

METODA SZTYWNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W ZASTOSOWANIU DO ANALIZY DRGAŃ ZŁOŻONYCH UKŁADÓW LINIOWYCH

WŁODZIMIERZ GA WR O Ń S K I i J A N K R U S Z E W S K I (GDAŃSK)

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

- SES sztywny element skończony,
 colon $\{x_i\}$ wektor (macierz kolumnowa),
 diag $\{y_i\}$ macierz diagonalna,
 $\{x: f(x)\}$ zbiór wszystkich x spełniających własność $f(x)$,
 $r, u = 1, 2, \dots, n$
 n liczba stopni swobody rozpatrywanego układu,
 $v=1, 2, \dots, w$ numer składowej harmonicznej,
 w liczba składowych harmonicznych,
 $j = \sqrt{-1}$
 $P(t)$ wektor wymuszeń,
 $Q(t)$ wektor przemieszczeń,
 $K(j\omega)$ transmitancja widmowa układu,
 t czas,
 β_r kąt fazowy wymuszenia działającego zgodnie z r -tą współrzędną uogólnioną,
 ψ_r kąt fazowy amplitudy przemieszczeń zgodnej z r -tą współrzędną uogólnioną,
 $\delta\%$ błąd metody SES w stosunku do metody [5],
 μ liczba SES, na które dzielony jest rozpatrywany układ,
 ω częstość kołowa.

1. WSTĘP

Metodę sztywnych elementów skończonych, zaproponowaną przez J. KRUSZEWSKIEGO, omówiono w pracach [1, 2 i 3]. W pracach tych przeanalizowano zastosowanie jej do obliczeń tylko częstości drgań własnych i odpowiadających im form drgań. Niniejsza praca jest kontynuacją wspomnianych wyżej artykułów. Omówiono w niej zastosowanie metody SES do analizy dynamiki złożonych układów liniowych. Układy te mogą być zarówno dyskretne jak i ciągłe, przy czym mogą być tak skomplikowane, że stosowanie do ich analizowania metod tradycyjnych może okazać się zbyt pracochłonne lub nawet niemożliwe.

Metoda SES, ze względu na swoją prostotę i łatwość zaprogramowania na elektroniczną maszynę cyfrową, może znaleźć szerokie zastosowanie do analizy dynamiki złożonych układów, w szczególności do obliczeń drgań wymuszonych.

Układy te rozpatrywane będą bez uwzględnienia tłumienia, co w większości zagadnień konstrukcyjnych jest uzasadnione ze względu na jego mały wpływ na stan dynamiczny układu w obszarach pozarezonansowych. Jak wiadomo, zwykle tak projektuje się konstrukcje, aby zakres częstości wymuszeń był daleki od częstości drgań własnych. Obliczanie amplitud drgań wymuszonych w obszarach rezonansowych jest wtedy zbędne.

Metoda sztywnych elementów skończonych znalazła zastosowanie do obliczeń drgań wymuszonych urządzeń okrętowych umieszczanych na tzw. platformach pływających, podpartych sprężystości [4]. Może ona również znaleźć zastosowanie do obliczeń drgań giętnych wałów śrubowych na wielu podporach, w tym również elastycznych wałów śrubowych typu Grima, drgań kadłubów okrętowych, wreszcie drgań dowolnych układów prętowych i płytowych. Pręty i płyty tych układów mogą mieć dowolne kształty, dowolnie rozłożoną masę oraz mogą być dowolnie podparte i utwierdzone. Przy obliczaniu drgań giętnych uwzględniany jest wpływ ścinania i masowych momentów bezwładności.

Metoda SES jest przystosowana do obliczeń za pomocą elektronicznych maszyn cyfrowych, co znacznie upraszcza przeprowadzaną analizę i rozszerza zakres jej zastosowania.

2. MODEL OBLICZENIOWY

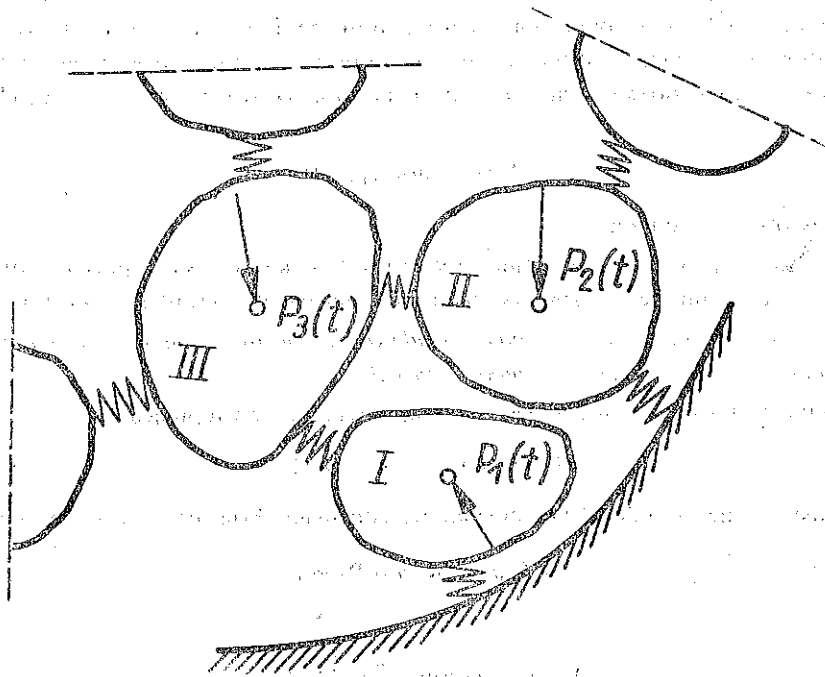
Szczegółowy sposób tworzenia modelu obliczeniowego, przy zastosowaniu metody SES, można znaleźć w pracy [2]. Utworzony jest on przez podział układu rzeczywistego na nieodkształcalne bryły (sztywne elementy skończone) połączone między sobą lub z ostoją nieważkimi elementami sprężystymi o charakterystykach liniowych. Każdy sztywny element skończony określony jest sześcioma masami uogólnionymi, z których pierwsze trzy są masami biorącymi udział w ruchu w kierunku poszczególnych głównych centralnych osi bezwładności, natomiast pozostałe — masowymi momentami bezwładności wokół tych osi. Każdy element sprężysty określony jest sześcioma współczynnikami sztywności. Pierwsze trzy są współczynnikami sztywności liniowej (rozciąganie lub ścinanie), pozostałe współczynnikami sztywności obrotowej (zginanie lub skręcanie).

Sztywne elementy skończone mogą być przyjmowane jako całe urządzenia, w przypadku gdy można je traktować jako nieodkształcalne bryły, lub mogą być tworzone przez dowolnie obmyślony podział fragmentów ciągłych. Podobnie elementy sprężyste mogą być np. sprężynami, podkładkami gumowymi, resorami itp. lub mogą być tworzone przez dowolny podział rzeczywistych układów. Przy dowolnym podziale rozkład masy pozostaje zachowany, natomiast własności sprężyste elementów ciągłych przyjmują wartości dyskretne. Stąd też metodę SES można również nazwać metodą dyskretnego rozkładu sprężystości.

Obciążenie układu przyjmuje się w ten sposób, aby siły wymuszające działały zgodnie z kierunkami współrzędnych uogólnionych. Jeżeli siły te działają inaczej, to należy je zastąpić równoważnym układem sił działających zgodnie z kierunkami

tych współrzędnych. W przypadku tym pod pojęciem sił rozumie się oczywiście również pary sił. Schemat układu obliczeniowego przedstawiono na rys. 1.

Rozważania przeprowadzono dla układów przestrzennych, gdy SES o sześciu stopniach swobody są dowolnie względem siebie zorientowane. W praktyce niejednokrotnie model obliczeniowy można znacznie uprościć, przyjmując SES o mniej-



Rys. 1. Schemat układu obliczeniowego

szej liczbie stopni swobody. Przy obliczaniu płaskich układów można stosować SES o trzech lub dwóch stopniach swobody, a przy obliczaniu drgań skrętnych lub wzdłużnych — o jednym stopniu swobody. Ponadto obliczenia są znacznie prostsze w przypadku, gdy centralne główne osie bezwładności poszczególnych SES i główne osie sztywności elementów sprężystych są wzajemnie równoległe.

3. RÓWNANIA RUCHU

Ruch układu złożonego z SES opisany jest następującymi równaniami, które w zapisie macierzowym mają postać:

$$(3.1) \quad M\ddot{Q}(t) + BQ(t) = P(t),$$

gdzie

$$M = \text{diag} \{m_r\}$$

jest macierzą mas uogólnionych,

$$Q(t) = \text{colon} \{q_r(t)\}$$

wektorem współrzędnych uogólnionych rozpatrywanego układu oraz

$$\mathbf{B} = \{b_{ru}\}$$

macierzą, której wyrazy utworzone są ze współczynników sztywności elementów sprężystych, współrzędnych zamocowania tych elementów oraz z cosinusów kierunkowych między głównymi osiami bezwładności SES i głównymi osiami sztywności elementów sprężystych. Automatyczny sposób budowania tej macierzy bez potrzeby każdorazowego wyprowadzania równań ruchu opisano szczegółowo w pracach [2 i 3]. Ponadto

$$\mathbf{P}(t) = \text{colon} \{p_r(t)\}$$

jest wektorem wymuszeń.

W dalszej części pracy zostanie omówionych kilka typowych przypadków różnych postaci wymuszeń, rozpatrywanych przy zerowych warunkach początkowych.

3.1. *Wektor wymuszeń posiada składowe w postaci funkcji harmonicznycch o jednakowych częstościach i zgodnych fazach*

Postać wektora wymuszeń jest w tym przypadku następująca:

$$(3.2) \quad \mathbf{P}(t) = \text{colon} \{p_r^0 \sin \omega t\}.$$

Podstawiając (3.2) do (3.1) i stosując transformacje Fouriera, otrzymuje się wzór

$$(3.3) \quad \mathbf{Q}(j\omega) = \mathbf{K}(j\omega) \mathbf{P}(j\omega),$$

gdzie

$$\mathbf{Q}(j\omega) = \text{colon} \{q_r^0 e^{j(\omega t + \psi_r)}\},$$

$$\mathbf{P}(j\omega) = \text{colon} \{p_r^0 e^{j\omega t}\}$$

oraz

$$(3.4) \quad \mathbf{K}(j\omega) = [\mathbf{B} - \mathbf{M}\omega^2]^{-1}$$

jest transmitancją widmową układu.

Z zależności (3.3) wynika, że przemieszczenie układu jest również zmienne sinusoidalnie, przy czym amplituda przemieszczenia w kierunku r -tej współrzędnej wynosi

$$(3.5) \quad q_r^0 = \left| \sum_{u=1}^n k_{ru} p_u^0 \right|,$$

faza zaś

$$(3.6) \quad \psi_r = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli} \quad \sum_{u=1}^n k_{ru} p_u^0 > 0, \\ \pi, & \text{jeżeli} \quad \sum_{u=1}^n k_{ru} p_u^0 < 0. \end{cases}$$

Przypadek ten jest często spotykany w praktyce, gdy na układ działa wymuszenie harmoniczne przyłożone tylko w jednym punkcie. Jeżeli wymuszenie to będzie działało zgodnie z i -tą współrzędną uogólnioną, to wzory (3.3), (3.4) i (3.6) przyjmą odpowiednio następującą postać:

$$(3.7) \quad \mathbf{Q}(j\omega) = \mathbf{K}_i(j\omega) p_i^0 e^{j\omega t},$$

$$(3.8) \quad q_r^0 = |k_{ri} p_i^0|,$$

$$(3.9) \quad \psi_r = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } k_{ri} p_i^0 > 0, \\ \pi, & \text{jeżeli } k_{ri} p_i^0 < 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\mathbf{K}_i(j\omega) = \text{colon} \{k_{ri}(j\omega)\}$$

jest i -tą kolumną macierzy $\mathbf{K}(j\omega)$.

Podane wyżej zależności poprawne są również dla obciążeń statycznych. W tym przypadku we wzorach (3.3) i (3.4) $\omega = 0$ i wówczas otrzymuje się zależność

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{P},$$

gdzie \mathbf{P} jest wektorem obciążenia statycznego, \mathbf{Q} wektorem odkształcenia, a \mathbf{B}^{-1} macierzą podatności układu.

Wprowadzając oznaczenia

$$\mathbf{B}^{-1} = \{c_{ur}\}, \quad \mathbf{P} = \text{colon} \{p_u\}, \quad \mathbf{Q} = \text{colon} \{q_u\},$$

uzyskuje się następujący wzór, za pomocą którego wyznacza się przemieszczenie w kierunku i -tej współrzędnej pod wpływem obciążenia określonego wektorem \mathbf{P} :

$$q_i = \sum_{u=1}^n c_{iu} p_u.$$

Jeżeli na rozpatrywany układ działa tylko jedna siła (np. w kierunku r -tej współrzędnej), to powyższy wzór przyjmie postać

$$q_i = c_{ir} p_r.$$

3.2. *Wektor wymuszeń posiada składowe w postaci funkcji harmonicznnych o jednakowych częstościach lecz różnych fazach*

Postać wektora wymuszeń jest w tym przypadku następująca:

$$(3.10) \quad \mathbf{P}(t) = \text{colon} \{p_r^0 \sin(\omega t + \beta_r)\}.$$

Wstawiając (3.10) do (3.1) i stosując transformację Fouriera otrzymuje się wzór

$$(3.11) \quad \mathbf{Q}(j\omega) = \mathbf{K}(j\omega) \mathbf{P}(j\omega),$$

gdzie w tym przypadku

$$(3.12) \quad \mathbf{Q}(j\omega) = \text{colon} \{q_r^0 e^{j(\omega t + \psi_r)}\}$$

oraz

$$(3.13) \quad \mathbf{P}(j\omega) = \text{colon} \{p_r^0 e^{j(\omega t + \beta_r)}\}.$$

Rozpatrując i -te równanie układu równań (3.11) otrzymuje się

$$q_i^0 e^{j(\omega t + \psi_i)} = \sum_{r=1}^n k_{ir} p_r^0 e^{j(\omega t + \beta_r)},$$

a stąd

$$(3.14) \quad q_i^0 e^{j\psi_i} = \sum_{r=1}^n k_{ir} e^{j\beta_r},$$

gdzie

$$k_{ir} = k_{ir} p_r^0.$$

Amplitudę przemieszczenia zgodną z i -tą współrzędną uogólnioną q_i^0 oraz fazę ψ_i uzyskuje się z (3.14) na drodze dodawania wektorów, otrzymując następujące wzory:

$$(3.15) \quad q_i^0 = \sqrt{\left(\sum_{r=1}^n k_{ir} \sin \beta_r\right)^2 + \left(\sum_{r=1}^n k_{ir} \cos \beta_r\right)^2}$$

oraz

$$(3.16) \quad \psi_i = \text{arc tg} \frac{\sum_{r=1}^n k_{ir} \sin \beta_r}{\sum_{r=1}^n k_{ir} \cos \beta_r}.$$

3.3. *Wektor wymuszeń posiada składowe o postaci funkcji harmonicznycch o różnych częstościach i różnych fazach*

Postać wektora wymuszeń jest w tym przypadku następująca:

$$(3.17) \quad \mathbf{P}(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) = \text{colon} \{p_r^0 e^{j(\omega_r t + \beta_r)}\}.$$

Wektor ten można napisać w następującej postaci:

$$(3.18) \quad \mathbf{P}(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) = \sum_{r=1}^n \mathbf{P}_r(j\omega_r),$$

gdzie

$$\mathbf{P}_r(j\omega_r) = \text{colon} \{0, 0, \dots, 0, p_r^0 e^{j(\omega_r t + \beta_r)}, 0, \dots, 0\}.$$

Zgodnie z zasadą superpozycji odnoszącą się do układów liniowych otrzymuje się

$$(3.19) \quad \mathbf{Q}(j\omega_1, j\omega_2, \dots, j\omega_n) = \sum_{r=1}^n \mathbf{Q}_r(j\omega_r),$$

gdzie

$$(3.20) \quad \mathbf{Q}_r(j\omega_r) = \mathbf{K}(j\omega_r) \mathbf{P}_r(j\omega_r) = \mathbf{K}_r(j\omega_r) p_r^0 e^{j(\omega_r t + \beta_r)},$$

przy czym

$$\mathbf{K}_r(j\omega_r) = \text{colon} \{k_{ur}(j\omega_r)\}$$

jest r -tą kolumną macierzy $\mathbf{K}(j\omega_r)$.

Jeżeli oznaczyć przemieszczenie zgodne z i -tą współrzędną uogólnioną pod wpływem wektora wymuszeń $\mathbf{P}_r(j\omega_r)$ przez

$$q_{ir}(j\omega_r) = q_{ir}^0 e^{j(\omega_r t + \psi_{ir})},$$

to z (3.20) otrzymuje się

$$q_{ir}^0 e^{j(\omega_r t + \psi_{ir})} = k_{ir}(j\omega_r) p_r^0 e^{j(\omega_r t + \beta_r)},$$

a stąd

$$(3.21) \quad q_{ir}^0 = |k_{ir}(j\omega_r) p_r^0|$$

oraz

$$(3.22) \quad \psi_{ir} = \begin{cases} \beta_r, & \text{jeżeli } k_{ir}(j\omega_r) p_r^0 > 0, \\ \beta_r + \pi, & \text{jeżeli } k_{ir}(j\omega_r) p_r^0 < 0. \end{cases}$$

Formuły (3.21) i (3.22) wyznaczają amplitudę i fazę przemieszczenia zgodnego z kierunkiem i -tej współrzędnej uogólnionej od wymuszenia działającego z kierunkiem r -tej współrzędnej uogólnionej. Ogólne przemieszczenie wywołane przez wszystkie wymuszenia nie jest funkcją harmoniczną. W praktyce jednak wystarczy znajomość amplitud drgań wymuszonych poszczególnych składników harmonicznym.

3.4. *Wektor wymuszeń posiada składowe o postaci funkcji okresowych nieharmonicznych*

W tym przypadku każdą ze składowych wektora wymuszeń rozkłada się w szereg Fouriera i szereg ten zastępuje się sumą skończoną:

$$(3.23) \quad p_i = \sum_{v=1}^w p_v^0 e^{j(\omega_v t + \beta_v)}$$

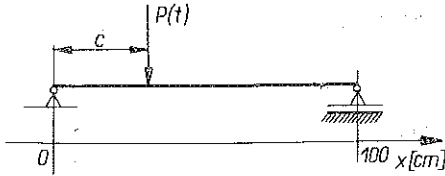
Następnie znajduje się amplitudy i fazy przemieszczeń wywołane poszczególnymi składowymi harmonicznymi według zasad podanych poprzednio i dodaje się otrzymane wyniki zgodnie z zasadą superpozycji.

4. PRZYKŁADY

W przedstawionych przykładach przeprowadzono analizę dokładności metody SES oraz pokazano zastosowanie jej w praktyce. Wszystkie przykłady odnoszą się do belki pryzmatycznej swobodnie podpartej na obu końcach. Omawiany układ jest bardzo prosty, ale dzięki temu można dokonać porównania wyników obliczeń z metodą tradycyjną. Oczywiście metodą SES można przeprowadzać obliczenia układów znacznie bardziej złożonych, dla których inne metody są zbyt pracochłonne lub nawet zawodzą.

We wszystkich przykładach wartości liczbowe podawano w układzie kG, cm, s.

Parametry belki (rys. 2) stanowiącej przedmiot poniższych przykładów są następujące: długość $l=100$ cm, moduł Younga $E=2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², pole powierzchni przekroju poprzecznego $A=2,4$ cm², moment bezwładności przekroju poprzecznego wokół osi obojętnej zginania $J=0,8$ cm⁴, ciężar właściwy $\gamma=0,00833$ kG/cm² oraz współczynnik nierównomiernego rozkładu naprężeń stycznych przy zginaniu $\chi=1,2$.



Rys. 2. Schemat belki podpartej swobodnie

Belkę potraktowano jako układ płaski przyjmując SES o dwóch stopniach swobody (pionowe przemieszczenie środka masy i obrót). Obliczano więc tylko ruch belki w płaszczyźnie pionowej z pominięciem drgań podłużnych.

Przykład 1. W metodzie SES model ciągly układu zastąpiono modelem dyskretnym. Oszacowanie dokładności uzyskano przez porównanie wyników otrzymanych za pomocą metody SES z wynikami uzyskanymi z obliczeń za pomocą metody, którą można uznać za dokładną [5].

Amplituda drgań belki zależy od współrzędnej badanego punktu x , od punktu przyłożenia siły c i od częstości wymuszenia ω . Dokładność metody obliczono w ten sposób, że wybrano największą różnicę przemieszczeń obliczonych metodą SES i metodą [5] dla wszystkich punktów belki, dla wszystkich punktów przyłożenia siły i dla wszystkich częstości wymuszenia leżących w obszarach międzyrezonansowych. W tym celu przyjęto następujące oznaczenia: μ — liczba SES, c — współrzędna punktu przyłożenia siły, q^0 — amplituda drgań belki obliczona metodą SES, q — amplituda drgań belki obliczona metodą wg [5], $\omega_{01}, \omega_{02}, \dots, \omega_{0n}$ — częstości drgań własnych układu oraz $A = \{x: 0 < x < 100\}$, $\Omega_1 = \{\omega: 0 < \omega < \omega_{01} - \Delta_1\}$, $\Omega_k = \{\omega: \omega_{0,k-1} + \Delta_{k-1} < \omega < \omega_{0k} - \Delta_k\}$, gdzie $\Delta_k = 0,05\omega_{0k}$, $k=2, 3, \dots, n$.

Amplituda drgań belki jest funkcją zmiennych c, x, μ, ω : $q^0 = q^0(c, x, \mu, \omega)$, $q^* = q^*(c, x, \mu, \omega)$. Dla oszacowania dokładności metody w tym przypadku wprowadzono zmienną pomocniczą

$$\delta_0(\mu, \omega) = \frac{\lambda_1(\mu, \omega)}{\lambda_2(\mu, \omega)},$$

gdzie

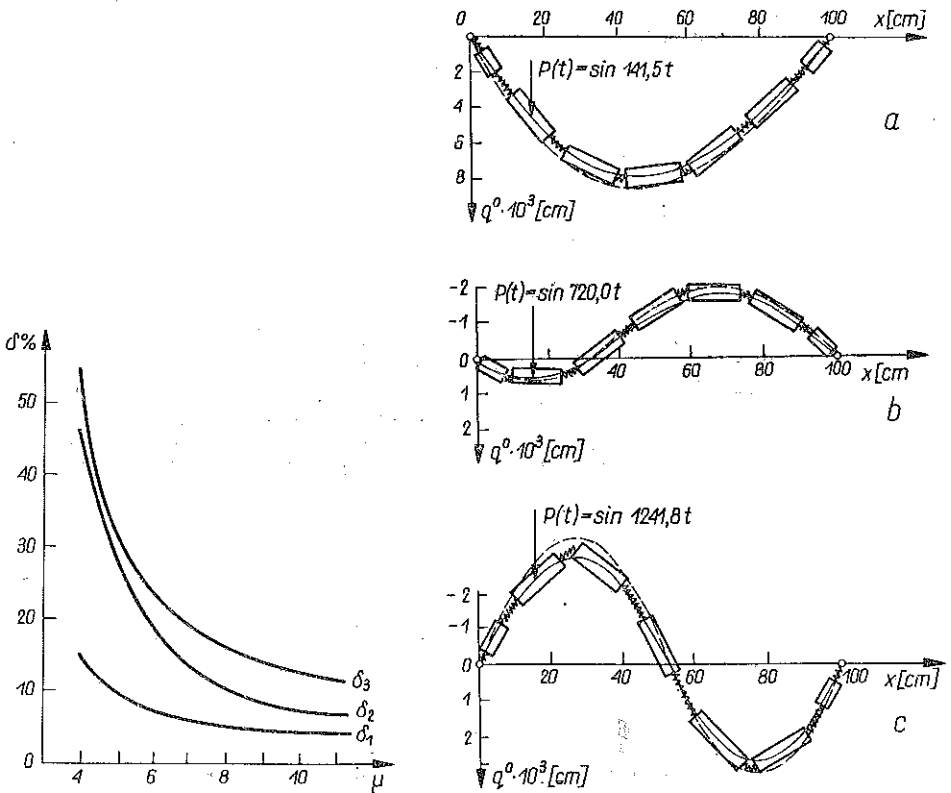
$$\lambda_1(\mu, \omega) = \max_{c \in A} \max_{x \in A} |q^* - q^0|, \quad \lambda_2(\mu, \omega) = \max_{c \in A} \max_{x \in A} |q^*|;$$

wówczas dokładność metody SES w przypadku wymuszeń harmonicznym definiujemy zależnością

$$\delta_k(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\omega \in \Omega_k} \delta_0(\mu, \omega) \cdot 100\%,$$

$k=1, 2, \dots, n$.

Wykres funkcji dokładności δ_k w zależności od gęstości podziału układu na SES pokazano na rys. 3 dla $k=1, 2, 3$ i $\mu=4, 5, 6, \dots, 10$. Na wykresie krzywa δ_1 oznacza dokładność metody przy częstościach mniejszych od pierwszej częstości własnej,

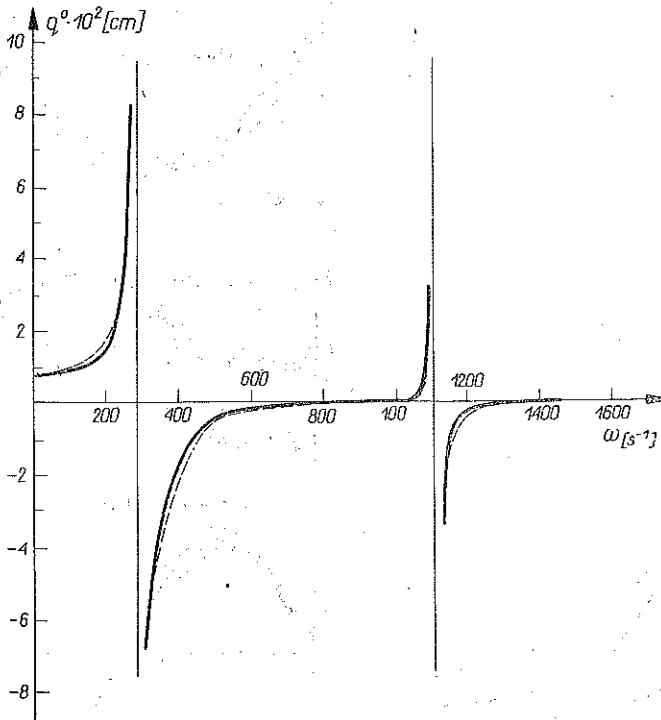


Rys. 3. Dokładność metody SES w stosunku do metody [5] przy obliczaniu amplitudy drgań wymuszonych dla trzech częstości wymuszeń — w zależności od gęstości podziału belki (rys. 2) na sztywne elementy skończone

Rys. 4. Maksymalne ugięcie belki podzielonej na 7 SES, pod wpływem wymuszenia sinusoidalnego. Linia przerywana przedstawia maksymalne ugięcie wyznaczone metodą [5]

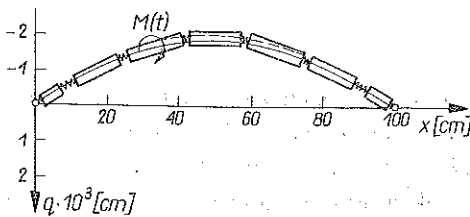
krzywa δ_2 oznacza dokładność metody przy częstościach zawartych między pierwszą a drugą częstością własną, a krzywa δ_3 — dokładność między drugą a trzecią częstością własną. Na osi odciętych odłożono liczbę sztywnych elementów skończonych μ , natomiast na osi rzędnych dokładność w procentach ($\delta\%$) metody SES w stosunku do metody TIMOSHENKI [5]. W tym miejscu należy podkreślić, że metoda, względem której dokonuje się porównania, obciążona jest również błędem, nie uwzględnia ona bowiem wpływu sił stycznych i masowych momentów bezwładności, które to czynniki mają znaczny wpływ na wyższe formy drgań. W metodzie SES czynniki te są uwzględniane, stąd krzywe na rys. 3 dążą do asymptot równoległych do osi odciętych i nieco leżących nad nią.

Przykład 2. Belkę przedstawioną na rys. 2 podzielono na 7 SES w myśl zasad podanych w [2]. Siłę wymuszającą o przebiegu sinusoidalnym o amplitudzie 1 kG przyłożono w środku drugiego SES. Na rys. 4 przedstawiono schematy maksymal-



Rys. 5. Krzywa rezonansowa: — uzyskana metodą SES, - - - uzyskana metodą wg [5]

nych ugięć belki dla trzech wybranych częstotliwości wymuszeń. Pierwsza z tych częstotliwości ($\omega = 141,5 \text{ s}^{-1}$) leży poniżej rezonansu pierwszego stopnia, druga ($\omega = 720,0 \text{ s}^{-1}$) między rezonansem pierwszego i drugiego stopnia, trzecia ($\omega = 1241,7 \text{ s}^{-1}$) między



Rys. 6. Maksymalne ugięcie belki podzielonej na 7 SES pod wpływem wymuszenia sinusoidalnego w postaci momentu przyłożonego do trzeciego SES

samą krzywą (linia przerywana) obliczoną metodą wg [5]. Błąd metody SES nie przekracza 6%.

rezonansem drugiego i trzeciego stopnia. Na rysunku tym przedstawiono również kształt linii ugięcia rozpatrywanej belki, obliczony metodą [5]. Ponadto na rys. 5 przedstawiono krzywą rezonansową dla punktu $x = 22,2 \text{ cm}$, gdy siła wymuszająca przyłożona jest w punkcie o współrzędnej $c = 44,4 \text{ cm}$ (rys. 2) obliczoną metodą SES przy podziale belki na 10 SES oraz tą

Przykład 3. Belkę przedstawioną na rys. 2 podzielono na 7 SES tak jak w poprzednim przykładzie i obciążono momentem zmiennym sinusoidalnie, przyłożonym do trzeciego SES z amplitudą 1 kGcm. Częstota wymuszenia $\omega = 297,3 \text{ s}^{-1}$ jest mniejsza od częstoty drgań własnych pierwszego stopnia. Maksymalne ugięcie belki uzyskane z metody SES przedstawiono na rys. 6.

5. WNIOSKI

1. Metoda SES nadaje się do przeprowadzania obliczeń drgań dowolnych układów o charakterystykach liniowych wymuszanych siłami okresowymi.
2. Dokładność metody jest wystarczająca dla zastosowań inżynierskich.
3. Metoda SES znalazła zastosowanie w biurach konstrukcyjnych przemysłu okrętowego.
4. Metoda SES jest łatwa do zaprogramowania na elektronicznych maszynach cyfrowych.
5. Przygotowanie danych jest proste, a proces obliczeń zautomatyzowany, w związku z czym wiele skomplikowanych obliczeń mogą wykonywać pracownicy techniczni, nie posiadający większego przygotowania teoretycznego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. KRUSZEWSKI, *Application of finite element method to calculations of ship structure vibrations (Theory)*, Eur. Shipbuilding, 3, 1969.
2. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstoty drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Nauk. Pol. Gdańskiej, Mechanika, 12, 1971.
3. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstoty drgań własnych ustrojów okrętowych*, Mech. Teor. i Stros., 4, 1971.
4. J. KRUSZEWSKI, J. MILANOWSKI, W. GAWROŃSKI, J. TARNOWSKI, J. KOZŁOWSKI, *Opracowanie metodyki projektowania zamocowań zespołów prądotwórczych*, Wyd. wewn. Inst. Mech. i Podst. Konstr. Masz. Pol. Gdańskiej, 1971.
5. S. TIMOSHENKO, *Vibration problems in engineering*, D. Van Nostrand Company, Toronto-New York-London 1955.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ СЛОЖНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Суть метода жестких конечных элементов заключается в том, что действительная система заменяется системой, составленной из недеформируемых тел, соединенных друг с другом и с основанием невесомыми упругими элементами с линейными характеристиками. В работе рассмотрено применение этого метода в расчетах колебаний систем без рассеяния энергии, вынуждаемых периодическими воздействиями.

Разработан алгоритм расчетов, основанный на методе жестких конечных элементов и составлена программа на ЭЦВМ. Алгоритм предназначен для применений в польской судостроительной промышленности.

SUMMARY

APPLICATION OF THE STIFF FINITE ELEMENTS METHOD TO THE ANALYSIS OF VIBRATION OF COMPLEX LINEAR SYSTEMS

The method consists in replacing the actual system by a calculation system of stiff finite elements interconnected with linear characteristics. The application of the method to the calculation of undamped vibration forced by periodical forces has been discussed. An algorithm worked out on the basis of the stiff finite elements method has been programmed for a computer and applied in the Polish shipbuilding industry.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1972 r.
