

STATYKA PODŁUŻNIE NIEJEDNORODNEJ PŁYTY REISSNERA O ZMIENNEJ GRUBOŚCI

ANDRZEJ GA WĘ C K I (POZNAŃ)

WSTĘP

Klasyczna teoria płyt, zbudowana w pierwszej połowie ubiegłego stulecia, mimo swych niewątpliwych zalet i wielu wyników zgodnych z doświadczeniem, zawsze budziła zastrzeżenia w odniesieniu do warunków brzegowych. Źródłem tych zastrzeżeń jest niezgodność rzędu równania różniczkowego płyty z liczbą wymaganych warunków brzegowych. Wady tej pozbawiona jest uściślona teoria płyt, sformułowana przez E. REISSNERA [44] w 1944 r. Teoria Reissnera pozwala spełnić trzy warunki na brzegu płyty. Następne prace REISSNERA [45 i 46] zawierają zastosowania tej teorii w zagadnieniu czystego skręcania płyty prostokątnej, w problemach koncentracji naprężeń w sąsiedztwie otworów i teorii płyty sandwichowej. Należy podkreślić, że zastosowania praktyczne z teorii Reissnera w zakresie skręcania prętów i koncentracji naprężeń w płytach dają wyjątkowo dobrą zgodność z rozwiązaniami ścisłymi i doświadczeniem, czego nie można uzyskać posługując się teorią klasyczną.

Zapotrzebowanie przemysłu lotniczego skłoniło F. ESSENBURGA i P. M. NAGHDIEGO [10] do uogólnienia teorii Reissnera na płyty izotropowe o zmiennej grubości. Otrzymane przez nich wyniki potwierdziły w pełni przydatność opracowanej teorii do zagadnień skręcania prętów o jednej osi symetrii.

Celem niniejszej pracy jest rozszerzenie wspomnianej teorii F. Essenburga i P. M. Naghdiego na podłużnie niejednorodne płyty ortotropowe oraz sprowadzenie postawionego problemu do trzech równań przemieszczeniowych. Sformułowanie zagadnienia w postaci układu równań przemieszczeniowych nawiązuje do metody stosowanej w teorii płyt o stałej grubości i umożliwia badanie szerokiego zakresu przypadków skręcania i zginania.

Autor w dostępnej mu literaturze nie napotkał opracowania, które by wyczerpująco omawiało sposób rozwiązywania ogólnych problemów teorii płyt Reissnera o zmiennej grubości. F. ESSENBURG i P. M. NAGHDI ograniczyli się jedynie do wyprowadzenia związków między przemieszczeniami a siłami wewnętrznymi oraz zastosowania ich do zgięcia walcowego i czystego skręcania płyt.

Praca niniejsza zawiera wyprowadzenie równań podstawowych omawianego problemu oraz sprowadzenie ich do trzech równań przemieszczeniowych, w których jako funkcje niewiadome występują średnie kąty obrotu elementów normalnych

do płaszczyzny środkowej oraz średnie ugięcie płyty. Równania przemieszczeniowe stanowią układ liniowych równań różniczkowych cząstkowych o zmiennych współczynnikach. Z analizy zagadnienia brzegowego dla równań przemieszczeniowych wynika osiem wariantów jednorodnych warunków brzegowych.

1. KRÓTKI PRZEGLĄD PRAC DOTYCZĄCYCH UŚCIŚLONYCH TEORII PŁYT

W ostatnim pięćdziesięcioleciu odnotowujemy dużą liczbę prac, które były uściśleniem klasycznej teorii płyt. W przedstawionym tutaj skrótowo przeglądzie nie sposób wymienić wszystkich prac, które udało się zgromadzić. Dlatego też ograniczono się do przedstawienia kilkunastu prac, które, zdaniem autora, wniosły nowe myśli lub reprezentują oryginalny sposób podejścia do omawianego problemu.

Początki teorii płyt średniej grubości i pierwsze uogólnienie teorii klasycznej zawiera praca G. D. BIRKHOFFA [4] z 1922 r. Podstawy teorii płyt średniej grubości podał w 1934 r. A. E. H. LOVE [35] opierając się na założeniach J. H. MICHELLA z 1899 r. N. A. KILCZEWSKI [29] w 1939 r. i W. Z. CHIEN [7] w 1944 r. zajmując się ogólną teorią płyt i powłok rozważali również sposoby uściślenia teorii klasycznej. J. J. STOKER [51] (1942 r.) rozpatrywał matematyczne zagadnienia teorii płyt i przedstawił znaczenie problemu spełnienia trzech warunków brzegowych.

Pierwszą pełną uściśloną teorię płyt, w której uwzględniony został wpływ sił poprzecznych na ugięcie, sformułował w 1944 r. E. REISSNER [44]. W teorii tej odstąpił on od hipotezy normalnego elementu Kirchhoffa-Love'a przyjmując liniowe rozkłady naprężeń, wywołanych działaniem momentów zginających i skręcających. W wyniku tych założeń E. REISSNER otrzymał zamiast równań czwartego rzędu występujących w teorii klasycznej, równania różniczkowe cząstkowe szóstego rzędu, pozwalające spełnić trzy warunki na brzegach płyty. Teorię swą rozwinął w dalszych pracach [45 i 46] i znalazł jej zastosowanie w kilku ważnych z praktycznego punktu widzenia problemach.

Prace Reissnera spowodowały ogromny wzrost zainteresowania problemem uściślenia klasycznej teorii płyt. Świadczy o tym ukazanie się w ostatnim dwudziestoleciu następujących prac: H. HENCKY'EGO [24] (1947 r.), A. KROMMA [32] (1953 r.), K. HATA [23] (1953 r.), L. H. DONNELA [8] (1954 r.), NEGORO SHOSABARO [40] (1954 r.), B. F. WŁASOWA [56] (1957 r.), A. Ł. GOLDENWEJZERA [16] (1958 r.), S. TIMOSHENKI [55] (1959 r.), M. MUSZTARIEGO [39] (1959 r.), Z. KĄCZKOWSKIEGO [25] (1960 r.), [26] (1968 r.), W. W. PONIATOWSKIEGO [42] (1962 r.), Ł. JA. AJNOŁA [1] (1962 r.), W. PANE'A [41] (1964 r.), S. FERSHTA [11] (1964 r.) i C. W. LEE [34] (1967 r.). Każdy z autorów wyżej wymienionych prac zbudował teorię płyt izotropowych, uwzględniającą efekty sił poprzecznych, na nieco innej drodze i przy różnych założeniach odnośnie rozkładów naprężeń wzdłuż grubości płyty. W rezultacie uzyskali oni równania analogiczne do równań Reissnera, różniące się jedynie wielkościami stałych współczynników. Jednocześnie wielu autorów zbudowało uściśloną teorię płyt wychodząc z równań trójwymiarowej liniowej teorii sprężystości, które drogą całkowania asymptotycznego sprowadzili do zagadnienia dwuwymiarowego. Równania te podobnie jak poprzednio różniły się od równań Reissnera współczyn-

nikami stałymi. Wymienić tutaj należy prace E. KOPPEGO [31] (1957 r.), E. L. REISSA [43] (1962 r.) i W. A. KOŁOSA [30] (1966 r.). Odmienne podejście reprezentuje praca A. Ł. GOLDENWEJZERA [17] (1962 r.), w której rozwiązanie uzyskuje się drogą kolejnych iteracji.

S. J. MEDWADOWSKI [36] (1958 r.) opracował nieliniową teorię płyt uwzględniającą wpływ sił poprzecznych. Warunki brzegowe sformułował tak jak REISSNER. Również nieliniową teorię płyt, w której odstąpiono od hipotezy Kirchhoffa-Love'a, zbudował w 1966 r. K. H. ZIMMER [57]. Teoria ta prowadzi do dwóch równań nieliniowych trzeciego rzędu o współczynnikach stałych.

K. GIRKMAN i R. BEER [14] (1958 r.), J. MOSSAKOWSKI [38] (1959 r.), S. G. LECHNICKI [33] (1959 r.), S. A. AMBARCUMIAN [2] (1960 r.), I. G. TEREGUŁOW [52] (1961 r.) oraz Z. KĄCZKOWSKI [26] (1968 r.) rozszerzyli teorię płyt typu Reissnera na płyty anizotropowe o stałej grubości.

Płyty Reissnera, spoczywające na podłożu sprężystym, rozważali F. DANIEL [12] (1955 r.) oraz W. S. GŁAZYRIN [15] (1964 r.), który przeprowadził szczegółową analizę przydatności teorii Reissnera w omawianym zagadnieniu.

Dalsza grupa prac dotyczy płyt poprzecznie niejednorodnych i płyt o zmiennej grubości. Problem płyty trójwarstwowej i związek teorii tej płyty z teorią Reissnera i teorią klasyczną omawiał M. SOKOŁOWSKI [49] (1958 r.). Teorię płyty poprzecznie niejednorodnej przy dosyć ogólnych założeniach co do rozkładu naprężeń i zmienności tensora stałych sprężystości wzdłuż grubości płyty opracował C. STANESCU [50] (1967 r.). Rozszerzeniem teorii na płyty o zmiennej grubości zajmowali się R. D. MINDLIN i M. FORRAY [37] (1954 r.), którzy przyjęli zależności pomiędzy przemieszczeniami a siłami wewnętrznymi takie, jak dla płyt o stałej grubości. Pełną teorię płyt Reissnera o zmiennej grubości sformułowali F. ESSENBERG i P. M. NAGHDI [9 i 10] (1958 r.).

Ogólne problemy teorii płyt Reissnera, rozwiązania osobliwe i zagadnienia jednoznaczności rozwiązań oraz związki tej teorii z uproszczoną teorią płyt trójwarstwowych były przedmiotem rozważań R. GANOWICZA [13] (1966 r.). Rozwiązaniami osobliwymi teorii płyt Reissnera zajmował się również R. J. HARTRANFT [22] (1966 r.). Interesującą pracę na temat ogólnej teorii płyt wywodzącej się z teorii Reissnera opublikował M. HAIMOVICI [21] (1966 r.).

Odnotowujemy również prace doświadczalne nawiązujące do wyników uzyskanych na podstawie teorii płyt Reissnera. Wymienić tu należy prace W. M. ARANOWICZA [3] (1966 r.) i G. W. CHABERLANGA [6] (1966 r.).

Wyjątkową pozycję w omawianym problemie dokładnych teorii płyt zajmuje teoria momentów wyższego rzędu. Teoria ta wywodzi się z prac A. E. GREENA [18 i 19] opublikowanych w 1949 r. Teorię momentów wyższego rzędu rozwinęli w latach 1962 – 1963 R. TIFFEN i F. P. SAYER [54] oraz R. TIFFEN i P. G. LOWE [53]. Podobnie jak to ma miejsce we wszystkich teoriach płyt, problem sprowadzony został do zadania dwuwymiarowego. Dla naprężeń wprowadza się wzory

$$(1.1) \quad \sigma_{ij}^n = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) x_3^n dx_3, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

gdzie $\overset{n}{\sigma}_{ij}$ jest momentem naprężenia σ_{ij} rzędu n . Udoskonalanie teorii płyt polega tutaj na przyjmowaniu coraz to wyższych wartości n . Rząd uzyskanych w ten sposób równań przemieszczeniowych wynosi $2n+4$. Teorie płyt typu Reissnera są więc pierwszym przybliżeniem teorii wyższych momentów naprężeń, gdyż $n=0, 1$. Teoria klasyczna, jak stąd widać, zawiera w sobie znaną sprzeczność polegającą na niezgodności rzędu równania z liczbą wymaganych warunków brzegowych. Przyjmując bowiem $n=0, 1$, otrzymać powinniśmy równanie szóstego rzędu, podczas gdy teoria klasyczna prowadzi do równania czwartego rzędu. Dlatego też rozwiązanie problemu brzegowego wymaga wprowadzenia zastępczej siły poprzecznej, aby liczba warunków brzegowych odpowiadała rzędowi równania.

Dalsze udoskonalenie teorii płyt zawdzięczamy A. E. GREENOWI i P. M. NAGHDIE-MU [20] (1967 r.), którzy nawiązując do teorii momentów wyższego rzędu opracowali teorię uwzględniającą niesymetryczność tensora naprężenia (teoria płyt Cosseratów). W omawianej pracy rozważono w szczególności przypadek zginania nieograniczonej płyty z otworem kołowym. Omówiono zagadnienie koncentracji naprężeń w sąsiedztwie otworu, a uzyskane wyniki opracowano w ten sposób, aby na drodze doświadczalnej można było określić dodatkowe stałe materiałowe, które nie mają swego odpowiednika w klasycznej teorii sprężystości.

2. ZESTAWIENIE WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- a_{KL} techniczne stałe ośrodka ortotropowego,
- δ_{ij} symbol Kroneckera,
- ε_{ij} współrzędne tensora odkształcenia,
- h grubość płyty,
- $M_{\alpha\beta}$ momenty zginające i skręcające,
- m_α, n_β współrzędne wektora jednostkowego, normalnego do elementu powierzchni ograniczających płytę,
- p_g, p_d pionowe obciążenie płyty na górnej i dolnej powierzchni ograniczającej płytę,
- $p_i^{(n)}$ współrzędne wektora naprężenia na powierzchni o normalnej n ,
- Q_γ siły poprzeczne,
- S płaszczyzna środkowa płyty,
- S_g, S_d powierzchnie ograniczające płytę od góry i od dołu,
- σ_{ij} współrzędne tensora naprężenia,
- U energia sprężysta płyty,
- u_i współrzędne wektora przemieszczenia,
- V objętość płyty,
- W potencjał sprężysty,
- w_α średnie kąty obrotu elementu normalnego do płaszczyzny środkowej,
- w_3 średnie przemieszczenie pionowe, ugięcie płyty,
- x_i współrzędne kartezjańskie.

W celu skrócenia zapisu formuł zastosowano zapis wskaźnikowy i konwencję sumacyjną. Wskaźniki oznaczone małymi literami łacińskimi i, j, k, l, r, s, \dots przyjmują wartości 1, 2, 3. Wskaźniki oznaczone literami greckimi $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

przyjmują wartości 1, 2. Przecinek na poziomie wskaźników oznacza pochodną cząstkową względem odpowiedniej współrzędnej. Sumowaniu nie podlegają wielkości, których wskaźniki zawarte są w nawiasie (np. $\sigma_{(ii)}$) oraz wielkości oznaczone dużymi literami alfabetu łacińskiego (np. a_{KL}).

3. WYPROWADZENIE RÓWNAŃ PODSTAWOWYCH

3.1. Założenia

Problem płyty Reissnera rozważany będzie na gruncie liniowej teorii sprężystości. Przyjęto prawoskrętny układ współrzędnych kartezjańskich x_1, x_2, x_3 .

Powierzchnie ograniczające płytę od góry S_g i od dołu S_d są odpowiednio określone następującymi równaniami:

$$(3.1) \quad x_3 = -\frac{1}{2} h(x_1, x_2), \quad x_3 = \frac{1}{2} h(x_1, x_2).$$

Powierzchnia boczna płyty jest walcem o tworzących prostopadłych do płaszczyzny środkowej x_1, x_2 i kierującej C , określonej równaniem

$$(3.2) \quad t(x_1, x_2) = 0.$$

Z założeń powyższych wynika, że kosinusy kierunkowe normalnych n_i do powierzchni górnej i dolnej określają odpowiednio równania:

dla S_g

$$(3.3) \quad n_\alpha = -\frac{1}{2} \frac{h_{,\alpha}}{\left(1 + \frac{1}{4} h_{,\beta} h_{,\beta}\right)^{1/2}}, \quad n_3 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} h_{,\beta} h_{,\beta}\right)^{1/2}};$$

dla S_d

$$n_\alpha = \frac{1}{2} \frac{h_{,\alpha}}{\left(1 + \frac{1}{4} h_{,\beta} h_{,\beta}\right)^{1/2}}, \quad n_3 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} h_{,\beta} h_{,\beta}\right)^{1/2}}.$$

Kosinusy kierunkowe normalnych do powierzchni bocznej określają równania

$$(3.4) \quad m_\alpha = \frac{t_{,\alpha}}{(t_{,\beta} t_{,\beta})^{1/2}}, \quad m_3 = 0.$$

Obciążenie zewnętrzne płyty, przyłożone do powierzchni S_g i S_d , jest prostopadłe do płaszczyzny środkowej i odnosi się do jednostki pola płata powierzchniowego; obciążenia p_g i p_d (rys. 1a) skierowane są ku płaszczyźnie środkowej płyty.

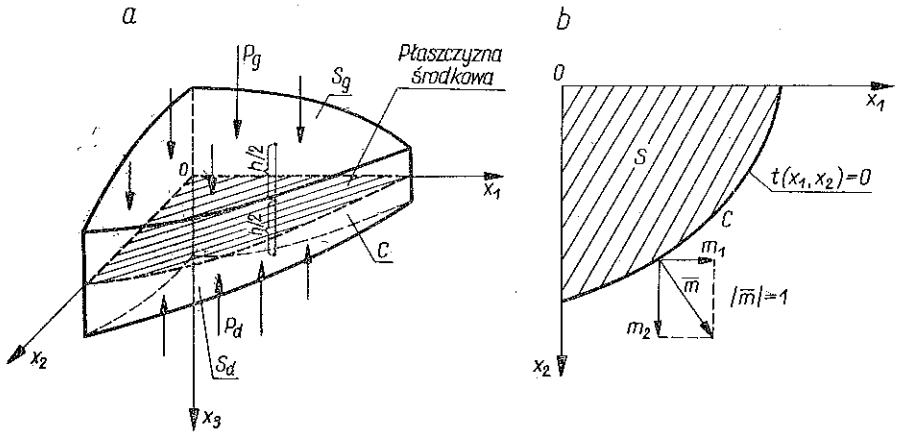
Przemieszczenia zgodnie z założeniami teorii Reissnera określone są za pomocą wzorów

$$(3.5) \quad u_\alpha = x_3 w_\alpha(x_1, x_2), \quad u_3 = w_3(x_1, x_2),$$

gdzie w_α oznaczają średnie kąty obrotu wokół osi układu a w_3 oznacza ugięcie powierzchni środkowej.

Przyjęto założenie Reissnera o liniowości naprężeń:

$$(3.6) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{6M_{\alpha\beta}}{h^2} \frac{x_3}{h/2}.$$



Rys. 1

Rozważany będzie przypadek ortotropii materiału scharakteryzowany dwięcioma stałymi sprężystości. Poza tym przyjęto, że stałe sprężystości są funkcjami współrzędnych x_1 i x_2 .

3.2. Wyznaczenie pozostałych współrzędnych tensora naprężenia. Równania równowagi płyty.

Współrzędne tensora naprężenia powinny spełniać równania różniczkowe równowagi (siły masowe pominięto)

$$(3.7) \quad \sigma_{ji,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3$$

oraz warunki

na powierzchniach S_g i S_d

$$(3.8) \quad p_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j,$$

na powierzchni S_g

$$(3.9) \quad p_i^{(n)} = p_g \delta_{i3},$$

na powierzchni S_d

$$(3.10) \quad p_i^{(n)} = -p_d \delta_{i3},$$

gdzie δ_{i3} jest symbolem Kroneckera.

Siły wewnętrzne zdefiniowane są następująco:

$$(3.11) \quad Q_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3.$$

Wzory na naprężenia σ_{i3} otrzymano po scałkowaniu równań (3.7). Stałe całkowania wyznaczono z warunków na powierzchniach S_g i S_d (3.9) i (3.10). W rezultacie po wykonaniu odpowiednich rachunków uzyskano następujące wzory na naprężenia σ_{i3} :

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha 3} &= \frac{3}{2h} \left\{ Q_\alpha \left[1 - \left(\frac{x_3}{h/2} \right)^2 \right] - M_{\alpha\beta} \frac{h_{,\beta}}{h} \left[1 - 3 \left(\frac{x_3}{h/2} \right)^2 \right] \right\}, \\ \sigma_{33} &= \frac{3}{4} \left\{ -\bar{p} \left[\left(\frac{x_3}{h/2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{x_3}{h/2} \right)^3 \right] - \left[2Q_\alpha \frac{h_{,\alpha}}{h} + M_{\alpha\beta} \frac{h_{,\alpha\beta}}{h} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\left(\frac{x_3}{h/2} \right)^3 - \left(\frac{x_3}{h/2} \right) \right] - 2M_{\alpha\beta} \frac{h_{,\alpha} h_{,\beta}}{h^2} \left[\left(\frac{x_3}{h/2} \right) - 2 \left(\frac{x_3}{h/2} \right)^3 \right] - \frac{2}{3} \bar{p} \right\}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.13) \quad \bar{p} = (p_d - p_g) \left[1 + \frac{1}{4} h_{,\beta} h_{,\beta} \right]^{1/2}, \quad \bar{\bar{p}} = (p_d + p_g) \left[1 + \frac{1}{4} h_{,\beta} h_{,\beta} \right]^{1/2}.$$

Równania równowagi płyty przedstawione w siłach wewnętrznych otrzymano w p. 3.3. niniejszej pracy. Równania te przybierają postać

$$(3.14) \quad M_{\beta\alpha,\beta} - Q_\alpha = 0, \quad Q_{\alpha,\alpha} - \bar{p} = 0.$$

Z równań (3.14) skorzystano przy budowie wzorów na naprężenia σ_{i3} . Należy dodać, że uzyskane równania dla naprężeń różnią się nieco od równań, które podali F. ESSENBURG i P. NAGHDI w pracy [10]. Odminną postać ma równanie na σ_{33} . Równania podane w cytowanej pracy spełniają wszystkie warunki na powierzchniach S_g i S_d , nie spełniają natomiast trzeciego warunku równowagi $\sigma_{j3,j} = 0$.

3.3. Wyprowadzenie równań podstawowych na podstawie zasady Reissnera

W omawianym problemie płyty równanie wariacyjne ułożone na podstawie zasady Reissnera przyjmuje postać [47 i 10]

$$(3.15) \quad \delta \left\{ \int_V [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W(\sigma_{ij}, a_{KL})] dV - \int_{S_g} p_g w_3 dS_g + \int_{S_d} p_d w_3 dS_d - \int_C \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{\beta\alpha}^* m_\beta u_\alpha + \sigma_{\alpha 3}^* m_\alpha w_3) dx_3 dC \right\} = 0,$$

gdzie gwiazdką oznaczono naprężenia występujące na bocznej powierzchni walcowej ograniczającej płytę, a C oznacza kontur płyty na płaszczyźnie $x_1 0x_2$. Symbol $W(\sigma_{ij}, a_{KL})$ oznacza potencjał sprężysty, określony równaniem (por. np. [26], str. 22):

$$(3.16) \quad \begin{aligned} W(\sigma_{ij}, a_{KL}) &= \frac{1}{2} (a_{11} \sigma_{11}^2 + a_{22} \sigma_{22}^2 + a_{33} \sigma_{33}^2 + a_{44} \sigma_{23}^2 + a_{55} \sigma_{13}^2 + a_{66} \sigma_{12}^2) + \\ &\quad + a_{23} \sigma_{22} \sigma_{33} + a_{13} \sigma_{11} \sigma_{33} + a_{12} \sigma_{11} \sigma_{22}. \end{aligned}$$

Wykorzystując równania geometryczne

$$(3.17) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

i wzory (3.5), pierwszą z całek w równaniu (3.15) można napisać następująco:

$$(3.18) \quad \int_V [\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W(\sigma_{ij}, a_{KL})] dV = \int_S [M_{\beta\alpha} w_{\alpha,\beta} + Q_\alpha (w_\alpha + w_{3,\alpha}) - A(M_{\alpha\beta}, Q_\gamma)] dS.$$

Funkcję $A(M_{\alpha\beta}, Q_\gamma)$ uzyskano po scałkowaniu równania (3.16) w przedziale grubości płyty, przy czym uwzględniono tutaj wzory na naprężenia (3.6) i (3.12):

$$\begin{aligned} A(M_{\alpha\beta}, Q_\gamma) = & \frac{6a_{11} M_{11}^2}{h^3} + \frac{12a_{12} M_{11} M_{22}}{h^3} + \frac{6a_{22} M_{22}^2}{h^3} + \frac{6a_{66} M_{12}^2}{h^3} + \\ & + \frac{3}{5h} (M_{11} a_{13} + M_{22} a_{23}) \left[-2\bar{p} + \frac{2}{h} (Q_1 h_{,1} + Q_2 h_{,2}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{h} (M_{11} h_{,11} + 2M_{12} h_{,12} + M_{22} h_{,22}) + \frac{1}{h^2} (M_{11} h_{,1}^2 + 2M_{12} h_{,1} h_{,2} + M_{22} h_{,2}^2) \right] + \\ & + \frac{3}{10h} a_{44} \left[2Q_2^2 - 2Q_2 \left(M_{21} \frac{h_{,1}}{h} + M_{22} \frac{h_{,2}}{h} \right) + 3 \left(M_{21} \frac{h_{,1}}{h} + M_{22} \frac{h_{,2}}{h} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{3}{10h} a_{55} \left[2Q_1^2 - 2Q_1 \left(M_{12} \frac{h_{,2}}{h} + M_{11} \frac{h_{,1}}{h} \right) + 3 \left(M_{12} \frac{h_{,2}}{h} + M_{11} \frac{h_{,1}}{h} \right)^2 \right] + \\ & + a_{33} h \left[\frac{17}{280} \bar{p}^2 + \frac{1}{8} \bar{p}^2 \right] + \frac{3a_{33}}{140h} [4(Q_1 h_{,1} + Q_2 h_{,2})(Q_1 h_{,1} + Q_2 h_{,2} + M_{11} h_{,11} + \\ & + 2M_{12} h_{,12} + M_{22} h_{,22}) + (M_{11} h_{,11} + 2M_{12} h_{,12} + M_{22} h_{,22})^2] + \\ & + \frac{33a_{33}}{280h^3} (M_{11} h_{,1}^2 + 2M_{12} h_{,1} h_{,2} + M_{22} h_{,2}^2)^2 - \\ & - \frac{9a_{33}}{140} \bar{p} [2(Q_1 h_{,1} + Q_2 h_{,2}) + (M_{11} h_{,11} + 2M_{12} h_{,12} + M_{22} h_{,22})] - \\ & - \frac{3a_{33}}{70h} \bar{p} (M_{11} h_{,1}^2 + 2M_{12} h_{,1} h_{,2} + M_{22} h_{,2}^2) - \frac{3a_{33}}{140h^2} [2(Q_1 h_{,1} + Q_2 h_{,2}) + \\ & + (M_{11} h_{,11} + 2M_{12} h_{,12} + M_{22} h_{,22})] (M_{11} h_{,1}^2 + 2M_{12} h_{,1} h_{,2} + M_{22} h_{,2}^2). \end{aligned}$$

Całki powierzchniowe pierwszego rodzaju można zamienić na całki po obszarze płaskim ([5], str. 539). Wobec tego

$$- \int_{S_g} p_g w_3 dS_g + \int_{S_d} p_d w_3 dS_d = \int_S (p_d - p_g) w_3 \left(1 + \frac{1}{4} h_{,\alpha} h_{,\alpha} \right)^{1/2} dS = \int_S \bar{p} w_3 dS.$$

Ostatnią z całek w równaniu (3.15) można przedstawić w postaci

$$(3.19) \quad \oint_C \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{\beta\alpha}^* m_\beta u_\alpha + \sigma_{\alpha 3}^* m_\alpha w_3) dx_3 dC = \oint_C (M_{\beta\alpha}^* w_\alpha m_\beta + Q_\alpha^* w_3 m_\alpha) dC.$$

Podstawiając znalezione wielkości do (3.15) otrzymujemy równanie wariacyjne

$$(3.20) \quad \delta \left\{ \int_S [M_{\beta\alpha} w_{\alpha, \beta} + Q_\alpha (w_\alpha + w_{3, \alpha}) - \Lambda (M_{\alpha\beta}, Q_\gamma) + \bar{p} w_3] dS - \right. \\ \left. - \oint_C (M_{\beta\alpha}^* w_\alpha m_\beta + Q_\alpha^* w_3 m_\alpha) dC \right\} = 0.$$

W równaniu (3.20) wariacji podlegają zarówno przemieszczenia w_i jak i siły wewnętrzne $M_{\alpha\beta}$ i Q_γ . Wariacje pochodnych przemieszczeń wyeliminowano korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji oraz ze wzoru Ostrogradskiego-Gaussa dla obszaru dwuwymiarowego ([48], str. 215). Po wykonaniu wariacji wszystkich całek występujących w równaniu (3.20) otrzymano następujące równanie:

$$(3.21) \quad \int_S \left\{ (-M_{\beta\alpha, \beta} + Q_\alpha) \delta w_\alpha + (-Q_{\alpha, \alpha} + \bar{p}) \delta w_3 + \left[\frac{1}{2} (w_{\alpha, \beta} + w_{\beta, \alpha}) - \frac{\partial \Lambda}{\partial M_{\alpha\beta}} \right] \times \right. \\ \left. \times \delta M_{\alpha\beta} + \left(w_\alpha + w_{3, \alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial Q_\alpha} \right) \delta Q_\alpha \right\} dS + \oint_C \{ [M_{\beta\alpha} - M_{\beta\alpha}^*] m_\beta \delta w_\alpha + \\ + [Q_\alpha - Q_\alpha^*] m_\alpha \delta w_3 \} dC = 0.$$

Na podstawie zasadniczego lematu rachunku wariacyjnego, przy założeniu ciągłości funkcji podcałkowych, z równania (3.21) wynikają następujące równania:

równania równowagi

$$(3.22) \quad M_{\beta\alpha, \beta} - Q_\alpha = 0, \quad Q_{\alpha, \alpha} - \bar{p} = 0;$$

równania łączące przemieszczenia z siłami wewnętrznymi

$$(3.23) \quad w_{1,1} - \frac{\partial \Lambda}{\partial M_{11}} = 0, \quad w_{1,2} + w_{2,1} - \frac{\partial \Lambda}{\partial M_{12}} = 0, \quad w_{2,2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial M_{22}} = 0, \\ w_1 + w_{3,1} - \frac{\partial \Lambda}{\partial Q_1} = 0, \quad w_2 + w_{3,2} - \frac{\partial \Lambda}{\partial Q_2} = 0;$$

warunki brzegowe

$$(3.24) \quad M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^*, \quad Q_\gamma = Q_\gamma^*.$$

Równania (3.22) i (3.23) stanowią układ ośmiu równań o ośmiu niewiadomych $M_{\alpha\beta}$, Q_γ , w_i . Układ ten tworzy układ równań podstawowych omawianego problemu płyty.

Współczynniki równań podstawowych dla płyty ortotropowej o zmiennej grubości tworzą następującą tablicę kwadratową:

Tablica 1. (3.25)

M_{11}	M_{12}	M_{22}	Q_1	Q_2	w_1	w_2	w_3	\bar{p}
f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	$-\frac{\partial}{\partial x_1}$	0	0	f_1
f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	$-\frac{\partial}{\partial x_2}$	$-\frac{\partial}{\partial x_1}$	0	f_2
f_{31}	f_{32}	f_{33}	f_{34}	f_{35}	0	$-\frac{\partial}{\partial x_2}$	0	f_3
f_{41}	f_{42}	f_{43}	f_{44}	f_{45}	-1	0	$-\frac{\partial}{\partial x_1}$	f_4
f_{51}	f_{52}	f_{53}	f_{54}	f_{55}	0	-1	$-\frac{\partial}{\partial x_2}$	f_5
$-\frac{\partial}{\partial x_1}$	$-\frac{\partial}{\partial x_2}$	0	1	0	0	0	0	0
0	$-\frac{\partial}{\partial x_1}$	$-\frac{\partial}{\partial x_2}$	0	1	0	0	0	0
0	0	0	$-\frac{\partial}{\partial x_1}$	$-\frac{\partial}{\partial x_2}$	0	0	0	-1

Ostatnia kolumna zawiera współczynniki przy wyrazie obciążeniowym po przeniesieniu na prawą stronę.

gdzie f_{AB} i f_A ($AB=1, 2, 3, 4, 5$) są funkcjami współrzędnych x_1 i x_2 , przy czym pierwsze z nich są symetryczne względem wskaźników,

$$(3.26) \quad f_{AB} = f_{BA}.$$

Współczynniki f_{AB} określają następujące wzory:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} f_{11} &= \frac{12a_{11}}{h^3} + \frac{6a_{13}}{5h^3} (h_{,11}h + h_{,1}^2) + \frac{9a_{55}}{5h^3} h_{,1}^2 + \frac{3a_{33}}{140h^3} (2h_{,11}^2 h^2 + \\ &\quad + 11h_{,1}^4 - 2h_{,1}^2 h_{,11} h), \\ f_{12} &= \frac{6a_{13}}{5h^3} (h_{,12}h + h_{,1}h_{,2}) + \frac{9a_{55}}{5h^3} h_{,1}h_{,2} + \frac{3a_{33}}{70h^3} (2h_{,11}h_{,12}h^2 + \\ &\quad + 11h_{,1}^3 h_{,2} - hh_{,1}^2 h_{,12} - h_{,1}h_{,2}h_{,11}h), \\ f_{13} &= \frac{12a_{12}}{h^3} + \frac{3a_{13}}{5h^3} (h_{,22}h - h_{,2}^2) + \frac{3a_{23}}{5h^3} (h_{,11}h + h_{,1}^2) + \\ &\quad + \frac{3a_{33}}{140h^3} (2h_{,11}h_{,22}h^2 + 11h_{,1}^2 h_{,2}^2 - hh_{,1}^2 h_{,22} - hh_{,2}^2 h_{,11}), \\ f_{14} &= \frac{6a_{13}}{5h^2} h_{,1} - \frac{3a_{55}}{5h^2} h_{,1} + \frac{3a_{33}}{70h^2} (2h_{,11}h_{,1}h - h_{,1}^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.27) \quad & f_{15} = \frac{6a_{13}}{5h^2} h_{,2} + \frac{3a_{33}}{70h^2} (2h_{,11} h_{,2} h - h_{,1}^2 h_{,2}), \\
 & [c.d.] \\
 & f_1 = \frac{6a_{13}}{5h} + \frac{3a_{33}}{140h} (3h_{,11} h + 2h_{,1}^2), \\
 & f_{22} = \frac{12a_{66}}{h^3} + \frac{9a_{44}}{5h^3} h_{,1}^2 + \frac{9a_{55}}{5h^3} h_{,2}^2 + \frac{3a_{33}}{35h^3} (2h_{,12}^2 h^2 + \\
 & \quad + 11h_{,1}^2 h_{,2}^2 - 2h_{,1} h_{,2} h_{,12} h), \\
 & f_{23} = \frac{6a_{23}}{5h^3} (h_{,12} h + h_{,1} h_{,2}) + \frac{9a_{44}}{5h^3} h_{,1} h_{,2} + \\
 & \quad + \frac{3a_{33}}{70h^3} (2h_{,12} h_{,22} h^2 + 11h_{,1} h_{,2}^3 - h_{,1} h_{,2} h_{,22} h - h_{,2}^2 h_{,12} h), \\
 & f_{24} = -\frac{3a_{55}}{5h^2} h_{,2} + \frac{3a_{33}}{35h^2} (2h_{,1} h_{,12} h - h_{,1}^2 h_{,2}), \\
 & f_{25} = -\frac{3a_{44}}{5h^2} h_{,1} + \frac{3a_{33}}{35h^2} (2h_{,2} h_{,12} h - h_{,2}^2 h_{,1}), \\
 & f_2 = \frac{3a_{33}}{70h} (3hh_{,12} + 2h_{,1} h_{,2}), \\
 & f_{33} = \frac{12a_{22}}{h^3} + \frac{6a_{23}}{5h^3} (h_{,22} h + h_{,2}^2) + \frac{9a_{44}}{5h^3} h_{,2}^2 + \\
 & \quad + \frac{3a_{33}}{140h^3} (2h_{,22}^2 h^2 + 11h_{,2}^4 - 2h_{,2}^2 h_{,22} h), \\
 & f_{34} = \frac{6a_{23}}{5h^2} h_{,1} + \frac{3a_{33}}{70h^2} (2h_{,22} h_{,1} h - h_{,1} h_{,2}^2), \\
 & f_{35} = \frac{6a_{23}}{5h^2} h_{,2} - \frac{3a_{44}}{5h^2} h_{,2} + \frac{3a_{33}}{70h^2} (2h_{,22} h_{,2} h - h_{,2}^3), \\
 & f_3 = \frac{6a_{23}}{5h} + \frac{3a_{33}}{140h} (2h_{,2}^2 + 3h_{,22} h), \\
 & f_{44} = \frac{6a_{55}}{5h} + \frac{6a_{33}}{35h} h_{,1}^2, \\
 & f_{45} = \frac{6a_{33}}{35h} h_{,1} h_{,2}, \\
 & f_4 = \frac{9a_{33}}{70} h_{,1}, \\
 & f_{55} = \frac{6a_{44}}{5h} + \frac{6a_{33}}{35h} h_{,2}^2, \quad f_5 = \frac{9a_{33}}{70} h_{,2}.
 \end{aligned}$$

3.4. *Równania podstawowe dla ortotropowej płyty niejednorodnej o stałej grubości spoczywającej na niejednorodnym podłożu sprężystym*

Rozważania ograniczono do przypadku płyty o stałej grubości $h = \text{const}$. Ograniczenie to jest konieczne, ponieważ uwzględniono jedynie obciążenie siłami pionowymi (por. p. 3.1), podczas gdy zmienna grubość płyty ze względu na hydrostatyczny charakter reakcji podłoża pociąga za sobą wystąpienie sił poziomych. Przyjęto dalej, że współczynnik podłoża jest funkcją położenia:

$$(3.28) \quad k = k(x_1, x_2).$$

We wzorach na naprężenia (3.12) i (3.13) należy uwzględnić, że

$$(3.29) \quad p_d = k(x_1, x_2) w_3(x_1, x_2).$$

Z zależności (3.29) uzyskujemy

$$(3.30) \quad \bar{p} = kw_3 - p, \quad \bar{\bar{p}} = kw_3 + p,$$

gdzie $p = p_g$.

Uwzględniając związki (3.29) i (3.30) oraz biorąc pod uwagę stałą grubość płyty, wzorowi (3.18) określającemu funkcję $A(M_{\alpha\beta}, Q_\gamma)$ nadajemy postać

$$(3.31) \quad A = A(M_{\alpha\beta}, Q_\gamma, w_3) = \frac{6a_{11} M_{11}^2}{h^3} + \frac{6a_{22} M_{22}^2}{h^3} + \frac{6a_{66} M_{12}^2}{h^3} + \frac{12a_{12} M_{11} M_{22}}{h^3} + \\ + \frac{3}{5h} (M_{11} a_{13} + M_{22} a_{23}) (2p - 2kw_3) + \frac{3}{5h} a_{44} Q_2^2 + \frac{3}{5h} a_{55} Q_3^2 + \\ + a_{33} h \left[\frac{17}{280} (p - kw_3)^2 + \frac{1}{8} (p + kw_3) \right].$$

Równanie wariacyjne (3.20) ulegnie pewnej modyfikacji:

$$(3.32) \quad \delta \left\{ \int_S [M_{\beta\alpha} w_{\alpha, \beta} + Q_\alpha (w_\alpha + w_{3, \alpha}) - A(M_{\alpha\beta}, Q_\gamma, w_3) + kw_3^2 - pw_3] dS - \right. \\ \left. - \int_C (M_{\beta\alpha}^* w_\alpha m_\beta + Q_\alpha^* w_3 m_\alpha) dC \right\} = 0.$$

Po wykonaniu wariacji i wykorzystaniu twierdzenia Greena uzyskano równanie

$$(3.33) \quad \int_S \left\{ (-M_{\beta\alpha, \beta} + Q_\alpha) \delta w_\alpha + \left(-Q_{\alpha, \alpha} - \frac{\partial A}{\partial w_3} - p + 2kw_3 \right) \delta w_3 + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} (w_{\alpha, \beta} + w_{\beta, \alpha}) - \frac{\partial A}{\partial M_{\alpha\beta}} \right] \delta M_{\alpha\beta} + \left(w_\alpha + w_{3, \alpha} - \frac{\partial A}{\partial Q_\alpha} \right) \delta Q_\alpha \right\} dS - \\ - \int_C \{ [M_{\beta\alpha} - M_{\beta\alpha}^*] m_\beta \delta w_\alpha + [Q_\alpha - Q_\alpha^*] m_\alpha \delta w_3 \} dC = 0.$$

Współczynniki równań podstawowych dla płyty o stałej grubości spoczywającej na podłożu sprężystym tworzą następującą tablicę:

Tablica 2. (3.3)₄

M_{11}	M_{12}	M_{22}	Q_1	Q_2	w_1	w_2	w_3	p
f_{11}	0	f_{13}	0	0	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	0	$-f_{18}$	$-f_1$
0	f_{22}	0	0	0	$\frac{\partial}{\partial x_2}$	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	0	0
f_{31}	0	f_{33}	0	0	0	$\frac{\partial}{\partial x_2}$	$-f_{38}$	$-f_3$
0	0	0	$-f_{44}$	0	1	0	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	0
0	0	0	0	$-f_{55}$	0	1	$\frac{\partial}{\partial x_2}$	0
$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$	0	1	0	0	0	0	0
0	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$	0	1	0	0	0	0
$-f_{81}$	0	$-f_{83}$	$\frac{\partial}{\partial x_1}$	$\frac{\partial}{\partial x_2}$	0	0	f_{88}	$-f_8$

gdzie $f_{AB}=f_{BA}$ ($A, B=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$), $f_{11}=\frac{12}{h^3}a_{11}$, $f_{13}=\frac{12}{h^3}a_{12}$, $f_{22}=\frac{12}{h^3}a_{66}$,
 $f_{33}=\frac{12}{h^3}a_{22}$, $f_{44}=\frac{6}{5h}a_{55}$, $f_{55}=\frac{6}{5h}a_{44}$, $f_{18}=\frac{6}{5h}ka_{13}$, $f_{38}=\frac{6}{5h}ka_{23}$, $f_{88}=\frac{13}{35} \times$
 $\times k^2a_{33}h-2k$, $f_1=\frac{6}{5h}a_{13}$, $f_3=\frac{6}{5h}a_{23}$, $f_8=1+\frac{9}{70}hka_{33}$.

4. SPROWADZENIE RÓWNAŃ PODSTAWOWYCH DO TRZECH RÓWNAŃ PRZEMIESZCZENIOWYCH

W celu uzyskania równań przemieszczeniowych pierwsze pięć równań podstawowych rozwiązano ze względu na $M_{\alpha\beta}$ i Q_j . Otrzymane w ten sposób wyrażenia podstawiono do pozostałych trzech równań (równań równowagi). W efekcie uzyskano układ trzech równań różniczkowych cząstkowych na funkcje w_i :

$$(4.1) \quad L_{ij}w_j = P_i.$$

Są to poszukiwane równania przemieszczeniowe.

4.1. Ortotropowa płyta niejednorodna o zmiennej grubości

W układzie równań przemieszczeniowych (4.1) L_{ij} oznaczają operatory różniczkowe o zmiennych współczynnikach, a P_i są znanymi funkcjami położenia:

$$(4.2) \quad L_{i\alpha} = A_{i\alpha} + B_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_1} + C_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial x_2} + D_{i\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + E_{i\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_{i\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$(4.2) \quad L_{i3} = A_{i1} \frac{\partial}{\partial x_1} + A_{i2} \frac{\partial}{\partial x_2} + D_{i3} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + E_{i3} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_{i3} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

[c.d.]

$$P_1 = P_1(x_1, x_2) = - \sum_{A=1}^5 \left\{ \left[\bar{p}f_A \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial(\bar{p}f_A)}{\partial x_1} \right] g_{1A} + \left[\bar{p}f_A \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial(\bar{p}f_A)}{\partial x_2} \right] g_{2A} - \bar{p}f_A g_{4A} \right\},$$

$$P_2 = P_2(x_1, x_2) = - \sum_{A=1}^5 \left\{ \left[\bar{p}f_A \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial(\bar{p}f_A)}{\partial x_1} \right] g_{2A} + \left[\bar{p}f_A \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial(\bar{p}f_A)}{\partial x_2} \right] g_{3A} - \bar{p}f_A g_{5A} \right\},$$

$$P_3 = P_3(x_1, x_2) = \bar{p} - \sum_{A=1}^5 \left\{ \left[\bar{p}f_A \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial(\bar{p}f_A)}{\partial x_1} \right] g_{4A} + \left[\bar{p}f_A \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial(\bar{p}f_A)}{\partial x_2} \right] g_{5A} \right\}.$$

Funkcje A_{ia} , B_{ia} , C_{ia} , D_{ij} , E_{ij} i F_{ij} są znane i zależą od współrzędnych x_1, x_2 :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} A_{11} &= \frac{\partial g_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{24}}{\partial x_2} - g_{44}, & B_{11} &= \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_2}, \\ A_{12} &= \frac{\partial g_{15}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{25}}{\partial x_2} - g_{45}, & B_{12} &= \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} - g_{42} + g_{15}, \\ A_{21} &= \frac{\partial g_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{34}}{\partial x_2} - g_{45}, & B_{21} &= \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x_2} - g_{51} + g_{24}, \\ A_{22} &= \frac{\partial g_{25}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{35}}{\partial x_2} - g_{55}, & B_{22} &= \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x_2}, \\ A_{31} &= \frac{\partial g_{44}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{54}}{\partial x_2}, & B_{31} &= \frac{\partial g_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{51}}{\partial x_2} + g_{44}, \\ A_{32} &= \frac{\partial g_{45}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{55}}{\partial x_2}, & B_{32} &= \frac{\partial g_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{52}}{\partial x_2} + g_{45}, \\ C_{11} &= \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x_2}, & D_{11} &= g_{11}, \\ C_{12} &= \frac{\partial g_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x_2} - g_{43} + g_{25}, & D_{12} &= g_{12}, \\ C_{21} &= \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x_2} - g_{52} + g_{34}, & D_{13} &= g_{14}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad [c.d.] \quad C_{22} &= \frac{\partial g_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x_2}, & D_{22} &= g_{22}, \\
 C_{31} &= \frac{\partial g_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{52}}{\partial x_2} + g_{45}, & D_{23} &= g_{24}, \\
 C_{32} &= \frac{\partial g_{43}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{53}}{\partial x_2} + g_{55}, & D_{33} &= g_{44}, \\
 E_{11} &= 2g_{12}, & E_{22} &= 2g_{23}, \\
 E_{12} &= g_{13} + g_{22}, & E_{23} &= g_{25} + g_{34}, \\
 E_{13} &= g_{15} + g_{24}, & E_{33} &= 2g_{54}, \\
 F_{11} &= g_{22}, & F_{22} &= g_{33}, \\
 F_{12} &= g_{23}, & F_{23} &= g_{35}, \\
 F_{13} &= g_{25}, & F_{33} &= g_{55},
 \end{aligned}$$

przy czym $D_{ij} = D_{ji}$, $E_{ij} = E_{ji}$ oraz $F_{ij} = F_{ji}$. Z tej symetrii wynika symetria operatorów różniczkowych drugiego rzędu, $L_{ij}^{(2)} = L_{ji}^{(2)}$.

Funkcje g_{AB} ($A, B = 1, 2, 3, 4, 5$) są elementami macierzy odwrotnej do macierzy $[f_{AB}]$:

$$(4.4) \quad [g_{AB}] = [g_{BA}] = [f_{AB}]^{-1} = \frac{\bar{f}_{AB}}{[[f_{AB}]]},$$

gdzie \bar{f}_{AB} jest dopełnieniem algebraicznym macierzy $[f_{AB}]$. Nieodzwone jest, aby wyznacznik macierzy $[f_{AB}]$ był różny od zera.

Układ równań różniczkowych (4.1) opisuje problem zginania płyty ortotropowej o zmiennej grubości. Jeśli przyjąć, że współczynniki sprężystości a_{KL} są funkcjami x_1, x_2 , to równania (4.1) odnoszą się do płyty niejednorodnej w płaszczyźnie $x_1 O x_2$.

W równaniach (4.3) należy uwzględnić, że

$$g_{AB} = g_{AB}[h(x_1, x_2), h, \alpha(x_1, x_2), h, a_{\beta}(x_1, x_2), a_{KL}(x_1, x_2)],$$

co prowadzi do następującego wzoru na pochodne funkcji g_{AB}

$$(4.5) \quad \frac{\partial g_{AB}}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial g_{AB}}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{AB}}{\partial h_{,\beta}} \frac{\partial h_{,\beta}}{\partial x_\alpha} + \frac{g_{AB}}{\partial h_{,\beta\gamma}} \frac{\partial h_{,\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial g_{AB}}{\partial a_{KL}} \frac{\partial a_{KL}}{\partial x_\alpha}.$$

Jeżeli grubość płyty jest stała, płyta izotropowa a materiał jednorodny, to równania przemieszczeniowe (4.1) uzyskują znaną postać (por. [13], str. 58).

4.2. Ortotropowa płyta niejednorodna o stałej grubości, spoczywająca na niejednorodnym podłożu sprężystym

Budowa operatorów różniczkowych L_{ij} w równaniu (4.1) ulega w tym przypadku pewnej modyfikacji:

$$(4.6) \quad L_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \frac{\partial}{\partial x_1} + C_{ij} \frac{\partial}{\partial x_2} + D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + E_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + F_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenia

$$(4.7) \quad \begin{aligned} b_{11} &= \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, & b_{12} &= \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, & b_{22} &= \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \\ b_{44} &= \frac{1}{a_{44}}, & b_{55} &= \frac{1}{a_{55}}, & b_{66} &= \frac{1}{a_{66}}, \end{aligned}$$

to funkcje A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , D_{ij} , E_{ij} oraz F_{ij} określają następujące wzory:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} A_{11} &= \frac{-5h}{6} b_{55}, & A_{13} &= \frac{h^2}{10} \frac{\partial}{\partial x_1} [k(b_{22}a_{13} - b_{12}a_{23})], & A_{22} &= -\frac{5h}{6} b_{44}, \\ A_{23} &= \frac{h^2}{10} \frac{\partial}{\partial x_2} [k(b_{11}a_{23} - b_{12}a_{13})], & A_{31} &= -\frac{5h}{6} \frac{\partial b_{55}}{\partial x_1}, \\ A_{32} &= -\frac{5h}{6} \frac{\partial b_{44}}{\partial x_2}, & A_{33} &= \frac{3h}{25} k^2 [b_{11}a_{23}^2 - 2b_{12}a_{13}a_{23} + b_{22}a_{12}^2] + \\ & & & & & + 2k - \frac{13h}{35} k^2 a_{33}, \\ B_{11} &= \frac{h^3}{12} \frac{\partial b_{22}}{\partial x_2}, & B_{12} &= \frac{h^3}{12} \frac{\partial b_{66}}{\partial x_2}, \\ B_{13} = B_{31} &= \frac{h^2}{10} \left[k(b_{22}a_{13} - b_{12}a_{23}) - \frac{25}{3h} b_{55} \right], \\ B_{21} &= -\frac{h^2}{12} \frac{\partial b_{12}}{\partial x_2}, & B_{22} &= \frac{h^3}{12} \frac{\partial b_{66}}{\partial x_1}, & B_{33} &= -\frac{5h}{6} \frac{\partial b_{55}}{\partial x_1}, \\ C_{11} &= \frac{h^3}{12} \frac{\partial b_{66}}{\partial x_2}, & C_{12} &= -\frac{h^3}{12} \frac{\partial b_{12}}{\partial x_1}, & C_{21} &= \frac{h^3}{12} \frac{\partial b_{66}}{\partial x_1}, \\ C_{22} &= \frac{h^3}{12} \frac{\partial b_{11}}{\partial x_2}, & C_{23} = C_{32} &= \frac{h^2}{10} \left[k(b_{11}a_{23} - b_{12}a_{13}) - \frac{25}{3h} b_{44} \right], \\ C_{33} &= -\frac{5h}{6} \frac{\partial b_{44}}{\partial x_2}, \\ D_{11} &= \frac{h^3}{12} b_{22}, & D_{22} &= \frac{h^3}{12} b_{66}, & D_{33} &= -\frac{5h}{6} b_{55}, \\ E_{12} = E_{21} &= \frac{h^3}{12} (b_{66} - b_{12}), \\ F_{11} &= \frac{h^3}{12} b_{66}, & F_{22} &= \frac{h^3}{12} b_{11}, & F_{33} &= -\frac{5h}{6} b_{44}. \end{aligned}$$

Pozostałe współczynniki funkcyjne są równe zeru.

Funkcje P_i występujące w równaniu (4.1) są następujące:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} P_1 &= \frac{h^2}{10} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (b_{22} a_{13} - b_{12} a_{23}) + (b_{22} a_{13} - b_{12} a_{23}) \frac{\partial}{\partial x_1} \right] p, \\ P_2 &= \frac{h^2}{10} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} (b_{11} a_{23} - b_{12} a_{13}) + (b_{11} a_{23} - b_{12} a_{13}) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] p, \\ P_3 &= \left[1 + \frac{9h}{70} k a_{33} + \frac{3h}{25} k (b_{11} a_{23}^2 - 2b_{12} a_{13} a_{23} + b_{22} a_{13}^2) \right] p. \end{aligned}$$

Uzyskane wzory na współczynniki funkcyjne obejmują przypadki szczególne, np. przypadek płyty niejednorodnej spoczywającej na jednorodnym podłożu sprężystym ($k = \text{const}$), płyty jednorodnej spoczywającej na niejednorodnym podłożu sprężystym ($a_{KL}, b_{KL} = \text{const}$) oraz znany przypadek [15] płyty jednorodnej na jednorodnym podłożu sprężystym ($k, a_{KL}, b_{KL} = \text{const}$).

Jest oczywiste, że równania przemieszczeniowe (4.1) są poprawne jedynie wówczas, gdy operacje różniczkowania określone wzorami (4.2), (4.3) (4.5) i (4.9) są wykonalne. Ogranicza to klasy funkcji wyrażających zmianę grubości płyty i stałych materiałowych.

5. WARUNKI BRZEGOWE

Warunki brzegowe zanalizowano na podstawie wzorów określających pracę sił brzegowych.

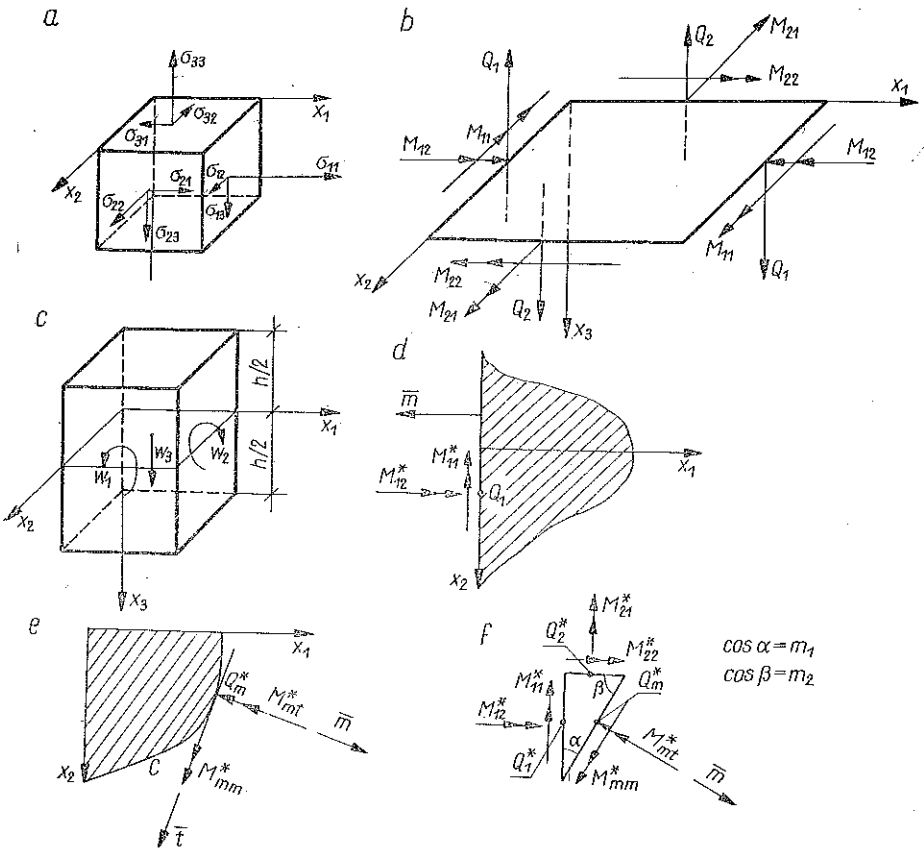
Na rys. 2 przedstawiono dodatnie składowe naprężeń, siły wewnętrzne i przemieszczenia odniesione do elementu płyty (dodatnie wektory momentów są, zgodnie z przyjętym układem współrzędnych, prawoskrętne). Jeśli przejdziemy do brzegu krzywoliniowego, to w każdym punkcie takiego brzegu występują trzy siły brzegowe: M_{mm}^* , M_{mt}^* i Q_m^* i trzy przemieszczenia w_m, w_t, w_3 . Momenty brzegowe M_{mm}^* , M_{mt}^* i siłę poprzeczną Q_m^* wyznaczamy z warunków równowagi elementu przedstawionego na rys. 2f:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} M_{mm}^* &= M_{11}^* m_1^2 + 2M_{12}^* m_1 m_2 + M_{22}^* m_2^2, \\ M_{mt}^* &= (M_{22}^* - M_{11}^*) m_1 m_2 + M_{12}^* (m_1^2 - m_2^2), \\ Q_m^* &= Q_1^* m_1 + Q_2^* m_2. \end{aligned}$$

Siły brzegowe $M_{\alpha\beta}$ i Q_γ wyznaczyć można z następujących równań:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} M_{11}^* &= \left(g_{14} + g_{11} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{12} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_1 + \left(g_{15} + g_{12} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{13} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_2 + \\ &\quad + \left(g_{14} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{15} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_3 + \bar{p} \sum_{A=1}^5 g_{1A} f_A, \\ M_{12}^* &= \left(g_{24} + g_{21} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{22} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_1 + \left(g_{25} + g_{22} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{23} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_2 + \\ &\quad + \left(g_{24} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{25} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_3 + \bar{p} \sum_{A=1}^5 g_{2A} f_A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.2) \quad M_{22}^* &= \left(g_{34} + g_{31} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{32} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_1 + \left(g_{35} + g_{32} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{33} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_2 + \\
 &\quad + \left(g_{34} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{35} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_3 + \bar{p} \sum_{A=1}^5 g_{3A} f_A, \\
 Q_1^* &= \left(g_{44} + g_{41} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{42} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_1 + \left(g_{45} + g_{42} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{43} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_2 + \\
 &\quad + \left(g_{44} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{45} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_3 + \bar{p} \sum_{A=1}^5 g_{4A} f_A, \\
 Q_2^* &= \left(g_{54} + g_{51} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{52} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_1 + \left(g_{55} + g_{52} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{53} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_2 + \\
 &\quad + \left(g_{54} \frac{\partial}{\partial x_1} + g_{55} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) w_3 + \bar{p} \sum_{A=1}^5 g_{5A} f_A.
 \end{aligned}$$



Rys. 2

Praca sił brzegowych M_{mm}^* , M_{mt}^* i Q_m^* jest proporcjonalna do całki

$$\oint_C (M_{mm}^* w_m + M_{mt}^* w_t + Q_m^* w_3) dC,$$

gdzie w_m jest kątem obrotu wokół stycznej do konturu \bar{i} , w_t jest kątem obrotu wokół normalnej do konturu \bar{m} , a w_3 jest ugięciem płyty.

Ponieważ wariacja podanej całki ma zniknąć na brzegu płyty, wystąpić mogą jedynie następujące kombinacje jednorodnych warunków brzegowych:

$$(5.3) \quad \begin{array}{ll} 1. M_{mm}^* = M_{mt}^* = Q_m^* = 0, & 5. w_m = M_{mt}^* = w_3 = 0, \\ 2. M_{mm}^* = w_t = Q_m^* = 0, & 6. w_m = w_t = w_3 = 0, \\ 3. M_{mm}^* = M_{mt}^* = w_3 = 0, & 7. w_m = M_{mt}^* = Q_m^* = 0, \\ 4. M_{mm}^* = w_t = w_3 = 0, & 8. w_m = w_t = Q_m^* = 0. \end{array}$$

Na brzegu płyty należy spełnić trzy warunki brzegowe, co odpowiada rządowi układu równań przemieszczeniowych (4.1).

Analogiczne warianty warunków brzegowych uzyskał R. GANOWICZ ([13], str. 66–67), przypisując przez analogię do teorii płyt cienkich warunkom 1 i 2 charakter «krawędzi swobodnej», warunkom 3 i 4 — «swobodnego podparcia» oraz warunkom 5 i 6 — «zamocowania». Wydaje się, że warunki 7 i 8 można uważać za pewnego rodzaju «podparcie ślizgowe», które w teorii płyt cienkich odpowiadają założeniu $\partial w_3 / \partial m = Q_m^* = 0$.

6. UWAGI KOŃCOWE

Równania różniczkowe (4.1) stanowią układ równań różniczkowych cząstkowych o zmiennych współczynnikach. Ogólny sposób postępowania przy rozwiązywaniu takiego układu podał S. KALISKI ([27], str. 68–76). Rozwiązanie problemu według S. KALISKIEGO składa się z dwóch etapów: «rozprężenia» układu wyjściowego przez wprowadzenie trzech funkcji przemieszczeń i rozwiązania układu równań dla funkcji przemieszczeń. Rozprężenie układu w przypadku zmiennych współczynników jest nieporównywalnie trudniejsze niż w przypadku współczynników stałych. Wynika to stąd, że do operatorów o współczynnikach zmiennych nie odnosi się prawo przemienności operatorów względem mnożenia. W celu rozprężenia układu wyjściowego należy znaleźć całki szczególne pewnych pomocniczych równań różniczkowych cząstkowych o zmiennych współczynnikach, co może stanowić trudność samą w sobie. W przypadku ogólnym równania na funkcje przemieszczeń stanowią układ liniowych równań różniczkowo-całkowych.

Wydaje się, że metoda S. Kaliskiego niezwykle rzadko pozwala uzyskać efektywne rozwiązanie. Dużą zaletą metody jest natomiast jej ogólność oraz to, że reprezentuje jednakowy sposób podejścia do zagadnienia rozprężania układu równań o stałych i zmiennych współczynnikach.

Formalnie ściśle rozwiązania układu równań przemieszczeniowych (4.1) można uzyskać w pewnych przypadkach szczególnych, np. gdy układ zawiera jedynie równania zwyczajne (zadania jednowymiarowe) lub gdy współczynniki układu są stałe. Ten ostatni przypadek zachodzi m.in. dla płyty o stałej grubości, w której stałe sprężystości są wykładniczymi funkcjami położenia. Do równań o stałych współczynnikach prawdopodobnie można by doprowadzić przez odpowiedni dobór funkcji grubości płyty i funkcji niejednorodności materiału.

W pewnych konkretnych przypadkach, gdy rezygnuje się z badania ogólnych własności rozwiązania, można zaniechać kłopotliwego postępowania związanego z rozprzeganiem układu równań, stosując pewne metody bezpośrednio do układu (4.1). Do grupy tych metod można by zaliczyć metody uogólnionych szeregów Fouriera i metody wariacyjne, z których najbardziej godną polecenia wydaje się być metoda Bubnowa-Galerkina. Przydatność metody Bubnowa-Galerkina w zagadnieniach dotyczących ciał niejednorodnych została potwierdzona w pracy [28], str. 659–662. Gdy funkcje $w_i(x_1, x_2)$ są regularne, z pewnością można zastosować metodę różnic skończonych. Pewne przypadki zastosowań przedstawionej teorii będą przedmiotem następnych prac.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Л. Я. Айнола, *Об уточненных теориях пластинок типа Рейсснера*, «Теория оболочек и пластин», Труды IV Всес. конф. по теории оболочек и пластин, Ереван 1962, Изд. А.Н. Арм. ССР., 171–177, 1964.
2. С. А. Амбарцумян, *Теория анизотропных пластин*, Наука, Москва 1967.
3. В. М. Аранович, *К определению напряжений в заделке толстых консольных пластин*, Узв. Выст. Уг. зав., Машиностроение, 4, 18–22, 1966.
4. G. D. BIRKHOFF, *Circular plates of variable thickness*, Phil. Mag. ser. 6, 43, 953–962, 1922.
5. I. N. BRONSZTEJN, K. A. SIEMENDIAJEW, *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, PWN, Warszawa 1968.
6. Г. В. Хаберланг, *Обработка данных фотоупругого исследования пластин с учетом теории Рейсснера*, Сб. Поляризац. оптич. метод. иссл. напр. Ленинград У-та, 570–597, 1966.
7. W. Z. CHIEN, *The intrinsic theory of thin shells and plates*, Quart. Appl. Mech., 1, 4, 2, 1–2, 1944.
8. L. H. DONNEL, *A theory of thick plates*, Proc. 2nd. U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., 369–373, 1954.
9. F. ESSENBERG, *On axially symmetrical plates of variable thickness*, J. Appl. Mech., 25, 4, 1958.
10. F. ESSENBERG, P. M. NAGHDI, *On elastic plates of variable thickness*, Proc. 3rd U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 313–319, 1958.
11. S. FERSHT, *An extended Reissner thin plate theory*, Israel J. Techn., 2, 3, 312–317, 1964.
12. D. FREDERICK, *Thick rectangular plates on an elastic foundation*, Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 81, 818, 1955.
13. R. GANOWICZ, *Wybrane zagadnienia z teorii płyt Reissnera i teorii płyt trójwarstwowych*, Mech. Teor. i Stos. 3, 55–95, 1966.
14. K. GIRKMANN, R. BEER, *Anwendung der verschärften Plattentheorie nach Eric Reissner auf orthotropen Platten*, Öster. Ing.-Archiv. 12, 101, 1958.
15. В. С. Глазырин, *Применение теории Рейсснера к расчету неограниченных плит на упругом основании*, Строит. Мех. и Рас. Соор., 2, 1964.
16. А. Л. Гольденвейзер, *К теории изгиба пластинок Рейсснера*, Избв. А.Н. СССР, отд. Т. Н., 4, 102–109, 1958.

17. A. Л. Гольденвейзер, *Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости*, ПММА 26, 668-686, 1962.
18. A. E. GREEN, *On Reissner's theory of bending of elastic plates*, Quart. Appl. Math., 7, 2, 1949.
19. A. E. GREEN, *The elastic equilibrium of isotropic plates and cylinders*, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 195, 1949, 533 - 552.
20. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *The linear theory of an elastic Cosserat plate*, Proc. Cambr. Phil. Soc., 63, 2, 1967.
21. M. HAIMOVICI, *On the bending of elastic plates*, Bull. PAN, 14, 11/12, 605 - 615, 1966.
22. R. J. HARTRANFT, *On some problems involving singularities in Reissner's theory of plate bending*, Doct. diss., Lehigh Univ., 1966.
23. K. HATA, *On circular thick plate stressed by the generally distributed normal load*, Proc. 2nd Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., 117 - 120, 1953.
24. H. HENCKY, *Über die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten*, Ing. Archiv., 16, 72, 1947.
25. Z. KAÇZKOWSKI, *The influence of the shear forces and rotatory inertia on the vibration of an anisotropic plate*, Arch. Mech. Stos., 12, 4, 531 - 552, 1960.
26. Z. KAÇZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, 1968.
27. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, Biul. WAT, 6, 28, 3 - 306, 1957.
28. S. KALISKI in in., *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
29. И. А. Кильчевский, *Обобщение современной теории оболочек*, Прикл. Мат. Мех., 2, 4, 1939.
30. A. В. Колос, *Об области применения приближенных теорий изгиба пластин типа теории Рейсснера*, Труды VI Всес. Конф. по теории оболочек и пластинок, Наука, 497-501, Москва 1966.
31. E. KOPPE, *Die dicke Platte mit nichtlinear Spannungs Verteilung*, ZAMM, 3, 37, 1 - 2, 1957.
32. A. KROMM, *Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik*, Ing.-Archiv, 21, 266 - 286, 1953.
33. С. Г. Лехницкий, *К теории анизотропных толстых плит*, Изв. АН СССР, 2, 142-145, 1959.
34. C. W. LEE, *A three dimensional solution for simply supported thick rectangular plates*, Nucl. Eng. Design, 6, 2, 155 - 162, 1967.
35. A. E. H. LOVE, *Mathematical theory of elasticity*, Cambridge 1934.
36. S. J. MEDWADOWSKI, *A refined theory of elastic, orthotropic plates*, J. Appl. Mech., 25, 4, 437-443, 1958.
37. R. D. MINDLIN, M. FERRAY, *Thickness-shear and flexural vibrations of contoured crystal plates*, J. Appl. Phys., 25, 12 - 20, 1954.
38. J. MOSSAKOWSKI, *Równania teorii Reissnera dla płyt ortotropowych*, Księga Jubileuszowa W. Wierzbickiego, PWN, 145 - 155, Warszawa 1959.
39. М. Муштари, *Теория изгиба плит средней толщины*, Изв. АН СССР, 2, 107-113, 1959.
40. NEGORO SHOSABURO, *On a method of solving elastic problems of plates*, Proc. 4th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, 153 - 156, Tokio 1955.
41. V. PANE, *Verschärfte Theorie der elastischen Platte*, Ing.-Archiv., 33, 6, 1964.
42. V. V. PONIATOWSKI, *Theory for plates of medium thickness*, J. Appl. Math., 26, 2, 1962.
43. E. L. REISS, *Symmetric bending of thick circular plates*, J. Soc. Ind. and Appl. Math., 10, 4, 1962.
44. E. REISSNER, *On the theory of bending of elastic plates*, J. Math. Phys., 23, 184 - 191, 1944.
45. E. REISSNER, *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*, J. Appl. Mech., 12, A 69 - A 77, 1945.
46. E. REISSNER, *On bending of elastic plates*, Quart. Appl. Math., 5, 55 - 68, 1947.
47. E. REISSNER, *On a variational theorem in elasticity*, J. Math. Phys., 29, 90 - 95, 1950.
48. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, 2, PWN, Warszawa 1960.

49. M. SOKOŁOWSKI, *The bending of transversally nonhomogeneous moderately thick plates*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 6, 4, 1958.
50. C. STĂNESCU, *Considerații asupra — unci teorii a plăcilor*, Studii și cercetări mec. apl. Acad. RSR, 25, 3, 1967, 527 – 537.
51. J. J. STOKER, *Mathematical problems connected with the bending and buckling of elastic plates*, Bull. Am. Math. Soc., 48, 247 – 261, 1942.
52. И. Г. Терегулов, *К теории пластин средней толщины*, Труды Конф. по теории пластин и оболочек, 367–375, Казань 1961.
53. R. TIFFEN, P. G. LOWE, *An exact theory of generally loaded elastic plates in terms of moments of the fundamental equations*, Proc. London Math. Soc., 13, 3, 1963.
54. R. TIFFEN, E. P. SAYER, *A moment theory of elastic plates*, Mathematika, 9, 11 – 24, 1962.
55. S. TIMOSHENKO, S. WOYNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.
56. Б. Ф. Власов, *Об уравнениях теории изгиба пластинок*, Изв. АН СССР, 12, 57–60, 1957.
57. K. H. ZIMMER, *Ein Beitrag zur nichtlinearen Plattentheorie*, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, 15, 5, 1017 – 1022, 1966.

Резюме

СТАТИКА ПРОДОЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНКИ ТИПА РЕЙССНЕРА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Основные уравнения, описывающие заглавную задачу, получены на основе применения вариационной теоремы Рейсснера к ортотропному линейно-упругому телу. Уравнения сведены к уравнениям в перемещениях, в которых в качестве неизвестных функций содержатся три осредненных перемещения: два угла поворота линейных элементов нормальных к срединной плоскости и прогиб пластинки.

Уравнения в перемещениях образуют сопряженную систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Из анализа краевой задачи следует восемь вариантов однородных краевых условий.

SUMMARY

STATICS OF LONGITUDINALLY NON-HOMOGENEOUS REISSNER PLATE OF VARIABLE THICKNESS

The fundamental equations of the problem indicated in the title are obtained by means of the E. Reissner variational theorem applied to the orthotropic, linearly elastic body. The equations are written in terms of displacements, the unknown functions being the following three averaged displacements: two angles of rotation of the linear elements normal to the middle surface of the plate and its deflection. The displacement equations form a coupled system of linear partial differential equations with variable coefficients. Analysis of the boundary value problem yields 8 variants of homogeneous boundary conditions.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lutego 1972 r.