

FAŁA AKUSTYCZNA W CYLINDRZE ODKSZTAŁCONYM W SPOSÓB SKOŃCZONY

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI (WARSZAWA)

Dotychczasowe rozwiązania propagacji fal sprężystych dotyczą liniowego materiału jednorodnego. Znany jest warunek propagacji nieciągłości przy odkształceniach skończonych, lecz nie ma dotąd żadnych rozwiązań poza przypadkiem, kiedy materiał i powstałe w nim odkształcenia są jednorodne. W niniejszej pracy analizuje się przypadek, kiedy wstępne odkształcenie jest niejednorodne. Prowadzi to do deformowania się powierzchni nieciągłości w czasie i w konsekwencji do skupiania lub rozpraszania promieni akustycznych. Zjawisko to powoduje, że możliwe jest zbudowanie soczewki akustycznej. Zdolność skupiająca takiej soczewki jest ciągłą funkcją wstępnego odkształcenia. Jeśli wstępnego odkształcenia nie ma, to zdolność skupiająca jest równa zeru.

1. ZWIĄZKI PODSTAWOWE

Wzory podstawowe niniejszego punktu podamy tutaj za pracami [1 i 2]. Ruch ciała opisany jest związkami

$$(1.1) \quad x^i = x^i(X^\alpha, t),$$

gdzie X^α są współrzędnymi punktu materialnego w konfiguracji naturalnej B_R , x^i współrzędnymi tego punktu w konfiguracji aktualnej B , a t czasem.

Tensor odkształcenia i jego niezmienniki są następujące:

$$(1.2) \quad B^{ij} = x^i_{,\alpha} x^j_{,\beta} g^{\alpha\beta}$$

oraz

$$(1.3) \quad \begin{aligned} I_1 &= B^i_i, & I_2 &= \frac{1}{2} (I_1^2 - B^r_s B^s_r), \\ I_3 &= \frac{1}{3} B^r_s B^s_p B^p_r - \frac{1}{2} B^r_r B^s_p B^p_s + \frac{1}{6} (B^r_r)^3. \end{aligned}$$

Ograniczymy się dalej do nieściśliwego izotropowego ciała sprężystego. Dla takiego ciała $I_3 = 1$, a tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa T_{Ri}^α ma postać

$$(1.4) \quad T_{Ri}^\alpha = \rho_R \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial x^i_{,\alpha}} + p X^\alpha_{,i},$$

gdzie ρ_R jest gęstością w B_R , a p dowolną funkcją skalarną. Potencjał sprężystości σ jest funkcją niezmienników tensora B^{ij} , $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(I_1, I_2, I_3)$.

Równania ruchu są następujące:

$$(1.5) \quad T_{R_i}^{\alpha} \|_{\alpha} = \rho_R \ddot{x}_i.$$

Jeśli ciało jest jednorodne, to σ nie zależy bezpośrednio od X^{α} i (1.5) sprowadza się do równania:

$$(1.6) \quad A_{k_r}^{\alpha\beta} x^r \|_{\alpha\beta} + p_{,\alpha} X^{\alpha}_{,k} = \rho_R \ddot{x}_k,$$

gdzie

$$(1.7) \quad A_{k_r}^{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^k_{,\alpha} \partial x^r_{,\beta}}, \quad W = \rho_R \hat{\sigma}.$$

Ponieważ W zależy od $x^i_{,\alpha}$ za pośrednictwem niezmienników I_1 i I_2 , więc (1.7) można doprowadzić do postaci

$$(1.8) \quad A_{k_m}^{\alpha\beta} = 2W_1 g_{km} g^{\alpha\beta} + 2W_2 [2x_{k,\alpha} x_{m,\beta} - x_{k,\beta} x_{m,\alpha} - g_{km} x_{r,\alpha} x^r_{,\beta} + \\ + (I_1 g_{km} - B_{km}) g^{\alpha\beta}] + 4W_{11} x_{k,\alpha} x_{m,\beta} + 4W_{22} (I_1 x_{k,\alpha} - B_k^p x_{p,\alpha}) \times \\ \times (I_1 x_{m,\beta} - B_m^r x_{r,\beta}) + W_{12} [(I_1 x_{k,\alpha} - B_k^p x_{p,\alpha}) x_{m,\beta} + x_{k,\alpha} (I_1 x_{m,\beta} - B_m^r x_{r,\beta})],$$

gdzie

$$(1.9) \quad W_K = \frac{\partial W}{\partial I_K}, \quad W_{KM} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_K \partial I_M}.$$

Weźmy pod uwagę nałożenie małych przemieszczeń $u^i(X^{\alpha}, t)$ na ciało B . Odpowiednie wzory dla materiału ściśliwego podano w pracy [3]. Nowy ruch opisany jest za pomocą funkcji

$$(1.10) \quad x^{*i}(X^{\alpha}, t) = x^i(X^{\alpha}, t) + u^i(X^{\alpha}, t).$$

Tak odkształcone ciało oznaczamy przez B^* . Dla B^* tensor naprężenia wynosi

$$(1.11) \quad T_{R^*k}^{\alpha} = \rho_R \frac{\partial \sigma}{\partial x^{*k}_{,\alpha}} + p^* X^{*\alpha}_{,k} = \rho_R \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x^k_{,\alpha}} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^k_{,\alpha} \partial x^r_{,\beta}} u^r \|_{\beta} \right] + (p + p^*) X^{*\alpha}_{,k}.$$

Pisząc teraz równanie (1.5) dla B^* i pomijając wyrazy nieliniowe względem u^i , mamy

$$(1.12) \quad (A_{k_r}^{\alpha\beta} u^r \|_{\beta}) \|_{\alpha} - p_{,\alpha} X^{\alpha}_{,r} X^{\beta}_{,k} u^r \|_{\beta} + p'_{,\alpha} X^{\alpha}_{,k} = \rho_R \ddot{u}_k.$$

Rozważmy powierzchnię \mathcal{S} o równaniu

$$(1.13) \quad t = \omega(x_i).$$

Dla punktu $x^i + dx^i$, bliskiemu punktowi x^i , odpowiedni czas wynosi

$$(1.14) \quad t + dt = \omega(x^i + dx^i) = \omega(x^i) + \omega_{,i}(x^i) dx^i.$$

Weźmy z kolei $dx^i = U n^i dt$; gdzie n_i jest wektorem normalnym do S ; parametr U jest z definicji prędkością powierzchni \mathcal{S} . Ponieważ $n_i = \omega_{,i} / \sqrt{\omega_{,r} \omega_{,r}}$, przeto z (1.14) wynika, że

$$(1.15) \quad U = \frac{1}{\sqrt{\omega_{,r} \omega_{,r}}}.$$

Jeśli na powierzchni \mathcal{S} przemieszczenie i jego pierwsze pochodne są ciągłe, a drugie pochodne doznają skoku, to powierzchnia \mathcal{S} jest czołem fali akustycznej. Zachodzą wtedy związki (por. [4])

$$(1.16) \quad \llbracket u^k \rrbracket_{\alpha\beta} = a^k x^r_{,\alpha} x^s_{,\beta} n_r n_s, \quad \llbracket \dot{u}^k \rrbracket_m = -a^k U n_m, \quad \llbracket \ddot{u}^k \rrbracket = U^2 a^k,$$

gdzie U jest prędkością propagacji w B , a n_i wersorem normalnym do powierzchni $t - \omega(x^r) = 0$, który określa kierunek propagacji powierzchni nieciągłości. Wektor a^k określa wielkość skoków. Dla ciała nieściśliwego mamy

$$(1.17) \quad a^k n_k = 0.$$

Tensor akustyczny Q_{ij} jest funkcją kierunku propagacji n_i :

$$(1.18) \quad Q_{km} = A_k^{\alpha} m^{\beta} x^r_{,\alpha} x^s_{,\beta} n_r n_s.$$

Prędkość propagacji U i wektor a^i spełniają równanie

$$(1.19) \quad (Q_{km}^* - \rho U^2 g_{km}) a^m = 0,$$

gdzie

$$(1.20) \quad Q_{km}^* = Q_{km} - n_k n^r Q_{rm}.$$

Tensor $A_i^{\alpha} m^{\beta}$ określa więc całkowicie równania małego ruchu i własności akustyczne ciała. Dla każdego kierunku propagacji równanie (1.19) pozwala znaleźć prędkości propagacji U oraz wektor a^i , określający dopuszczalne skoki drugich pochodnych wektora u^i . Z kolei jeśli jest znane U , to (1.15) jest równaniem różniczkowym pozwalającym wyznaczyć powierzchnie nieciągłości jako funkcje czasu.

2. ODKSZTAŁCENIA OSIOWO-SYMETRYCZNE

Wprowadźmy dwa walcowe układy współrzędnych

$$(2.1) \quad x^i = (r, \vartheta, z), \quad X^{\alpha} = (R, \theta, Z).$$

Układowi tym odpowiadają następujące tensory metryczne i symbole Christoffela:

$$(2.2) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & r^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1/r^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -r, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r},$$

$$(2.3) \quad g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & R^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1/R^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -R, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{R}.$$

Pozostałe symbole Christoffela są równe zeru.

Rozważamy wydrążony cylinder o promieniach początkowych A i B . Cylinder ten poddany jest odkształceniu opisanemu za pomocą funkcji

$$(2.4) \quad r = \sqrt{R^2 + c}, \quad \vartheta = \theta, \quad z = Z,$$

gdzie c jest parametrem deformacji. Związki (2.4) odpowiadają inflacji cylindra bez zmiany jego długości.

Gradient odkształcenia, tensor odkształcenia i jego niezmienniki obliczone na podstawie (2.4), (1.2) i (1.3) są następujące:

$$(2.5) \quad F^i_{\alpha} = x^i_{,\alpha} = \begin{bmatrix} R/r & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_i^{\alpha} = \begin{bmatrix} R/r & 0 & 0 \\ 0 & r^2/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(2.6) \quad B^{ij} = \begin{bmatrix} R^2/r^2 & 0 & 0 \\ \cdot & 1/R^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} R^2/r^2 & 0 & 0 \\ \cdot & r^4/R^2 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix},$$

$$(2.7) \quad I_1 = I_2 = \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1, \quad I_3 = 1.$$

Ograniczmy dalsze rozważania do materiału Mooneya, dla którego

$$(2.8) \quad W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3),$$

przy czym $C_1 > 0$, $C_2 \geq 0$. Cały szereg materiałów typu gumy ma potencjał (2.8). Zgodnie z (2.5) – (2.7) oraz (1.8) mamy

$$(2.9) \quad \begin{aligned} A_{11}^{11} &= 2C_1 + 2C_2 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right), & A_{11}^{22} &= 2C_1 \frac{1}{R^2} + 2C_2 \frac{1}{R^2}, \\ A_{11}^{33} &= 2C_1 + 2C_2 \frac{r^2}{R^2}, & A_{11}^{12} &= A_{11}^{21} = A_{11}^{32} = A_{11}^{23} = A_{11}^{31} = A_{11}^{13} = 0, \\ A_{22}^{11} &= 2C_1 r^2 + 2C_2 r^2, & A_{22}^{22} &= 2C_1 \frac{r^2}{R^2} + 2C_2 \left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right), \\ A_{22}^{33} &= 2C_1 r^2 + 2C_2 R^2, & A_{22}^{12} &= A_{22}^{21} = \dots = A_{22}^{13} = 0, \\ A_{33}^{11} &= 2C_1 + 2C_2 \frac{r^2}{R^2}, & A_{33}^{22} &= 2C_1 \frac{1}{R^2} + 2C_2 \frac{1}{r^2}, \\ A_{33}^{33} &= 2C_1 + 2C_2 \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2}\right), & A_{33}^{12} &= A_{33}^{21} = \dots = A_{33}^{13} = 0, \\ A_{21}^{21} &= A_{12}^{12} = 4C_2 \frac{r}{R}, & A_{12}^{21} &= A_{21}^{12} = -2C_2 \frac{r}{R}, \\ A_{23}^{23} &= A_{32}^{32} = 4C_2 \frac{r^2}{R^2}, & A_{23}^{32} &= A_{32}^{23} = -C_2 \frac{r^2}{R^2}, \\ A_{31}^{31} &= A_{13}^{13} = 4C_2 \frac{R}{r}, & A_{31}^{13} &= A_{13}^{31} = -2C_2 \frac{R}{r}. \end{aligned}$$

Przejdziemy do wyznaczenia $x^i \|_{\alpha\beta}$. Zgodnie z (1.7)₂, (2.2) i (2.3) zachodzą równości

$$(2.10) \quad x^1 \|_{11} = \frac{c}{r^3}, \quad x^1 \|_{22} = \frac{R^2}{r} - r, \quad x^1 \|_{33} = 0, \quad x^2 \|_{21} = \frac{R}{r^2} - \frac{1}{R}, \quad x^3 \|_{31} = 0.$$

Jak wynika z (2.4) dla odkształcenia podstawowego mamy $x^i = 0$. Ponieważ zagadnienie jest osiowo-symetryczne, więc $p_{,2} = p_{,3} = 0$. Jedynym równaniem (1.6) nie spełnionym w sposób trywialny jest równanie dla $k=1$. W związkach (2.10) podano tylko te wielkości $x^i|_{\alpha\beta}$, które wchodzi do tego równania.

Podstawiając (2.10) do (1.6) otrzymujemy ostatecznie równanie różniczkowe na funkcję p :

$$(2.11) \quad p_{,1} = 2(C_1 + C_2) \frac{R}{r^2} \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} - 2 \right).$$

Równanie to można łatwo rozwiązać. Rozwiązania tego nie podajemy, gdyż nie jest potrzebne w dalszych rozważaniach.

3. PROPAGACJA POWIERZCHNI NIECIĄGŁOŚCI

Skupimy się na przypadku, kiedy powierzchnia nieciągłości \mathcal{S} ma oś symetrii $r=0$. Wersor normalny n_i ma wtedy współrzędne:

$$(3.1) \quad n_i = (\sin \varphi, 0, \cos \varphi), \quad \sin \varphi = \frac{\omega_{,r}}{\sqrt{\omega_{,r}^2 + \omega_{,z}^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{\omega_{,z}}{\sqrt{\omega_{,r}^2 + \omega_{,z}^2}},$$

gdzie φ jest kątem, jaki tworzy ta normalna z osią z . Zgodnie z (1.15), (2.5) i (2.9) mamy teraz

$$(3.2) \quad \begin{aligned} Q_{11} &= A_{11}^{11} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \varphi + A_{11}^{33} \cos^2 \varphi, & Q_{22} &= A_{22}^{11} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \varphi + A_{22}^{33} \cos^2 \varphi, \\ Q_{33} &= A_{33}^{11} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \varphi + A_{33}^{33} \cos^2 \varphi, & Q_{13} &= Q_{31} = (A_{13}^{13} + A_{13}^{31}) \frac{R}{r} \sin \varphi \cos \varphi, \\ Q_{23} &= Q_{32} = Q_{12} = Q_{21} = 0. \end{aligned}$$

Z kolei wyznaczamy tensor Q_{ij}^* . Zgodnie z (1.20) mamy

$$(3.3) \quad \begin{aligned} Q_{11}^* &= \left(A_{11}^{11} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \varphi + A_{11}^{33} \cos^2 \varphi \right) (1 - \sin^2 \varphi) - (A_{13}^{13} + A_{13}^{31}) \frac{R}{r} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ Q_{22}^* &= A_{22}^{11} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \varphi + A_{22}^{33} \cos^2 \varphi, \\ Q_{33}^* &= \left(A_{33}^{11} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \varphi + A_{33}^{33} \cos^2 \varphi \right) (1 - \cos^2 \varphi) - (A_{13}^{13} + A_{13}^{31}) \frac{R}{r} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ Q_{13}^* &= Q_{31}^* = - \left(A_{33}^{11} \frac{R^2}{r^2} \sin^2 \varphi + A_{33}^{33} \cos^2 \varphi \right) \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + (A_{13}^{13} + A_{13}^{31}) \frac{R}{r} (1 - \sin^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi, \\ Q_{12}^* &= Q_{21}^* = Q_{23}^* = Q_{32}^* = 0. \end{aligned}$$

Tensor Q_{ij}^* jest więc tensorem symetrycznym, którego jednym z wektorów własnych jest wektor

$$(3.4) \quad a^k = (0, 1/r, 0).$$

Mnożąc (1.16) przez a_k i podstawiając (3.4), otrzymujemy odpowiadającą mu prędkość propagacji:

$$(3.5) \quad U^2 = \frac{1}{\rho r^2} Q_{22}^*.$$

Po uwzględnieniu (3.2), (3.3) i (2.9) mamy

$$(3.6) \quad U^2 = \frac{2}{\rho r^2} \{ (C_1 + C_2) R^2 \sin^2 \varphi + (C_1 r^2 + C_2 R^2) \cos^2 \varphi \}.$$

Jeśli nie ma wstępnej deformacji, to $R=r$ i (3.6) redukuje się do postaci

$$(3.7) \quad U_N^2 = \frac{2}{\rho} (C_1 + C_2),$$

przy czym prędkość nie zależy ani od punktu, ani od kierunku propagacji. Wstępna deformacja powoduje uprzywilejowanie pewnych kierunków i wyróżnia punkty materialne.

Załóżmy chwilowo $r < R$ (promieniowe ściśnięcie, $c < 0$). Ponieważ $C_1 + C_2 > 0$ dla każdego φ , przeto $U > U_N$. Jeśli $r > R$ (co odpowiada wydęciu $c > 0$), to $U < U_N$ dla każdego φ . Dla danych R i r ekstremalna wartość U jest osiągnięta dla $\varphi = \pi/2$. Dla $r < R$ jest to maksimum, a dla $r > R$ minimum.

Podstawiając (3.1) do (3.6) i (1.15) otrzymujemy równanie różniczkowe na funkcję $\omega(r, z)$ określającą front fali ⁽¹⁾

$$(3.8) \quad \frac{2}{\rho r^2} \{ (C_1 + C_2) R^2 \omega_r^2 + (C_1 r^2 + C_2 R^2) \omega_z^2 \} = 1.$$

Podstawiając teraz $R^2 = r^2 - c$ i oznaczając U_N jak we wzorze (3.7) mamy

$$(3.9) \quad U_N^2 \left\{ \left(1 - \frac{c}{r^2} \right) \omega_r^2 + \left(1 - \frac{c}{r^2} M \right) \omega_z^2 \right\} = 1,$$

gdzie wprowadzono oznaczenie

$$(3.10) \quad M = \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Nieliniowe równanie (3.9) najwygodniej jest rozwiązać metodą małego parametru. Traktując c jako taki parametr ograniczymy obliczenia do dwóch pierwszych przybliżeń

$$(3.11) \quad \omega(r, z) = \overset{\circ}{\omega}(r, z) + c \overset{\circ}{\omega}(r, z),$$

⁽¹⁾ Indeksami r lub z oznaczono różniczkowanie cząstkowe względem r lub z .

co po podstawieniu do (3.8) prowadzi do wzorów

$$(3.12) \quad U_N^2 (\omega_r^2 + \omega_z^2) = 1$$

oraz

$$(3.13) \quad 2(\omega_r \dot{\omega}_r + \omega_z \dot{\omega}_z) = \frac{1}{r^2} (\dot{\omega}_r^2 + M \dot{\omega}_z^2).$$

Interesuje nas szczególnie powierzchnia nieciągłości, której w chwili $t=0$ odpowiada równanie $z=0$. Na podstawie (3.12) otrzymujemy dla zerowego przybliżenia

$$(3.14) \quad \omega = \frac{1}{U_N} z.$$

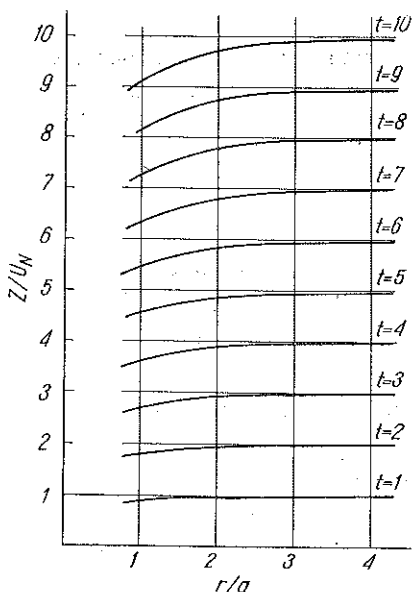
Bez zawężania ogólności omawianej teorii pominięto tutaj stałą całkowania.

Podstawiając teraz (3.13) do (3.12) mamy kolejno

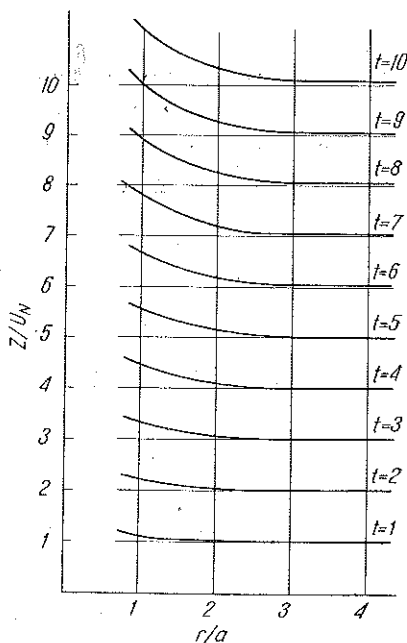
$$(3.15) \quad \dot{\omega}_z = \frac{1}{r^2} \frac{M}{U_N}, \quad \dot{\omega} = \frac{1}{2r^2} \frac{M}{U_N} z + g(r).$$

Ponieważ z założenia dla $t=0$ powierzchnia nieciągłości jest płaszczyzną $z=0$, więc $g(r)=0$. Ostatecznie z dokładnością do wyrazów liniowych względem c równanie powierzchni nieciągłości jest następujące:

$$(3.16) \quad t = \omega(r, z), \quad \omega = \frac{1}{U_N} \left(1 + \frac{c}{2r^2} M \right) z.$$



Rys. 1



Rys. 2

Na rys. 1 przedstawiono kolejne fronty fali, gdy $t=1, 2, 3, \dots$, dla materiału określonego stosunkiem $C_2/C_1=0,5$. Założono, że promień wewnętrzny a zwiększa się 1,14-krotnie, czemu odpowiada $c=0,3$. Asymptoty frontów fali leżą kolejno na powierzchniach $z/U_N=1, 2, 3, \dots$ i są frontami fali w walcu nieodkształconym ($c=0$). Jest rzeczą widoczną, że walec taki zachowuje się tak, jak soczewka skupiająca.

Na rys. 2 przedstawiono kolejne fronty fali dla tego samego materiału przy założeniu, że $c=0,3$. Walec taki zachowuje się tak, jak soczewka rozpraszająca.

Zgodnie z (3.16) i (1.15) prędkość propagacji jest następująca:

$$(3.17) \quad U = U_N \left(1 - \frac{cM}{2r^2} \right).$$

4. MAŁE DRGANIA

Równanie (1.12) określa małe drgania ośrodka. Przez podstawienie do nich tensorów $A_i^{\alpha\beta}$, określonych przez (2.9), i dodanie równania nieściśliwości można uzyskać odpowiedni układ równań w wyraźnej postaci. Taki układ równań otrzymano na innej drodze w pracy [5]. Dla drgań skrętnych

$$(4.1) \quad u_1 = u_3 = 0, \quad u_2 = v(r, z, t)$$

sprowadza się do postaci

$$(4.2) \quad 2(C_1 + C_2) \left[\frac{R^2}{r^2} v_{rr} - \frac{1}{r} \left(3 \frac{R^2}{r^2} - 2 \right) v_r + \frac{4}{r^2} \left(\frac{R^2}{r^2} - 1 \right) v \right] + 2 \left(C_1 + \frac{R^2}{r^2} C_2 \right) v_{zz} = \rho v_{tt},$$

a równanie nieściśliwości spełnione jest tożsamościowo.

Przemieszczenie (4.1) nie powoduje zmiany składowych tensora naprężenia z wyjątkiem składowej τ^{12} , której przyrost jest proporcjonalny do $v_r - 2v/r$. Ponieważ na $r=a$ i b nie ma obciążenia, więc

$$(4.3) \quad v_r - 2 \frac{v}{r} = 0, \quad r = a, b.$$

Podstawiając do (4.2) $r^2 - c$ na miejsce R^2 , znajdziemy równanie różniczkowe

$$(4.4) \quad U_N^2 \left(v_{rr} - \frac{1}{r} v_r + v_{zz} \right) - v_{tt} + c U_N^2 \frac{1}{r^2} \left(-v_{rr} + \frac{3}{r} v_r - \frac{4}{r^2} v - M v_{zz} \right) = 0,$$

przy czym U_N oraz M określone są przez (3.7) i (3.16). Równanie (4.4) jest równaniem ścisłym.

Wprowadźmy na miejsce zmiennych r, z, t zmienne ξ, η, σ określone w sposób następujący:

$$(4.5) \quad \xi = r, \quad \eta = z, \quad \sigma = t - \omega(r, z),$$

przy czym zgodnie z (3.16) powierzchnia $\sigma=0$ jest powierzchnią nieciągłości.

Równanie ruchu (4.4) można teraz napisać w następującej postaci:

$$(4.6) \quad \left\{ 1 - U_N^2 \left[\left(1 - \frac{c}{r^2} \right) \omega_r^2 - \left(1 - \frac{cM}{r^2} \right) \omega_z^2 \right] \right\} v_{\sigma\sigma} + 2U_N^2 \left(1 - \frac{c}{r^2} \right) \omega_r v_{\xi\sigma} + \\ + 2U_N^2 \left(1 - \frac{cM}{r^2} \right) \omega_z v_{\eta\sigma} + U_N^2 \left\{ \left(1 - \frac{c}{r^2} \right) \omega_{rr} + \left(1 - \frac{cM}{r^2} \right) \omega_{zz} + \left(-\frac{1}{r} + \frac{3}{r^2} c \right) \omega_r \right\} v_{\sigma} - \\ - U_N^2 \left\{ \left(1 - \frac{c}{r^2} \right) v_{\xi\xi} + \left(1 - \frac{cM}{r^2} \right) v_{\eta\eta} + \left(-\frac{1}{r} + \frac{3}{r^3} c \right) v_{\xi} - \frac{4}{r^4} c v \right\} = 0.$$

Zgodnie z (3.9) współczynnik przy $v_{\sigma\sigma}$ jest równy zeru.

Na powierzchni $\sigma = \text{const}$ druga pochodna v względem σ może więc być nieciągła, sama zaś funkcja v , jej pierwsze i drugie pochodne względem ξ i η są ciągłe. Jeśli po jednej stronie powierzchni $\sigma=0$ mamy $v \equiv 0$, a po jej drugiej stronie $v \neq 0$, to powierzchnia ta oddziela obszar zaburzony od niezaburzonego.

Ponieważ $\omega(r, z)$ zostało wyliczone z dokładnością do c w równaniu (3.1), przeto wszystkie wyrazy przy c^2 i c^3 należy odrzucić. Otrzymujemy w ten sposób równanie przybliżone

$$(4.7) \quad -2 \frac{c}{r^3} Mz v_{r\sigma} + 2 \left(1 - \frac{c}{2r^2} M \right) v_{z\sigma} + \frac{4c}{r^4} Mz v_{\sigma} - \\ - U_N \left\{ \left(1 - \frac{c}{r^2} \right) v_{rr} + \left(1 - \frac{c}{r^2} M \right) v_{zz} + \frac{1}{r} \left(-1 + \frac{3c}{r^2} \right) v_r - \frac{4c}{r^4} v \right\} = 0$$

oraz

$$(4.8) \quad v = v \left[r, z, t - \frac{z}{U_N} \left(1 + \frac{cM}{2r^2} \right) \right].$$

W celu znalezienia funkcji v w pobliżu powierzchni nieciągłości $\sigma=0$ (w obszarze zaburzonym) można rozłożyć v na szereg potęgowy względem σ :

$$(4.9) \quad v = g_0 + g_1 \sigma + g_2 \sigma^2 + \dots,$$

gdzie g_k , $k=0, 1, \dots$; ich pochodne są ciągłymi funkcjami zmiennych r i z . Ponieważ na $\sigma=0$ funkcje v , v_r , ..., v_{zz} , v_{σ} są ciągłe, przeto

$$(4.10) \quad g_0 \equiv g_1 \equiv 0.$$

Podstawiając (4.9) do (4.7) i przyrównując do zera współczynniki przy kolejnych potęgach σ otrzymujemy układ równań różniczkowych, z którego można łatwo wyznaczyć funkcje g_2, g_3, \dots . W szczególności mamy następujące równanie na funkcję g_2 :

$$(4.11) \quad -\frac{c}{r^3} Mz \frac{\partial g_2}{\partial r} + \left(1 - \frac{c}{2r^2} M \right) \frac{\partial g_2}{\partial z} + \frac{1}{r^4} Mz g_2 = 0.$$

Funkcja $g_2(r, z)$ nie jest więc stała. Stąd wniosek, że skok pochodnej $v_{\sigma\sigma}$ na $\sigma=0$ nie jest stałą, a jest funkcją zmiennych r i z .

Przejdźmy do znalezienia drgań, których powierzchnie fazowe pokrywają się z rodziną powierzchni $\omega(r, z) = \text{const}$. W tym celu przedstawimy v w następującej postaci:

$$(4.12) \quad v = \psi(r, z) e^{iv\sigma},$$

gdzie v jest dowolnym ustalonym parametrem. Podstawiając (4.12) do (4.8) mamy

$$(4.13) \quad U_N \left(1 - \frac{c}{r^2}\right) \Psi_{rr} + U_N \left(1 - \frac{c}{r^2} M\right) \Psi_{zz} + \left[U_N \left(-1 + \frac{3c}{r^2}\right) + \right. \\ \left. + 2iv \frac{c}{r^2} Mz \right] \frac{1}{r} \Psi_r - 2iv \left(1 - \frac{c}{2r^2}\right) \Psi_z - \frac{4c}{r^4} [U_N + ivMz] \Psi = 0.$$

Równanie powyższe można otrzymać również na innej drodze przez podstawienie do (4.4) funkcji

$$(4.14) \quad v = \Psi(r, z) e^{iv(t - \omega(r, z))}.$$

Przy takim postępowaniu nie można jednak otrzymać równań (4.7) – (4.9), które ilustrują związek między propagacją powierzchni nieciągłości a małymi drganiami.

Równanie (4.13) jest bardzo złożone i otrzymanie ogólnego rozwiązania jest bardzo trudne. Poszukiwanie takiego rozwiązania byłoby jednak zupełnie niecelowe, gdyż w (4.13) zgodnie z poprzednimi założeniami pominięto wyrazy z wyższymi niż pierwsza potęgami c . W związku z tym poszukujemy rozwiązania w postaci

$$(4.15) \quad \Psi(r, z) = \overset{0}{\Psi}(r, z) + c \overset{1}{\Psi}(r, z).$$

Po podstawieniu (4.15) do (4.13) otrzymujemy dwa równania:

$$(4.16) \quad U_N \left(\overset{0}{\Psi}_{rr} - \frac{1}{r} \overset{0}{\Psi}_r + \overset{0}{\Psi}_{zz} \right) - 2iv \overset{0}{\Psi}_z = 0$$

oraz

$$(4.17) \quad U_N \left(\overset{1}{\Psi}_{rr} - \frac{1}{r} \overset{1}{\Psi}_r + \overset{1}{\Psi}_{zz} \right) - 2iv \overset{1}{\Psi}_z = \\ = \frac{U_N}{r^2} \left(\overset{0}{\Psi}_{rr} - \frac{3}{r} \overset{0}{\Psi}_r + \frac{4}{r^2} \overset{0}{\Psi} + M \overset{0}{\Psi}_{zz} \right) - \frac{iv}{r^2} M \left(\frac{2z}{r} \overset{0}{\Psi}_r + \overset{0}{\Psi}_z \right).$$

Rozważmy najpierw przypadek, kiedy $\overset{0}{\Psi}$ nie zależy od z . Ogólnym rozwiązaniem (4.16) jest w tym przypadku

$$(4.18) \quad \overset{0}{\Psi} = D_1 + D_2 r^2,$$

gdzie D_1 i D_2 są stałymi całkowania, a równanie (4.17) sprowadza się do równania

$$(4.19) \quad U_N \left(\overset{1}{\Psi}_{rr} - \frac{1}{r} \overset{1}{\Psi}_r + \overset{1}{\Psi}_{zz} \right) - 2iv \overset{1}{\Psi}_z = 4U_N D_1 / r^4 - 4iv M D_2 z / r^2.$$

Można stąd wyznaczyć rozwiązanie szczególne:

$$(4.20) \quad \overset{1}{\Psi} = \frac{D_1}{r^2} + D_2 \frac{M}{U_N} \left[2ivz \ln r - v^2 r \left(\ln^2 r - \ln r + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Jeśli przez $P(r, z)$ oznaczyć dowolne rozwiązanie równania jednorodnego, otrzymanego z przyrównania lewej strony (4.19) do zera, to zgodnie z (4.12), (4.18) i (4.20) funkcja

$$(4.21) \quad v = A \exp i\nu \left[t - \frac{1}{U_N} \left(1 + \frac{c}{r^2} M \right) z \right],$$

$$(4.22) \quad A = D_1 + D_2 r^2 + c \left\{ P(r, z) + \frac{D_1}{2r^2} + \frac{D_2 M}{U_N} \left[2i\nu z \ln r - \nu^2 r \left(\ln^2 r - \ln r + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}$$

jest rozwiązaniem zespolonym. Rzeczywista część i zespolona część tego rozwiązania są również rozwiązaniami i przedstawiają drgania propagujące się tak, jak fala nięciąłości. Powierzchnia stałej fazy drgań (4.21) jest określona równaniem

$$(4.23) \quad t - \frac{1}{U_N} \left(1 - \frac{c}{r^2} M \right) z = \text{const}$$

lub i zgodnie z (3.16) równaniem

$$(4.24) \quad t - \omega(r, z) = \text{const}.$$

Powierzchnia stałej fazy porusza się więc jak czoło fali. Wynika stąd, że prędkość fazowa jest równa prędkości propagacji i niezależna od częstości drgań ν . Drgania (4.21) są drganiami bez dyspersji.

Powróćmy do analizy równania (4.6). Jak podkreślono wyżej pierwszy wyraz tego równania jest równy zeru. Sumę następujących dwu wyrazów można uznać za pochodną funkcji v_σ wzdłuż pewnej krzywej l leżącej na powierzchni $\sigma=0$ (por. np. [6]). Parametryczne równanie tej krzywej jest następujące:

$$(4.25) \quad \xi = \alpha(\tau), \quad \eta = \beta(\tau), \quad \sigma = 0$$

lub zgodnie z (4.5)

$$(4.26) \quad r = \alpha(\tau), \quad z = \beta(\tau), \quad t = \gamma(\tau).$$

Mamy więc

$$(4.27) \quad \frac{d\alpha}{d\tau} = U_N^2 \left(1 - \frac{c}{r^2} \right) \omega_r, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = U_N^2 \left(1 - \frac{cM}{r^2} \right) \omega_z.$$

Wektor $(\omega_r, \omega_z, -1)$, ortogonalny do $\sigma=0$, jest ortogonalny do rozpatrywanej krzywej l , gdyż leży ona na powierzchni $\sigma=0$. Stąd

$$(4.28) \quad \omega_r \frac{d\alpha}{d\tau} + \omega_z \frac{d\beta}{d\tau} - \frac{d\gamma}{d\tau} = 0,$$

co zgodnie z (3.9) i (4.27) prowadzi do związków

$$(4.29) \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad t = \tau.$$

Zamiast parametru τ można więc w dalszych związkach podstawić t traktując tę wielkość jako parametr.

Podstawiając (3.16) do (4.27) i (4.26) mamy z dokładnością do wyrazów liniowych względem c następujące równanie:

$$(4.30) \quad \frac{d\alpha}{dt} = -U_N c M \frac{\beta}{\alpha^3}, \quad \frac{d\beta}{dt} = U_N \left(1 - \frac{cM}{2\alpha^2}\right).$$

Przedstawiając $\alpha = \alpha^0 + c\alpha^1$, $\beta = \beta^0 + c\beta^1$ i rozwiązując równanie (4.30) metodą kolejnych przybliżeń mamy

$$(4.31) \quad \alpha(t) = r_0 - cU_N M \frac{z_0}{r_0^3} t + cU_N^2 M \frac{1}{r_0^3} t^2, \quad \beta(t) = z_0 + U_N t - \frac{1}{2} cU_N M \frac{1}{r_0} t,$$

gdzie r_0 i z_0 są współrzędnymi punktu leżącego na l . Powierzchnia $\sigma = \text{const}$ jest charakterystyką równania (4.6), natomiast krzywa l jego bicharakterystyką. Krzywa m , która jest rzutem bicharakterystyki l na płaszczyznę (r, z) , jest promieniem akustycznym. Równanie promienia określa (4.26) i (4.31).

Zróżniczkujemy (4.6) względem σ . Ponieważ pierwszy wyraz jest równy zeru, mamy (zakładamy, że ω_r, \dots zostało przedstawione jako funkcja ξ i η)

$$(4.32) \quad 2\left(1 - \frac{c}{r^2}\right) \omega_r v_{\xi\sigma\sigma} + 2\left(1 - \frac{cM}{r^2}\right) \omega_z v_{\eta\sigma\sigma} + \\ + \left[\left(1 - \frac{c}{r^2}\right) \omega_{rr} + \left(1 - \frac{cM}{r^2}\right) \omega_{zz} + \frac{1}{r} \left(-1 + \frac{3}{r^2} c\right) \omega_r \right] v_{\sigma\sigma} - \\ - \left(1 - \frac{c}{r^2}\right) v_{\xi\xi\sigma} - \left(1 - \frac{cM}{r^2}\right) v_{\eta\eta\sigma} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{3}{r^2} c\right) v_{\xi\sigma} + \frac{4}{r^2} c v_{\sigma} = 0.$$

Równanie to ma być spełnione po obu stronach powierzchni nieciągłości. Ponieważ skoku doznają jedynie pochodne stopnia co najmniej drugiego względem σ , więc uwzględniając (4.27) – (4.29) oraz podstawiając (3.16), mamy

$$(4.33) \quad 2 \frac{d}{d\tau} \llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket + 4cM U_N \frac{z}{r^4} \llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket = 0.$$

Przed przystąpieniem do rozwiązywania tego równania należy wyrazić z oraz r na krzywej m przez t zgodnie z (4.31). Jeśli rozłożymy $\llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket = \llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket_0 + c \llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket_1$, to wystarczy podstawić do (4.33) tylko zerowe przybliżenie (4.31). Mamy więc

$$(4.34) \quad 2 \frac{d}{dt} \llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket + 4cM U_N \frac{z_0 + U_N t}{r_0^4} \llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket = 0,$$

skąd wynika

$$(4.35) \quad \llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket = H \exp \left[-\frac{2cM}{r_0^4} \left(z_0 t + \frac{1}{2} U_N t^2 \right) \right],$$

gdzie H jest dowolnym parametrem stałym na promieniu. Rozwiązanie (4.35) uzasadnia termin «promień». Jeśli mianowicie w pewnym punkcie promienia mamy $\llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket = 0$, to $H = 0$ i na całym promieniu $\llbracket v_{\sigma\sigma} \rrbracket = 0$. Za ekranem zaopatrzoną w szczelinę istnieje zaburzenie tylko na tych promieniach, które przechodzą przez szczelinę.

Związek (4.27) pozwala wyznaczyć prędkość promieniową U_r . Funkcje (4.27) są jej składowymi. Podstawiając (3.16) mamy

$$(4.36) \quad U_r = U_N \sqrt{1 - \frac{cM}{r^2}} \approx U_N \left(1 - \frac{cM}{2r^2}\right).$$

Z dokładnością do wyrazów liniowych względem c mamy więc $U_r = U$ [por. (3.17)]. Na ogół jednak $U_r > U$, przy czym równość zachodzi tylko w przypadku, kiedy m jest ortogonalne do powierzchni nieciągłości.

5. DRGANIA Z ODBICIAMI

Jeśli prędkość fazowa zależy od częstości drgań, to czoło fali nie może pokrywać się z powierzchnią stałej fazy dla wszystkich częstości. W tym przypadku podstawienie (4.12) prowadzi również do rozwiązania, jednak wyrażonego w niedogodnej postaci. W związku z tym poszukujemy rozwiązania w postaci

$$(5.1) \quad v = \Phi(r) e^{i(\mu z + \nu t)},$$

gdzie Φ jest funkcją r , a μ oraz ν ustalonymi dowolnymi parametrami. Podstawiając (5.1) do (4.4) i uwzględniając równość $R^2 = r^2 - c$ mamy

$$(5.2) \quad U_N^2 \left[\left(1 - \frac{c}{r^2}\right) \Phi'' - \frac{1}{r} \left(1 - 3\frac{c}{r^2}\right) \Phi' - \frac{4}{r^2} \frac{c}{r^2} \Phi \right] - \\ - \mu^2 U_N^2 \left(1 - \frac{c}{r^2} M\right) \Phi + \nu^2 \Phi = 0.$$

Równanie to rozwiążemy metodą małego parametru ograniczając się podobnie jak w punkcie poprzednim do wyrazów liniowych względem c :

$$(5.3) \quad \Phi(r) = \overset{0}{\Phi}(r) + c \overset{1}{\Phi}(r).$$

Zgodnie z (4.5) i (4.6) otrzymujemy

$$(5.4) \quad \overset{0}{\Phi}'' - \frac{1}{r} \overset{0}{\Phi}' + \kappa^2 \overset{0}{\Phi} = 0$$

oraz

$$(5.5) \quad \overset{1}{\Phi}'' - \frac{1}{r} \overset{1}{\Phi}' + \kappa^2 \overset{1}{\Phi} = \frac{1}{r^2} \left[\overset{0}{\Phi}'' - \frac{3}{r} \overset{0}{\Phi}' + \frac{4}{r^2} \overset{0}{\Phi} - \mu^2 M \overset{0}{\Phi} \right],$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(5.6) \quad \kappa^2 = \frac{\nu^2}{U_N^2} - \mu^2.$$

Parametr ten jest rzeczywisty, jeśli $\nu/\mu \geq U_N$ lub urojony, jeśli $\nu/\mu < U_N$. Równanie (5.4) można sprowadzić do równania Bessela, a jego ogólnym rozwiązaniem jest funkcja

$$(5.7) \quad \overset{0}{\Phi} = D_1 r J_1(\kappa r) + D_2 r N_1(\kappa r),$$

gdzie D_1 i D_2 są stałymi, a J_1 i N_1 funkcjami Bessela i Neumanna pierwszego rzędu. Dla rzeczywistego κ funkcje te są rzeczywiste. W przypadku kiedy κ jest urojone ($\kappa = i\nu$)

$$(5.8) \quad \psi^2 = \mu^2 - \frac{\nu^2}{U_N^2}$$

rzeczywistym rozwiązaniem jest funkcja

$$(5.9) \quad \overset{\circ}{\Phi} = D_1 r I_1(\psi r) + D_2 r K_1(\psi r),$$

gdzie K_1 jest funkcją MacDonalda. Przypadek $\kappa = 0$ rozpatrzmy dalej.

W celu znalezienia drugiego przybliżenia należy podstawić (5.7) lub (5.9) do (5.5) i rozwiązać równanie niejednorodne. Odpowiednie związki są bardzo skomplikowane i wymagają oparcia obliczeń na metodach numerycznych lub przybliżonych. W związku z tym dla $\kappa \neq 0$ nie będziemy analizowali przypadku ogólnego ograniczając się do analizy drgań w walcu wstępnie nieodkształconym, któremu odpowiada $c = 0$.

W tym przypadku (5.7) (lub (5.9)) jest rozwiązaniem ścisłym, a warunek (4.3) sprowadza się do warunku

$$(5.10) \quad D_1 [r\kappa J_0(\kappa r) - (\kappa + 1)J_1(\kappa r)] + D_2 [r\kappa N_0(\kappa r) - (\kappa + 1)N_1(\kappa r)] = 0 \quad \text{dla } r = a, b$$

lub

$$(5.11) \quad D_1 [r\kappa I_0(\kappa r) - (\kappa + 1)I_1(\kappa r)] + D_2 [-r\kappa K_0(\kappa r) - (\kappa + 1)K_1(\kappa r)] = 0 \quad \text{dla } r = a, b.$$

Lewa strona warunku (5.10) dla każdego D_1, D_2 ma nieskończenie wiele miejsc zerowych: $r_K, K = 1, 2, \dots$. Jeśli $a = r_N, b = r_M$, to (5.10) łącznie z (5.1) określa drgania walca wolnego od obciążenia na powierzchniach bocznych. Dla takich drgań ν/μ jest prędkością fazową U_F . Ponieważ parametr κ jest rzeczywisty, więc $U_F > U_N$. Należy podkreślić, że w przypadku $\mu = 0$ drgania nie zależą od współrzędnej z i $U_F \rightarrow \infty$.

Rozwiązania (5.7) i (5.9) pozwalają zbudować dalsze, jakościowo inne rozwiązania. Biorąc $D_2 = i\bar{D}_2$ (lub wprowadzając funkcje Hankela $H_1^{(1)}(\kappa r)$ i $H_1^{(2)}(\kappa r)$) mamy zgodnie z (5.7) zespolone $\overset{\circ}{\Phi}$. Przedstawimy je w postaci wykładniczej i podstawiając do (5.1) otrzymujemy drgania

$$(5.12) \quad v = |\overset{\circ}{\Phi}| e^{i(\arg \overset{\circ}{\Phi} + \mu z + \nu t)}$$

Linie stałej fazy są tutaj krzywymi na płaszczyźnie r, z . Dla $\bar{D}_2 = D_1$ funkcja $|\overset{\circ}{\Phi}|$ jest funkcją monotoniczną.

Przejdziemy teraz do przypadku, kiedy μ oraz ν są takie, że zgodnie z (5.6) mamy $\kappa = 0$. W tym przypadku rozwiązaniem równania (5.4) jest funkcja

$$(5.13) \quad \overset{\circ}{\Phi} = D_1 + D_2 r^2.$$

Dla $D_1 = 0$ mamy skrętne drgania walca, przy czym moduł przemieszczenia $v\sqrt{g^{11}}$ jest proporcjonalny do odległości od osi $r = 0$.

Podstawiając (5.13) do (5.5) otrzymujemy niejednorodne równanie różniczkowe

$$(5.14) \quad \frac{1}{r} \Phi'' - \frac{1}{r^2} \Phi' = -\frac{D_1}{r^2} \left(\frac{4}{r^2} + \mu^2 M \right) - \frac{D_2}{r^2} \left(\frac{8}{r^2} + \mu^2 M \right).$$

Rozwiązując je metodą uzmienniania stałej mamy

$$(5.15) \quad \frac{1}{r} \Phi = E_1 + E_2 r^2 + cD_1 \left[-\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{2} \mu^2 M \ln r \right] + cD_2 \left[4 \ln r - \frac{1}{2} \mu^2 M r^2 \ln r \right],$$

gdzie E_1 i E_2 są nowymi stałymi całkowania.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, *The classical field theories*, Handbuch der Physik III/1, Berlin 1960.
2. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik III/3, Berlin 1965.
3. R. A. TOUPIN, B. BERNSTEIN, *Sound waves in deformed perfectly elastic materials, Acousto-elastic effect*, J. Acoust. Soc. Amer., 33, 1961.
4. C. TRUESDELL, *General and exact theory of waves in finite elastic strain*, Arch. Rat. Mech. Anal., 8, 1961.
5. E. ZŁĄGANOWA, Dysertacja doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1970.
6. В. И. Левин, Ю. И. Гроссберг, *Дифференциальные уравнения математической физики*, Ленинград 1951.

Резюме

АКУСТИЧЕСКАЯ ВОЛНА В КОНЕЧНО ДЕФОРМИРОВАННОМ ЦИЛИНДРЕ

Полый цилиндр круглого сечения подвержен конечному расширению. Напряженное состояние определяется исходя из предположения, что цилиндр выполнен из материала Муни. Рассматривается распространение осесимметричной акустической волны вдоль оси цилиндра. Для поверхности разрыва получено нелинейное дифференциальное уравнение и по методу малого параметра вычислены два первых приближения формы этой поверхности и её скорости распространения. Показано, что в случае, когда радиус цилиндра увеличивается (уменьшается) в ходе предварительного деформирования, цилиндр приобретает по отношению к акустическим волнам фокусирующие (рассеивающие) свойства.

Исходя из уравнений малых деформаций, наложенных на конечные деформации, получены уравнения бихарактеристик и акустических лучей, а также определены фазовые и лучевые скорости. Обнаружены некоторые формы колебаний и дисперсий.

SUMMARY

ACOUSTIC WAVE IN A CYLINDER SUBJECT TO FINITE DEFORMATION

A hollow circular cylinder is subject to a finite inflation. Assuming the cylinder to be made of the Mooney material, the state of stress is determined. The propagation of an axi-symmetric acoustic wave propagating in the direction of the axis is considered. A nonlinear differential

equation for the discontinuity surface is obtained. Two first approximations of the surface and the propagation velocity are calculated by means of the perturbation method. It is shown that when the radius of the cylinder increases (decreases) in the process of initial deformation, the cylinder behaves as a convergent (divergent) lens.

On the basis of the theory of small deformations superposed on finite deformations, the equations of bicharacteristics and the acoustic radii are found, and the phase and radial velocities are determined. Certain modes of dispersive vibrations are also derived.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 kwietnia 1972 r.
