury konstrukcyjnej. Sformułowanie bardziej precyzyjnego kryterium komfortu jazdy wymaga dokładniejszej analizy wpływu parametrów zawieszenia oraz dokładniejszej analizy czynników decydujących o stopniu wrażliwości na drgania. Prace teoretyczne i badawcze powinny również uwzględnić nieliniowe charakterystyki elementów zawieszenia, gdyż jak wykazano ich wprowadzenie powoduje małe wahania częstotliwości drgań przy zmianie obciążenia.

Pośród wielu prac, poświęconych zarówno analizie jak i syntezie zawieszenia samochodu, należy wymienić prace T. KASPRZYKA [4, 5 i 6], dotyczące optymalnego doboru parametrów w przypadku układu nieliniowego. Na uwagę zasługuje również monografia N. A. NIKOŁAJENKI [7], w której autor znajduje charakterystyki probabilistyczne dla nadwozia samochodu przy liniowych charakterystykach zawieszenia. Ponieważ modele przyjęte przez N. A. NIKOŁAJENKĘ dotyczyły samochodów przeznaczonych do transportu obiektów o dużych wymiarach, uwzględniono również

odkształcalność ramy. Drganiami nadwozia samochodu w ruchu nieustalonym (zmienna prędkość jazdy) zajmował się w pracy [8] E. G. GOŁOSKOKOW. Problem został rozwiązany dla układu liniowego o jednym stopniu swobody. Układami, które można by uważać jako znacznie uproszczone modele samochodu zajmowali się również S. ZIEMBA, A. RADZISZEWSKI w pracy [9] oraz A. RADZISZEWSKI, A. RÓŻYCKI w pracy [10].

Celem przedstawionej pracy jest zbadanie wpływu nieliniowych charakterystyk zawieszenia samochodu na wielkości decydujące o stopniu odczuwalności drgań przez organizm ludzki. Praca ta jest kontynuacją rozważań przeprowadzonych w pracy [11], dotyczącej wpływu rozkładu mas uresorowanych na charakterystyki probabilistyczne przemieszczeń i prędkości. W wyżej wymienionej pracy rozpatrzono nieliniowe drgania nadwozia samochodu wymuszone obciążeniem siłowym, które potraktowano jako stacjonarny proces przypadkowy, będący białym szumem o wartości średniej równej zeru. Stosując korelacyjną teorię procesów stochastycznych oraz drugą metodę statystycznej linearyzacji Bootona-Kozakowa znaleziono dyspersje dla przemieszczeń i prędkości. Następnie sporządzono ich wykresy w zależności od parametru charakteryzującego rozkład mas nadwozia.

Sformułowanie problemu jest następujące. Układ przedstawiony w pracy [11] poddano wymuszeniu kinematycznemu, pochodzącemu od nierówności drogi, które można scharakteryzować następującą funkcją korelacyjną:

$$(0.1) \quad R_{f_1}(\tau) = R_{f_2}(\tau) = \sigma_{f_1}^2 e^{-\bar{\alpha}v|\tau|} \left( \cos \bar{\beta}v\tau + \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \sin \bar{\beta}v|\tau| \right),$$

gdzie  $\sigma_{f_1}^2$  oznacza dyspersję nierówności drogi,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$  parametry charakteryzujące stan drogi oraz  $v$  stałą prędkość pojazdu.

Poszukiwać będziemy charakterystyk probabilistycznych dla przemieszczeń i prędkości względnych oraz przyśpieszeń bezwzględnych punktów nadwozia leżących nad osiami kół.

### 1. WYZNACZENIE DYSPERSJI PRZEMIESZCZEŃ I PRĘDKOŚCI WZGLĘDNYCH

Zlinearyzowane równania ruchu przedstawione w pracy [11], rozszerzone na przypadek wymuszeń kinematycznych, mają postać

$$(1.1) \quad M\ddot{Z} + B\dot{Z} + \Omega Z = P(t) \quad (1),$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$M = \begin{bmatrix} \mu_3 & \mu_1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 & 0 \\ 0 & 2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2 \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_1^2 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}_2^2 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{bmatrix};$$

(1) Ze względu na wygodę zmieniono oznaczenia w stosunku do [11].

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{l_1 l_2 - \rho^2}{L^2}, & \omega_1^2 &= \frac{2c_1}{M}, & \beta_1 \omega_1 &= \frac{\alpha_1}{M}, \\ \mu_2 &= \frac{l_1^2 + \rho^2}{L^2}, & \omega_2^2 &= \frac{2c_2}{M}, & \beta_2 \omega_2 &= \frac{\alpha_2}{M}, \\ \mu_3 &= \frac{l_2^2 + \rho^2}{L^2}, & \omega_1^{*2} &= \frac{2\tilde{c}_1}{M}, & \beta_1^* \omega_1^* &= \frac{\tilde{\alpha}_1}{M}, \\ t_0 &= \frac{L}{v}, & \omega_2^{*2} &= \frac{2\tilde{c}_2}{M}, & \beta_2^* \omega_2^* &= \frac{\tilde{\alpha}_2}{M}; \end{aligned}$$

$$\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 = \beta_1 \bar{\omega}_1 + 3\beta_1^* \omega_1^* \sigma_{z_1}^2, \quad \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2 = \beta_2 \omega_2 + 3\beta_2^* \omega_2^* \sigma_{z_2}^2,$$

$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + 3\omega_1^{*2} \sigma_{z_1}^2, \quad \bar{\omega}_2^2 = \omega_2^2 + 3\omega_2^{*2} \sigma_{z_2}^2,$$

$$P_1(t) = -\mu_3 \ddot{f}_1(t) - \mu_1 \ddot{f}_2(t+t_0), \quad P_2(t) = -\mu_1 \ddot{f}_1(t) - \mu_2 \ddot{f}_2(t+t_0).$$

We wzorach powyższych zostały wprowadzone następujące oznaczenia:

- $z_i$  przemieszczenia punktów nadwozia znajdujących się nad osiami kół,
- $c_k, \tilde{c}_k$  sztywności resorów przy części liniowej i nieliniowej,
- $\alpha_k, \tilde{\alpha}_k$  współczynniki tłumienia amortyzatorów dla części liniowej i nieliniowej,
- $M$  masa nadwozia,
- $\rho$  promień bezwładności nadwozia względem osi prostopadłej do płaszczyzny drgań podłużnych,
- $l_1, l_2, L$  odległości środka masy nadwozia od osi kół oraz rozstaw osi,
- $f_1(t), f_2(t+t_0)$  nierówności drogi.

Dyspersje przemieszczeń i prędkości względnych wyliczono z ogólnych następujących wzorów:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{z_i}^2 &= \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{n_1} \sum_{s=1}^{n_1} S_{\ddot{f}_r \ddot{f}_s}(\Omega^{(k)}) \int_{-\infty}^{\infty} H_{1r}(i\omega) H_{1s}^*(i\omega) d\omega, \\ \sigma_{z_i}^2 &= \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{n_1} \sum_{s=1}^{n_1} S_{\dot{f}_r \dot{f}_s}(\Omega^{(k)}) \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 H_{1r}(i\omega) H_{1s}^*(i\omega) d\omega, \\ & \quad l=1, 2 \end{aligned}$$

gdzie  $S_{\ddot{f}_r \ddot{f}_s}(\Omega^{(k)})$  oznacza gęstości wzajemne wymuszeń, obliczone dla częstotści rezonansowych układu oraz  $H_{1r}(i\omega)$  i  $H_{1s}^*(i\omega)$  funkcje przejścia.

Obliczenie gęstości widmowych dla częstotści rezonansowych znacznie skraca ostateczne wzory na dyspersje, nie wnosząc istotnych różnic, jeżeli tylko gęstości widmowe nie mają w tych punktach nieciągłości i ekstremów, natomiast funkcje przejścia poza tymi punktami są bliskie zera. Warunki te w układach mechanicznych, charakteryzujących się dobrymi własnościami filtrującymi, są na ogół spełnione.

Wzory na dyspersję przemieszczeń i prędkości względnych przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{z_1}^2 &= \frac{\pi}{2\bar{\omega}_1^3 N} \left( M_1 \sum_{k=1}^2 S_{\dot{f}_1}(\Omega^{(k)}) + M_2 \sum_{k=1}^2 S_{\dot{f}_1 \dot{f}_2}(\Omega^{(k)}) \right), \\
 \sigma_{z_2}^2 &= \frac{\pi}{2\bar{\omega}_2^3 N} \left( M_3 \sum_{k=1}^2 S_{\dot{f}_2}(\Omega^{(k)}) + M_4 \sum_{k=1}^2 S_{\dot{f}_1 \dot{f}_2}(\Omega^{(k)}) \right), \\
 \sigma_{\dot{z}_1}^2 &= \frac{\pi}{2\bar{\omega}_1 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) N} \left( \bar{M}_1 \sum_{k=1}^2 S_{\ddot{f}_1}(\Omega^{(k)}) + \bar{M}_2 \sum_{k=1}^2 S_{\ddot{f}_1 \ddot{f}_2}(\Omega^{(k)}) \right), \\
 \sigma_{\dot{z}_2}^2 &= \frac{\pi}{2\bar{\omega}_2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) N} \left( \bar{M}_3 \sum_{k=1}^2 S_{\ddot{f}_2}(\Omega^{(k)}) + \bar{M}_4 \sum_{k=1}^2 S_{\ddot{f}_1 \ddot{f}_2}(\Omega^{(k)}) \right),
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

gdzie poszczególne stałe mają postać

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \bar{\omega}_1^2 \{ \bar{\omega}_1 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) [(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2 + \mu_2^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] - 2\bar{\omega}_2 (\mu_2 - 2\bar{\beta}_2^2) \times \\
 &\quad \times (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) (\mu_1^2 + \mu_3^2) \} + (\mu_1^2 + \mu_3^2) \bar{\omega}_2 \{ \mu_2^2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3^2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2^3 + \\
 &\quad + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 [4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) + \mu_1^2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] \}, \\
 M_2 &= \frac{\mu_1}{\bar{\omega}_2} \{ (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) [4\mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) + \mu_1^2 \bar{\omega}_1^2] + \\
 &\quad + \mu_3 \bar{\omega}_2 [\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1^2 (\mu_1^2 - \mu_2 \mu_3) + \bar{\omega}_2 (\mu_1^2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3^2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2)] \}, \\
 M_3 &= \bar{\omega}_2^2 \{ \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) [(\mu_1^2 + \mu_3^2)^2 - \mu_3^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] - 2\bar{\omega}_1 (\mu_3 - 2\bar{\beta}_1^2) \times \\
 &\quad \times (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) (\mu_1^2 + \mu_2^2) \} + (\mu_1^2 + \mu_2^2) \bar{\omega}_1 \{ \mu_2^2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3^2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2^3 + \\
 &\quad + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 [4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) + \mu_1^2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] \}, \\
 M_4 &= \frac{\mu_1}{\bar{\omega}_1} \{ (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) [4\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2 + \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1) + \mu_1^2 \bar{\omega}_2^2] + \\
 &\quad + \mu_2 \bar{\omega}_1 [\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2^2 (\mu_1^2 - \mu_2 \mu_3) + \bar{\omega}_1 (\mu_2^2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_1^2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2)] \}, \\
 \bar{M}_1 &= \bar{\omega}_1 [(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2 + \mu_2^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] [\mu_2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2^3 + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \times \\
 &\quad \times (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] + \bar{\omega}_2^2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) (\mu_1^2 + \mu_3^2) [\bar{\omega}_2 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \\
 &\quad + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) - 2\bar{\omega}_1 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) (\mu_2 - 2\bar{\beta}_2^2)], \\
 \bar{M}_2 &= \mu_1 \bar{\omega}_2^2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) [(4\mu_3 \bar{\beta}_2^2 + \mu_1^2 - \mu_2 \mu_3) (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) \bar{\omega}_1 + \\
 &\quad + \mu_3 \bar{\omega}_2 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2)], \\
 \bar{M}_3 &= \bar{\omega}_2 [(\mu_1^2 + \mu_3^2)^2 - \mu_3^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] [\mu_2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2^3 + \\
 &\quad + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] + \bar{\omega}_1^2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) (\mu_1^2 + \mu_2^2) \times \\
 &\quad \times [\bar{\omega}_1 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) - 2\bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) (\mu_3 - 2\bar{\beta}_1^2)], \\
 \bar{M}_4 &= \mu_1 \bar{\omega}_1^2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) [(4\mu_2 \bar{\beta}_1^2 + \mu_1^2 - \mu_2 \mu_3) (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) \bar{\omega}_2 + \\
 &\quad + \mu_2 \bar{\omega}_1 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2)], \\
 N &= \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 [(\mu_2 \bar{\omega}_1^2 + \mu_3 \bar{\omega}_2^2)^2 + 4\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2 + \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1) (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \\
 &\quad + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2)] + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) \mu_1^2.
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

W przypadku, gdy  $\mu_1 = \mu_1^* = 0$ , drgania przedniej i tylnej części nadwozia stają się niezależne. Wówczas wzory (1.4) – (1.5) przyjmują następującą postać:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{z_1}^2 &= \pi \frac{S_{f_1}(\Omega) \mu_3^{*2}}{2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1^3}, & \sigma_{z_2}^2 &= \pi \frac{S_{f_2}(\Omega) \mu_2^{*2}}{2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2^3}, \\ \sigma_{z_1}^2 &= \pi \frac{S_{f_1}(\Omega) \mu_3^*}{2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1}, & \sigma_{z_2}^2 &= \pi \frac{S_{f_2}(\Omega) \mu_2^*}{2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2}. \end{aligned}$$

Dla liniowych charakterystyk zawieszenia samochodu należy we wzorach (1.6) przyjąć

$$\bar{\beta}_k = \beta_k, \quad \bar{\omega}_k = \omega_k, \quad k = 1, 2.$$

## 2. WYZNACZENIE DYSPERSJI PRZYSPIEZEŃ

Bezwzględne przemieszczenia punktów nadwozia, leżących nad osiami kół, są następujące:

$$(2.1) \quad y_1 = z_1 + f_1(t), \quad y_2 = z_2 + f_2(t).$$

Zlinearyzowany układ równań (1.1) można więc napisać w postaci

$$(2.2) \quad M \ddot{y} + B \dot{z} + \Omega z = 0, \quad \text{gdzie } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Funkcje przejścia dla przyspieszeń znajdziemy podstawiając do układu (2.2) funkcje

$$(2.3) \quad \ddot{y}_l = \hat{H}_{y_l} e^{i\omega t}, \quad z_l = H_{z_l} e^{i\omega t}, \quad l = 1, 2.$$

Po dokonaniu przekształceń otrzymujemy

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \hat{H}_{11}(i\omega) &= \frac{1}{\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2} \{ \mu_1 [2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2(i\omega) + \bar{\omega}_2^2] H_{21}(i\omega) - \\ &\quad - \mu_2 [2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1(i\omega) + \bar{\omega}_1^2] H_{11}(i\omega) \}, \\ \hat{H}_{12}(i\omega) &= \frac{1}{\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2} \{ \mu_1 [2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2(i\omega) + \bar{\omega}_2^2] H_{22}(i\omega) - \\ &\quad - \mu_2 [2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1(i\omega) + \bar{\omega}_1^2] H_{12}(i\omega) \}, \\ \hat{H}_{21}(i\omega) &= \frac{1}{\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2} \{ \mu_1 [2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1(i\omega) + \bar{\omega}_1^2] H_{11}(i\omega) - \\ &\quad - \mu_3 [2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2(i\omega) + \bar{\omega}_2^2] H_{21}(i\omega) \}, \\ \hat{H}_{22}(i\omega) &= \frac{1}{\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2} \{ \mu_1 [2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1(i\omega) + \bar{\omega}_1^2] H_{12}(i\omega) - \\ &\quad - \mu_3 [2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2(i\omega) + \bar{\omega}_2^2] H_{22}(i\omega) \}, \end{aligned}$$

gdzie  $H_{kl}(i\omega)$  ( $k, l=1, 2$ ) są funkcjami przejścia dla przemieszczeń o postaci

$$\begin{aligned}
 H_{11}(i\omega) &= \frac{1}{\Delta(i\omega)} [(\mu_1^2 - \mu_2 \mu_3) (i\omega)^2 - \mu_3 (2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2(i\omega) + \bar{\omega}_2^2)], \\
 H_{12}(i\omega) &= -\frac{\mu_1}{\Delta(i\omega)} [2\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2(i\omega) + \bar{\omega}_2^2], \\
 (2.5) \quad H_{21}(i\omega) &= -\frac{\mu_1}{\Delta(i\omega)} [2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1(i\omega) + \bar{\omega}_1^2], \\
 H_{22}(i\omega) &= \frac{1}{\Delta(i\omega)} [(\mu_1^2 - \mu_2 \mu_3) (i\omega)^2 - \mu_2 (2\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1(i\omega) + \bar{\omega}_1^2)], \\
 \Delta(i\omega) &= (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) (i\omega)^4 + 2(\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) (i\omega)^3 + \\
 &\quad + (\mu_2 \bar{\omega}_1^2 + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 + \mu_3 \bar{\omega}_2^2) (i\omega)^2 + 2\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2 + \\
 &\quad + \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1) (i\omega) + \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2.
 \end{aligned}$$

Dyspersje dla przyśpieszeń znajdziemy z ogólnej formuły

$$(2.6) \quad \sigma_{y_l}^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^{n_1} \sum_{s=1}^{n_1} S_{j_r j_s}^{(k)}(\Omega^{(k)}) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_{lr}(i\omega) \hat{H}_{ls}^*(i\omega) d\omega, \quad l=1, 2.$$

Obliczenie tych dyspersji nie nastęrcza praktycznie żadnych trudności, gdyż w monografiach [12, 13 i 14] podane są wartości całek typu

$$(2.7) \quad I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h_n(i\omega)}{\Delta(i\omega) \Delta^*(i\omega)} d\omega,$$

gdzie trzeba znać jedynie współczynniki wielomianów

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad \Delta(i\omega) &= a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n, \\
 h_n(i\omega) &= b_0 (i\omega)^{2n-2} + b_1 (i\omega)^{2n-4} + \dots + b_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Dla naszego problemu mamy  $m=2, n_1=2, n=4$ .

Na podstawie ostatniego ze związków (2.5) współczynniki wielomianu  $\Delta(i\omega)$  są następujące:

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad a_0 &= \mu_2 \mu_3 - \mu_1^2, \\
 a_1 &= 2(\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2), \\
 a_2 &= \mu_2 \bar{\omega}_1^2 + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 + \mu_3 \bar{\omega}_2^2, \\
 a_3 &= 2\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2 + \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1), \\
 a_4 &= \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2.
 \end{aligned}$$

Po obliczeniu kwadratów modułów funkcji przejścia (2.4) oraz iloczynów  $\hat{H}_{1r} \hat{H}_{1s}^*$  ( $l, r, s = 1, 2; r \neq s$ ) możemy napisać współczynniki wielomianów  $h_n$ :

$$\begin{aligned}
 \hat{b}_0^{(11)} &= -4\mu_2^2 \bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_1^2, & \hat{b}_1^{(11)} &= 8\bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 (2\bar{\beta}_2^2 - \mu_2) + \mu_2^2 \bar{\omega}_1^4, \\
 \hat{b}_2^{(11)} &= 2\bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 [\mu_2 \bar{\omega}_1^2 - 2(\bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_2^2 + \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_1^2)], & \hat{b}_3^{(11)} &= 0, & \hat{b}_0^{(12)} &= -4\mu_1^2 \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_2^2, \\
 \hat{b}_1^{(12)} &= \mu_1^2 \bar{\omega}_2^4, & \hat{b}_2^{(12)} &= \hat{b}_3^{(12)} = 0, & \hat{b}_0^{(21)} &= -4\mu_1^2 \bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_1^2, & \hat{b}_1^{(21)} &= \mu_1^2 \bar{\omega}_1^4, \\
 \hat{b}_2^{(21)} &= \hat{b}_3^{(21)} = 0, & \hat{b}_0^{(22)} &= -4\mu_3^2 \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_2^2, & \hat{b}_1^{(22)} &= 8\bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 (2\bar{\beta}_1^2 - \mu_3) + \mu_3^2 \bar{\omega}_2^4, \\
 \hat{b}_2^{(22)} &= 2\bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 [\mu_3 \bar{\omega}_2^2 - 2(\bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_2^2 + \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_1^2)], & \hat{b}_3^{(22)} &= 0, \\
 \hat{b}_0^{(11, 12)} &= 8\mu_1 \mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2, & \hat{b}_1^{(11, 12)} &= 2\mu_1 \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 (4\bar{\beta}_2^2 - \mu_2), \\
 \hat{b}_2^{(11, 12)} &= -2\mu_1 \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^4, & \hat{b}_3^{(11, 12)} &= 0, & \hat{b}_0^{(21, 22)} &= 8\mu_1 \mu_3 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2, \\
 \hat{b}_1^{(21, 22)} &= 2\mu_1 \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 (4\bar{\beta}_1^2 - \mu_3), & \hat{b}_2^{(21, 22)} &= -2\mu_1 \bar{\omega}_2^2 \bar{\omega}_1^4, & \hat{b}_3^{(21, 22)} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Obliczenie wszystkich dyspersji sprowadza się ostatecznie do znalezienia wartości całek  $I_4$  o ogólnej postaci:

$$I_4 = \frac{(a_1 a_4 - a_2 a_3) a_4 b_0 + a_0 a_3 a_4 b_1 - a_0 a_1 a_4 b_2 + a_0 (a_1 a_2 - a_0 a_3) b_3}{2a_0 a_4 (a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2)}.
 \tag{2.11}$$

Wykorzystując wzory (2.6), (2.9), (2.10) i (2.11) otrzymamy następujące wzory na dyspersje przyspieszeń:

$$\sigma_{y_1}^2 = \frac{\pi}{2\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2)^3 N} \left( \hat{M}_1 \sum_{k=1}^2 S_{j_1}^*(\Omega^{(k)}) + \hat{M}_2 \sum_{k=2}^2 S_{j_1 j_2}^*(\Omega^{(k)}) \right),
 \tag{2.12}$$

oraz

$$\sigma_{y_2}^2 = \frac{\pi}{2\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2)^3 N} \left( \hat{M}_3 \sum_{k=1}^2 S_{j_2}^*(\Omega^{(k)}) + \hat{M}_4 \sum_{k=1}^2 S_{j_1 j_2}^*(\Omega^{(k)}) \right),
 \tag{2.13}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 \hat{M}_1 &= 4\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 [\mu_2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2^3 + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] \times \\
 &\quad \times \{ \mu_2^2 \bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_1^2 [(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2 + \mu_2^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] + \mu_1^2 \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_2^2 [(\mu_1^2 + \mu_3^2)^2 - \\
 &\quad - \mu_3^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] \} + (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) \{ \bar{\omega}_1^2 [(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2 + \\
 &\quad + \mu_2^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] (16\bar{\beta}_1^2 \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_2^2 + \mu_2^2 \bar{\omega}_1^2) + \mu_1^2 \bar{\omega}_2^4 [(\mu_1^2 + \mu_3^2)^2 - \mu_3^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] - \\
 &\quad - 8\bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 [\mu_2^3 (\mu_1^2 + \mu_3^2) \bar{\beta}_1^2 + \mu_3 \mu_1^2 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \bar{\beta}_2^2] \} + (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) \times \\
 &\quad \times (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) \{ 2[\mu_1^2 + \mu_2^2]^2 + \mu_2^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2) \} (\bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_2^2 + \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_1^2) - \\
 &\quad - \mu_2^3 (\mu_1^2 + \mu_3^2) \bar{\omega}_1^2 - \mu_1^2 \mu_3 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \bar{\omega}_2^2 \} + \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) \times \\
 &\quad \times [(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2 + \mu_2^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] \{ \mu_2^2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3^2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2^3 + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \times \\
 &\quad \times [4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) + \mu_1^2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] \},
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$



$$\begin{aligned}
 (2.14) \quad \overset{[c. d.]}{\tilde{M}_2} &= \mu_1 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2)^3 \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 \{ (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) \bar{\omega}_2 [\bar{\omega}_1 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) (4\bar{\beta}_2^2 - \mu_2) + \\
 &\quad + \bar{\omega}_2 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2)] - 4\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 [\mu_2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2^3 + \\
 &\quad + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] \}, \\
 \tilde{M}_3 &= 4\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 [\mu_2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2^3 + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] \times \\
 &\quad \times \{ \mu_1^2 \bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_1^2 [(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2 + \mu_2^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] + \mu_3^2 \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_2^2 [(\mu_1^2 + \mu_3^2)^2 - \\
 &\quad - \mu_3^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] \} + (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) \times \\
 &\quad \times \{ \bar{\omega}_2^2 [(\mu_1^2 + \mu_3^2)^2 - \mu_3^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] (16\bar{\beta}_1^2 \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_1^2 + \mu_3^2 \bar{\omega}_2^2) + \mu_1^2 \bar{\omega}_1^4 \times \\
 &\quad \times [(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2 + \mu_2^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] - 8\bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 [\mu_2 \mu_1^2 (\mu_1^2 + \mu_3^2) \bar{\beta}_1^2 + \\
 &\quad + \mu_3^3 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \bar{\beta}_2^2] \} + (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) \{ 2 [\mu_1^2 + \mu_3^2]^2 - \\
 &\quad - \mu_3^2 (\mu_3^2 - \mu_1^2) (\bar{\beta}_1^2 \bar{\omega}_2^2 + \bar{\beta}_2^2 \bar{\omega}_1^2) - \mu_2 \mu_1^2 (\mu_1^2 + \mu_3^2) \bar{\omega}_1^2 - \mu_3^3 (\mu_1^2 + \mu_2^2) \bar{\omega}_2^2 \} + \\
 &\quad + \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) [(\mu_1^2 + \mu_3^2)^2 - \mu_3^2 (\mu_3^2 - \mu_2^2)] \{ \mu_2^2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1^3 + \mu_3^2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2^3 + \\
 &\quad + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 [4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2) + \mu_1^2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] \}, \\
 \tilde{M}_4 &= \mu_1 (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2)^3 \bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2 \{ (\mu_2 \mu_3 - \mu_1^2) \bar{\omega}_1 [\bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2) (4\bar{\beta}_1^2 - \mu_3) + \\
 &\quad + \bar{\omega}_1 (\mu_2 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_1 + \mu_3 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_2)] - 4\mu_3 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 [\mu_2 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1^3 + \\
 &\quad + \mu_3 \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2^3 + 4\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 (\bar{\beta}_2 \bar{\omega}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{\omega}_2)] \}.
 \end{aligned}$$

W przypadku gdy układ przekształca się w układ równań niezależnych, co zachodzi dla  $\mu_1 = \mu_1^* = 0$ , otrzymujemy

$$(2.15) \quad \sigma_{y_1}^2 = \pi \frac{S_{\ddot{y}_1}(\Omega) \bar{\omega}_1 (4\bar{\beta}_1^2 + \mu_3^*)}{2\bar{\beta}_1 \mu_3^*}, \quad \sigma_{y_2}^2 = \pi \frac{S_{\ddot{y}_2}(\Omega) \bar{\omega}_2 \mu_3^* (4\bar{\beta}_2^2 + \mu_2^*)}{2\bar{\beta}_2 \mu_2^*}.$$

Dla liniowych charakterystyk zawieszenia należy podobnie jak dla przemieszczeń i prędkości przyjąć

$$\bar{\omega}_k = \omega_k, \quad \bar{\beta}_k = \beta_k, \quad k = 1, 2.$$

Obliczenie dyspersji przyśpieszeń ze wzorów (2.12) i (2.13) lub (2.15) wymaga wcześniejszego znalezienia dyspersji przemieszczeń i prędkości. Te zaś da się efektywnie wyliczyć tylko w przypadku, gdy drgania przedniej i tylnej części nadwozia stają się drganiami od siebie niezależnymi (wzory (1.10) i (1.11)). W przypadku ogólnym, po napisaniu wzorów (1.5) – (1.8) w postaci wyraźnej, otrzymujemy nieliniowy układ równań algebraicznych na dyspersje  $\sigma_{z_1}^2$ ,  $\sigma_{z_2}^2$ , który może być rozwiązany na maszynie cyfrowej. Dla przypadku najprostszego, tj. dla układu równań niezależnych i liniowych, wzory (1.10) i (1.11) (z podstawieniem  $\bar{\omega}_k = \omega_k$ ,  $\bar{\beta}_k = \beta_k$ ) są podobne do wzorów otrzymanych przez CRANDALLA w pracy [15].

Przeprowadzenie konkretnych obliczeń dyspersji wg wzorów (1.10), (1.11) i (2.15) wymaga znajomości gęstości widmowych  $S_{\ddot{y}_1}(\omega)$ ,  $S_{\ddot{y}_2}(\omega)$  i  $S_{\dot{y}_1, \dot{y}_2}(\omega)$ . Procesy

o funkcjach korelacyjnych danych wzorem (0.1) są procesami jednokrotnie różniczkowalnymi, a zatem gęstości widmowe dla procesów  $\dot{f}_1(t)$  i  $\dot{f}_2(t+t_0)$  nie istnieją. W pracy [7] autor krótko omawia metodę Bunimowicza, pozwalającą formalnie wyliczyć funkcje korelacyjne i gęstości widmowe dla procesów nieróżniczkowalnych. Na podstawie tej metody dla procesów  $\dot{f}_1(t)$ ,  $\dot{f}_2(t+t_0)$ ,  $\ddot{f}_1(t)$  i  $\ddot{f}_2(t+t_0)$  można otrzymać następujące funkcje korelacyjne i gęstości widmowe:

$$\begin{aligned}
 R_{\dot{f}_1}(\tau) &= R_{\dot{f}_2}(\tau) = \sigma_{\dot{f}_1}^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^2 e^{-\bar{\alpha}v|\tau|} \left( \cos \bar{\beta}v\tau - \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \sin \bar{\beta}v|\tau| \right), \\
 (2.16) \quad S_{\dot{f}_1}(\omega) &= S_{\dot{f}_2}(\omega) = \sigma_{\dot{f}_1}^2 \frac{2\bar{\alpha}(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) \omega^2 v^3}{[\omega^4 + 2(\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \omega^2 v^2 + (\bar{\alpha} + \bar{\beta}^2)^2 v^4] \pi}, \\
 R_{\ddot{f}_1}(\tau) &= R_{\ddot{f}_2}(\tau) = \sigma_{\ddot{f}_1}^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) (5\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^4 e^{-\bar{\alpha}v|\tau|} (\cos \bar{\beta}v\tau + \bar{\mu} \sin \bar{\beta}v|\tau|), \\
 S_{\ddot{f}_1}(\omega) &= S_{\ddot{f}_2}(\omega) = \sigma_{\ddot{f}_1}^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) (5\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^5 \times \\
 &\quad \times \frac{(\bar{\alpha} - \bar{\mu}\bar{\beta}) \omega^2 + (\bar{\alpha} + \bar{\mu}\bar{\beta}) (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^2}{[\omega^4 + 2(\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \omega^2 v^2 + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)^2 v^4] \pi}
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{\mu} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \frac{1 - 3 \left( \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right)^2}{1 + 5 \left( \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \right)^2}.$$

Korelacje i gęstości wzajemne dane są za pomocą wzorów

$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad R_{\dot{f}_1 \dot{f}_2}(\tau) &= \sigma_{\dot{f}_1}^2 e^{-\bar{\alpha}v|\tau-t_0|} [\cos \bar{\beta}v(\tau-t_0) + \bar{\mu} \sin \bar{\beta}v|\tau-t_0|], \\
 S_{\dot{f}_1 \dot{f}_2}(\omega) &= \sigma_{\dot{f}_1}^2 v \frac{(\bar{\alpha} - \bar{\mu}\bar{\beta}) \omega^2 + (\bar{\alpha} + \bar{\mu}\bar{\beta}) (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^2}{[\omega^4 + 2(\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \omega^2 v^2 + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)^2 v^4] \pi}.
 \end{aligned}$$

Dla  $\tau=0$  ze wzorów (2.16), (2.18), (2.20) otrzymujemy odpowiednie dyspersje:

$$\begin{aligned}
 (2.18) \quad \sigma_{\dot{f}_1}^2 &= \sigma_{\dot{f}_1}^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^2, \\
 \sigma_{\dot{f}_2}^2 &= \sigma_{\dot{f}_1}^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) (5\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^4, \\
 \sigma_{\dot{f}_1 \dot{f}_2}^2 &= \sigma_{\dot{f}_1}^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) (5\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^4 e^{-\bar{\alpha}v|t_0|} (\cos \bar{\beta}vt_0 + \bar{\mu} \sin \bar{\beta}v|t_0|).
 \end{aligned}$$

Na podstawie związków (2.21) i (2.24) gęstość wzajemna wymuszeń przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad S_{\dot{f}_1 \dot{f}_2}(\omega) &= \sigma_{\dot{f}_1}^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) (5\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^5 e^{-\bar{\alpha}v|t_0|} (\cos \bar{\beta}vt_0 + \bar{\mu} \sin \bar{\beta}v|t_0|) \times \\
 &\quad \times \frac{(\bar{\alpha} - \bar{\mu}\bar{\beta}) \omega^2 + (\bar{\alpha} + \bar{\mu}\bar{\beta}) (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) v^2}{[\omega^4 + 2(\bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) \omega^2 v^2 + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)^2 v^4] \pi}.
 \end{aligned}$$

3. INTERPRETACJA GRAFICZNA WZORÓW (1.10), (1.11) i (2.15)

Do przeprowadzenia obliczeń przyjęto następujące dane:

$$M\rho^2 = 22800 \text{ [kG cms}^2\text{]}, \quad c_1 = 25 \text{ [kG/cm]}, \quad \alpha_1 = 0,8 \text{ [kGs/cm]},$$

$$l_1 = 142 \text{ [cm]}, \quad l_2 = 128 \text{ [cm]}, \quad L = l_1 + l_2 = 270 \text{ [cm]}, \quad M = 1,52 \text{ [kG s}^2\text{/cm]},$$

$$\sigma_{f_1}^2 = 25 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad \bar{\alpha} = 0,11 \text{ [m}^{-1}\text{]}, \quad \bar{\beta} = 0,14 \text{ [m}^{-1}\text{]}.$$

Drgania przedniej i tylnej części nadwozia stają się od siebie niezależne przy parametrach

$$\mu_1^* = 0, \quad \mu_2^* = 0,59, \quad \mu_3^* = 0,41.$$

Kwadrat modułu funkcji przejścia dla układu liniowego rozprężonego ma postać

$$(3.1) \quad |H(i\omega)|^2 = \frac{\mu_2^{*2}}{(\omega_1^2 - \mu_3^* \omega^2)^2 + 4\beta_1^2 \omega_1^2 \omega^2}.$$

Stąd częstość rezonansowa wynosi

$$(3.2) \quad \Omega^2 \cong \frac{\omega_1^2}{\mu_3^*} = 80,07 \text{ [s}^{-2}\text{]};$$

charakterystyki filtra

$$(3.3) \quad \eta_1 = \frac{|H(i\Omega)|^2}{|H(0)|^2} = \frac{\mu_3^*}{4\beta_1^2} = 12,2;$$

szerokość pasma przepuszczania

$$(3.4) \quad \Delta\omega = \frac{\int_0^\infty |H(i\omega)|^2}{|H(i\Omega)|^2} = \pi \frac{\beta_1 \omega_1}{\mu_3^*} = 4,03 \text{ [s}^{-1}\text{]};$$

charakterystyka gęstości widmowej

$$(3.5) \quad \eta_2 = \frac{S_{\ddot{y}_1}(0)}{S_{\ddot{y}_1}(\Omega)},$$

$$v = 75 \text{ [km/h]}, \quad \eta_2 = 3,57; \quad v = 80 \text{ [km/h]}, \quad \eta_2 = 2,36;$$

$$v = 100 \text{ [km/h]}, \quad \eta_2 = 1,6; \quad v = 120 \text{ [km/h]}, \quad \eta_2 = 1,12.$$

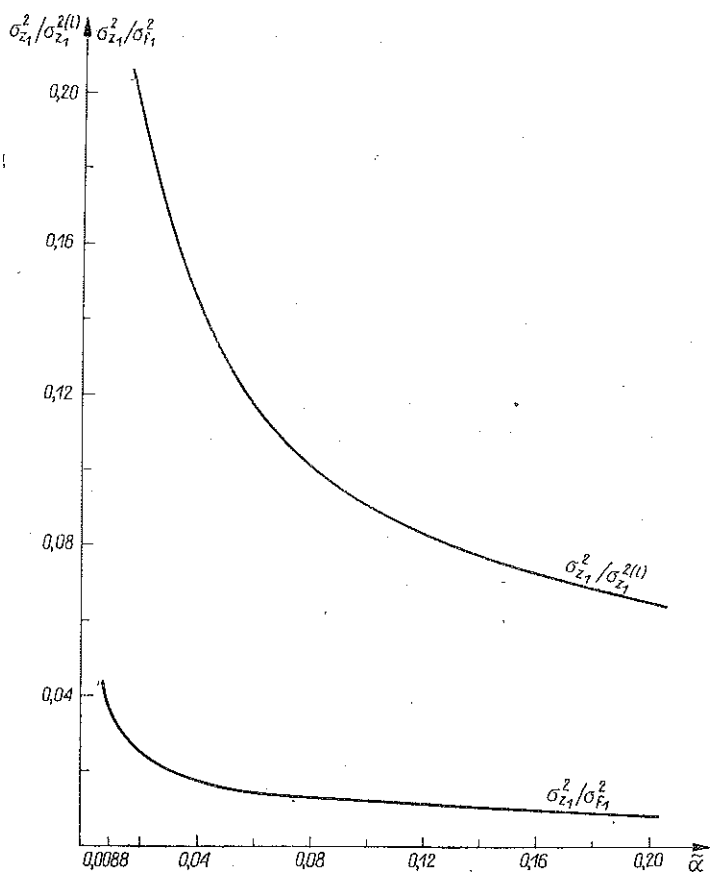
Dla przyjętych danych gęstość widmową można napisać następująco:

$$(3.6) \quad S_{\ddot{y}_1}(\Omega) = S_{\ddot{y}_2}(\Omega) = 0,125 v^5 \frac{10,64 + 0,0027v^2}{2\pi(6411 - 1,2v^2 + 0,001v^4)}.$$

## 3.1. Wpływ nieliniowego tłumienia

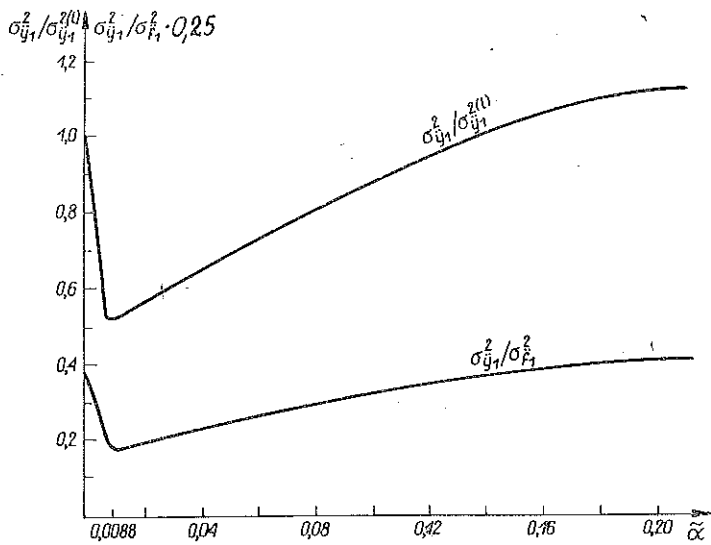
W przypadku nieliniowego tłumienia, tj. dla  $\bar{\omega}_k = \omega_k$ , wzory (1.10), (1.11) i (2.15) sprowadzają się do postaci

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{z_1}^2 &= \frac{\sqrt{\beta_1^2 \omega_1^2 + 6\pi S_{j_1}^2(\Omega) \mu_3^* \beta_1^* \omega_1^* - \beta_1 \omega_1}}{6\beta_1^* \omega_1^*}, \\ \sigma_{z_1}^2 &= \frac{\pi S_{j_1}^2(\Omega) \mu_3^{*2}}{2\omega_1^2 (\beta_1 \omega_1 + 3\beta_1^* \omega_1^* \sigma_{z_1}^2)}, \\ \sigma_{y_1}^2 &= \frac{\pi^2 S_{j_1}^2(\Omega) \mu_3^* + \omega_1^2 \sigma_{z_1}^4}{\mu_3^* \sigma_{z_1}^2}. \end{aligned}$$

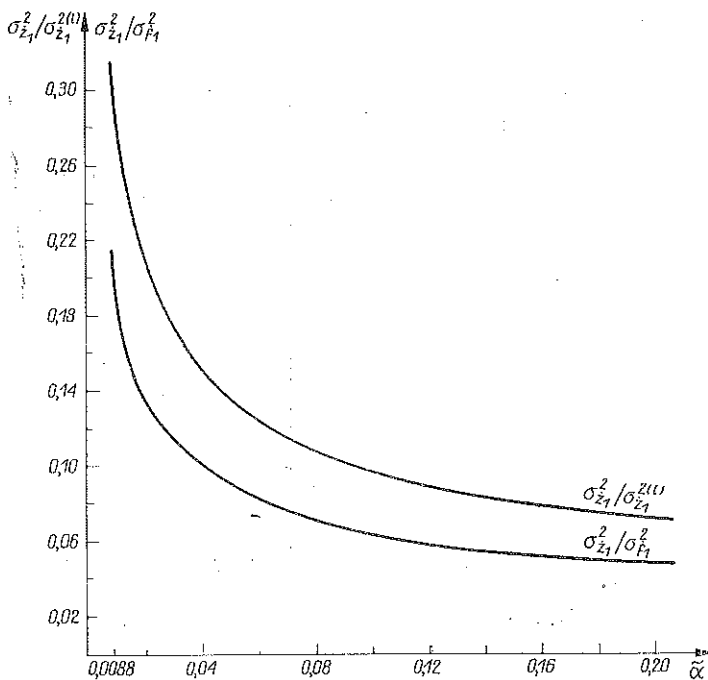


Rys. 1

Na rys. 1, 2 i 3 sporządzono wykresy bezwymiarowych wielkości w zależności od współczynnika charakteryzującego wielkość nieliniowego tłumienia. Mają one charakter współczynników wzmocnienia amplitud przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń układu nieliniowego w stosunku do odpowiednich wielkości dla



Rys. 2



Rys. 3

układu liniowego lub też w stosunku do tych samych wielkości, ale pochodzących od wymuszenia kinematycznego. Wykresy zostały sporządzone dla prędkości 80 [km/h]. Dla orientacji podano również wartości mianowników odpowiednich ilorazów:

$$\sigma_{f_1}^2 = 25 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad \sigma_{f_1}^2 = 391,3 \text{ [cm}^2\text{/s}^2\text{]}, \quad \sigma_{f_1}^2 = 15235 \text{ [cm}^2\text{/s}^4\text{]}, \quad S_{f_1} = 1337 \text{ [cm}^2\text{/s}^3\text{]},$$

$$\sigma_{z_1}^{2(0)} = 20,3 \text{ [cm}^2\text{]}, \quad \sigma_{z_1}^{2(1)} = 1634 \text{ [cm}^2\text{/s}^2\text{]}, \quad \sigma_{y_1}^{2(1)} = 34358 \text{ [cm}^2\text{/s}^4\text{]}.$$

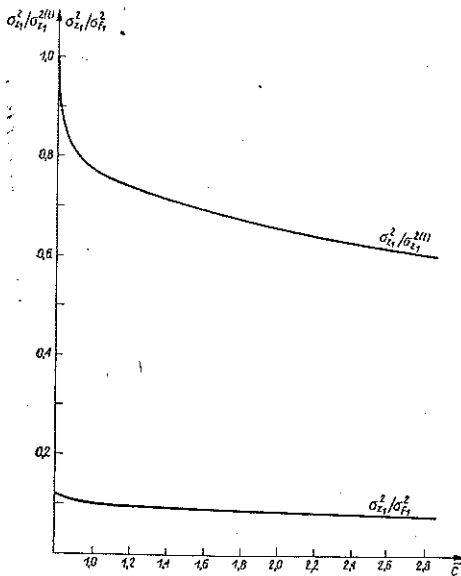
### 3.2. Wpływ nieliniowych charakterystyk resorów

Dla układu z nieliniowymi charakterystykami resorów, tj. dla  $\bar{\beta}_k = \beta_k$ , wzory (1.10), (1.11) i (2.15) przyjmują następującą postać:

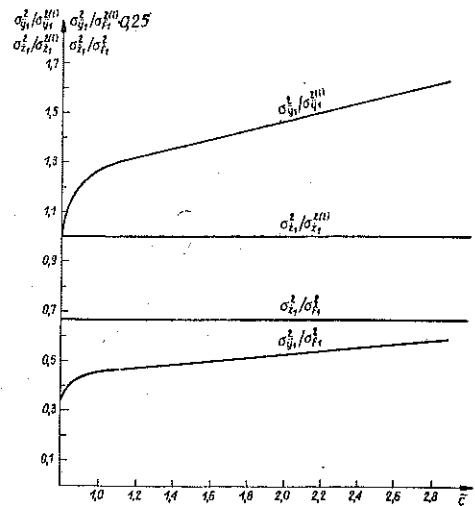
$$(3.8) \quad \sigma_{z_1}^2 = \frac{\pi S_{f_1}^2(\Omega) \mu_3^*}{2\beta_1 \omega_1},$$

$$\sigma_{z_1}^2 = \frac{\sqrt{\omega_1^4 + 12\mu_3^* \omega_1^{*2} \sigma_{z_1}^2 - \omega_1^2}}{6\omega_1^{*2}},$$

$$\sigma_{y_1}^2 = \frac{\pi^2 S_{f_1}^2(\Omega) \mu_3^* + (\omega_1^2 + 3\omega_1^{*2} \sigma_{z_1}^2) \sigma_{z_1}^4}{\mu_3^* \sigma_{z_1}^2}.$$



Rys. 4



Rys. 5

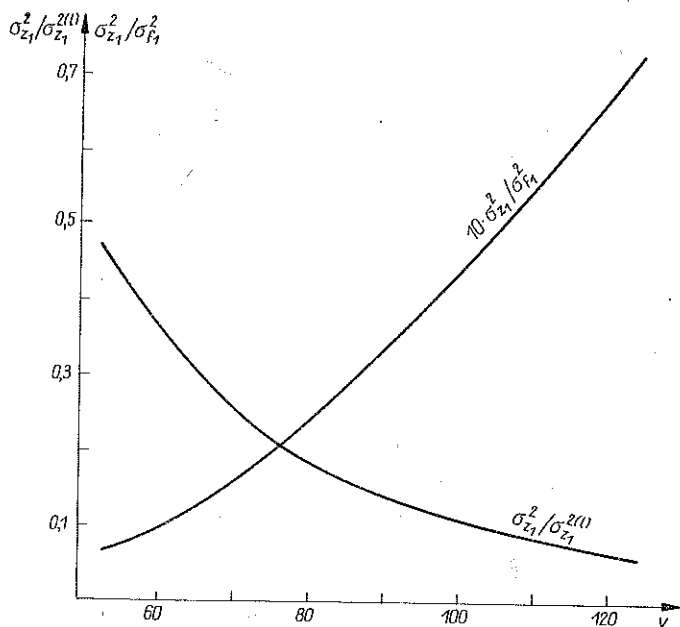
Na rys. 4 i 5 przedstawione są wykresy stosunków dyspersji przemieszczeń prędkości i przyspieszeń w zależności od współczynnika charakteryzującego wielkość nieliniowości. Wykresy sporządzono również dla prędkości 80 [km/h].

### 3.3. Wpływ zmiany prędkości

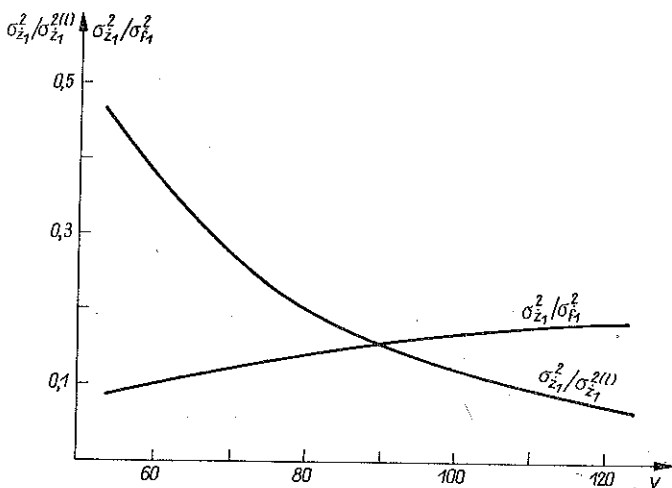
Wykresy odpowiednich stosunków dyspersji przedstawione na rys. 6, 7 i 8 sporządzono dla zawieszenia posiadającego nieliniowe charakterystyki resorów i amortyzatorów przy ustalonych parametrach:

$$\tilde{c}_1 = 1,0 \text{ [kG/cm}^3\text{]}, \quad \tilde{\alpha}_1 = 0,02 \text{ [kG s}^3\text{/cm}^3\text{]}.$$

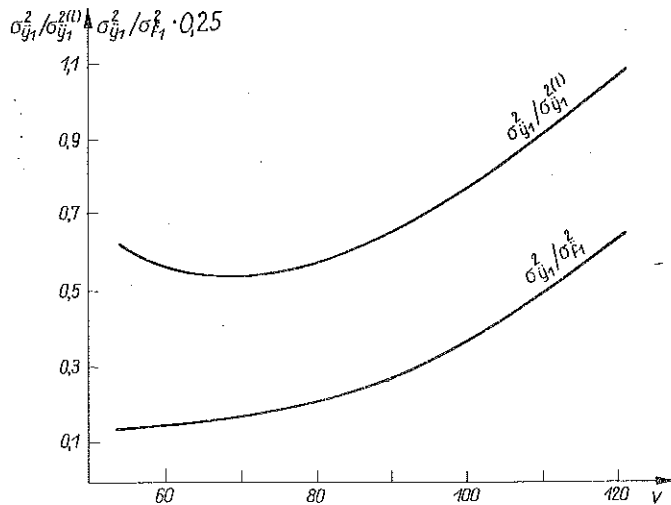
W tym przypadku mają zastosowanie wzory (3.7), (3.11) i (3.12).



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

## 4. WNIOSKI

Na podstawie wykresów przedstawionych na rys. 1, 2 i 3 można stwierdzić, że wprowadzenie do układu nieliniowego tłumienia jest korzystne. Wprawdzie dla  $\tilde{\alpha}_1 > 0,14$  przyspieszenia rosną w stosunku do układu liniowego, ale ich wzrost jest mniejszy niż zmniejszanie się amplitud przemieszczeń i prędkości. Na rys. 1 i 2 ze względu na skalę nie udało się pokazać wartości odpowiednich stosunków dyspersji przemieszczeń i prędkości dla tłumienia, przy którym dyspersje przyspieszeń osiągną minimum. Wartości tych stosunków wynoszą odpowiednio:

$$\frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{f_1}^2} = 0,0356, \quad \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^{2(l)}} = 0,2753, \quad \frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{f_1}^2} = 0,1927,$$

$$\frac{\sigma_{z_1}^2}{\sigma_{z_1}^{2(l)}} = 0,2899, \quad \frac{\sigma_{y_1}^2}{\sigma_{f_1}^2} = 0,1900, \quad \frac{\sigma_{y_1}^2}{\sigma_{y_1}^{2(l)}} = 0,5294.$$

Z przedstawionych wyników widać, że przy parametrze  $0 \leq \tilde{\alpha}_1 \leq 0,14$  układ z nieliniowym tłumieniem jest zdecydowanie lepszy od układu liniowego.

Z wykresów przedstawionych na rys. 4 i 5 również widać korzystny wpływ nieliniowych charakterystyk resorów. Wprowadzenie nieliniowości do resorów powoduje wprawdzie zwiększenie amplitud dla przyspieszeń, ale powoduje również szybki spadek wartości amplitud dla przemieszczeń. Amplitudy dla prędkości są takie same jak dla układu liniowego, gdyż wyraz nieliniowy nie ma na nie wpływu. Analizując wykresy przedstawione na rys. 6, 7 i 8 wyraźnie widać, że wprowadzenie nieliniowych charakterystyk resorów i amortyzatorów jest tym korzystniejsze, im większa jest prędkość pojazdu. Można również zauważyć, że jednoczesne wprowadzenie



dzenie nieliniowych charakterystyk resorów i amortyzatorów jest korzystniejsze, niż gdyby występowały one oddzielnie. Reasumując należy stwierdzić, że przedstawiony układ z równocześnie nieliniowymi charakterystykami resorów i amortyzatorów jest dla prędkości  $v \leq 115$  [km/h] korzystniejszy od układu liniowego.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. MINCHEJMER, *Teoria ruchu samochodów*, PWN, Warszawa 1960.
2. H. JOHN, *Untersuchungen am hydraulischen zweirohrdampfer*, VEB Wissenschaftlich-Technisches Zentrum Automobilbau, Heft 6, 1970.
3. VII Polsko-Czechosłowacka Konferencja Dynamiki Maszyn T. 1, Gliwice 1971.
4. T. KASPRZYK, *Ocena możliwości polepszenia nieregulowanego zawieszenia samochodu przez zastosowanie elementu sprężystego, zapewniającego stałą częstość drgań swobodnych masy*, Biul. WAT, Nr. 10, 1965.
5. T. KASPRZYK, *O możliwości doboru parametrów nieliniowego zawieszenia pojazdu mechanicznego metodą analityczną*, Biul. WAT, Nr. 10, 1965.
6. T. KASPRZYK, *Drgania samochodu przy nieliniowych charakterystykach sprężystych zawieszenia, nieliniowym tłumieniu i wymuszeniu losowym*, Biul. WAT, Nr 2, 1968.
7. Н. А. Николаенко, *Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкции*, Машиностроение, Москва 1967.
8. Е. Г. Голоскоков, Н. Е. Исаков, *Переход через резонанс динамической системы при случайном воздействии*, Динамика и Прогнозность Машин, Изд. Харьковского Университета А. М. Горького, вып. 14, Харьков 1971.
9. В. RADZISZEWSKI, S. ZIEMBA, *Колебания системы с двумя степенями свободы при случайных воздействиях*, Динамика Машин, Машиностроение, 1969.
10. В. RADZISZEWSKI, А. RÓŻYŃSKI, *Układ o dwóch stopniach swobody jako dynamiczny izolator drgań*, Mech. Teoret. Stos., 6, 1, 1968.
11. Płaca [3], T. 2, str. 252.
12. Н. А. Лявшиц, В. Н. Пугачев, *Вероятностный анализ систем автоматического управления*, Т. 1, Советское Радио, Москва 1933.
13. *Нелинейные САУ, Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления*, Машиностроение, Москва 1970.
14. *Техническая кибернетика, Теория автоматического регулирования*, Книга 2, Машиностроение, Москва 1967.
15. S. H. CRANDAL, W. D. MARK, *Random vibration in mechanical system*, Academic Press, New York and London 1963.

#### Резюме

### ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ НА УДОБСТВО ЕЗДЫ

В работе исследовано влияние нелинейных характеристик подвески автомобиля на дисперсии перемещений, скоростей и ускорений, необходимых для формулировки критерия удобства езды и оптимального подбора параметров подвески.

Исследуемая система была подвержена кинематическому вынуждению, возникающему от неровностей дороги и характеризуемому заданием корреляционной функции. При помощи корреляционной теории стохастических процессов получены соответствующие дисперсии для системы с двумя степенями свободы, а в случае несопряженности колебаний — для системы с одной степенью свободы. В заключении составлены графики отношений соответствующих дисперсий для линейной и нелинейной систем.

## SUMMARY

INFLUENCE OF NONLINEAR CHARACTERISTICS OF CAR SUSPENSION  
ON THE RIDE COMFORT

In the paper is analyzed the influence of the car suspension characteristics on the dispersion of displacements, velocities and accelerations. Knowledge of these factors is necessary in formulating the criteria of the ride comfort and optimum selection of the suspension parameters. The kinematic forcing of the system investigated is produced by the roughness of the road surface characterized by a correlation function. Applying the correlation theory of stochastic processes the corresponding dispersions for a system with two degrees of freedom are obtained, and in the case of uncoupled vibration — for a system with a single degree of freedom. The graphs of ratios of the corresponding dispersion of linear and nonlinear systems are finally given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 marca 1972 r.*

---