

DRGANIA WYMUSZONE BELKI I PŁYTY NA PODŁOŻU ODKSZTAŁCALNYM W ZAKRESIE LEPKOSPŘĘŻYSTYM POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM

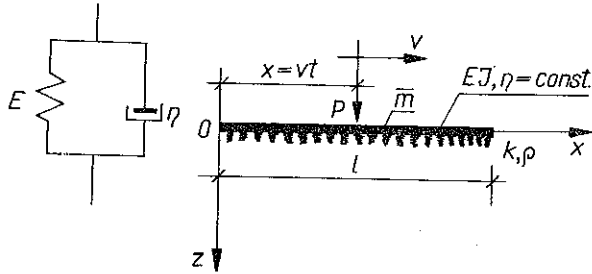
WACŁAW SZCZEŚNIAK (WARSZAWA)

1. WSTĘP I SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

W pracy rozpatruje się belki i płyty z materiału lepkospřężystego typu Voigta lub Maxwella. Belki i płyty spoczywają na jednoparametrowym podłożu lepkospřężystym typu Voigta w ujęciu Winklera. Obciążenie w postaci siły skupionej (bez masy) przesuwa się ze stałą prędkością, wielkość siły skupionej jest ustalona. W punkcie 3 zakłada się, że po belce przesuwa się masa skupiona, której ciężar i ruch pionowy przekazuje się na belkę za pośrednictwem sprężystego łącznika.

Rozwiązania problemu przedstawiono w postaci szeregu funkcji o rozdzielonych zmiennych. Funkcje odnoszące się do zmiennych geometrycznych spełniają równanie różniczkowe drgań swobodnych ustroju (belki lub płyty) i tworzą układ zupełny funkcji własnych. Funkcje czasu spełniać muszą niejednorodne równania różniczkowe zwyczajne drugiego lub trzeciego rzędu (w zależności od przyjętego modelu ciała lepkospřężystego) i określone warunki początkowe ruchu. W przypadku masy przesuwanej się po belce doprowadzono problem do równania całkowego Volterry II rodzaju. Ilustrację liczbową rozwiązań podano w punkcie 5. Rozważa się w nim płytę kwadratową o brzegach swobodnych, po której wzdłuż osi symetrii równoległej do krawędzi przesuwa się siła P z prędkością V . Do znalezienia funkcji własnych zastosowano sposób różnic skończonych. Modele Voigta i Maxwella, ze względu na swą prostotę, opisują własności reologiczne ciał rzeczywistych w sposób przybliżony, tym niemniej stosuje się je w określonych przypadkach. Nawierzchnie i podłoża komunikacyjne odpowiadają na ogół skomplikowanym, często nieliniowym modelom o ciągłych widmach relaksacji (komprymacji). Przyjęcie w opracowaniu dwu najprostszych modeli jest uzasadnione znajomością stałych materiałowych, które są już dość dobrze określone na podstawie wielu doświadczeń i pomiarów w naturze. Praca niniejsza nawiązuje do [30], gdzie rozważono (rys. 1) drgania wymuszone belki Voigta na podłożu odkształcalnym, i jest jej dalszą kontynuacją. Bogata już literatura rozważanego zagadnienia [32] nie uwzględnia w dostatecznym zakresie tłumienia. Niemniej jednak należy podkreślić, że uwzględnienie tłumienia liniowego [48] wnosi komplikacje natury przede wszystkim rachunkowej, funkcje bowiem własne problemu brzegowego, przy jednorodnym rozkładzie tłumienia,

są takie same jak dla przypadku bez tłumienia. Komplikacji ulega wówczas jedynie równanie różniczkowe, określające przebieg zmian postaci drgań w czasie.



Rys. 1. Dynamiczny schemat belki lepko-sprężystej o wolnych końcach na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem ruchomym

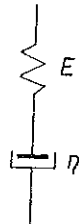
2. DRGANIA WYMUSZONE BELEK O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI I WOLNYCH KOŃCACH NA PODŁOŻU ODKSZTAŁCALNYM

Rozpatrzmy drgania belki o wolnych końcach, której materiał odpowiada modelowi ciała fizycznego typu Maxwella (rys. 2). Jak wiadomo [34, 35 i 36] dla tego modelu mamy zależność

$$(2.1) \quad \dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_x + \frac{1}{\eta} \sigma_x.$$

Z wytrzymałości materiałów znane są wzory

$$(2.2) \quad \epsilon_x = \frac{z}{\rho_1}, \quad \frac{1}{\rho_1} \approx -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \int_A \sigma_x z dA = Mx, \quad Mx = -EJ \frac{d^2 w}{dx^2}.$$



Rys. 2. Model Maxwella dla materiału belki

Po uwzględnieniu (2.2) oraz po dwukrotnym zróżniczkowaniu (2.1) względem x otrzymamy

$$(2.3) \quad -Jx \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial x^4 \partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial^3 Mx}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2}.$$

Z kolei rozpatrując równowagę dynamiczną nieskończenie małego elementu pręta drgającego poprzecznie możemy napisać

$$(2.4) \quad -\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2} + \bar{m} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + kw(x, t) = P\delta(x - vt)$$

Podstawiając (2.4) do (2.3) otrzymamy poszukiwane równanie problemu:

$$(2.5) \quad EJ \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + \bar{m} \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t^3} \left(\rho + \frac{E}{\eta} \right) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \\ + \left(k + \frac{E}{\eta} \rho \right) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \frac{E}{\eta} kw(x, t) = \frac{E}{\eta} P \delta(x-vt) + \frac{\partial}{\partial t} [P \delta(x-vt)].$$

W równaniu (2.5) zastosowano następujące oznaczenia: $w(x, t)$ oznacza ugięcie belki lepkosprężystej, τ czas relaksacji w modelu Maxwella, $\tau = \eta/E$, EJ sztywność giętą belki, \bar{m} masę jednostkową belki, k współczynnik podłoża sprężystego, ρ współczynnik tłumienia lepkiego w podłożu sprężystym oraz $\delta(x-vt)$ funkcję Diraca.

Poszukujemy rozwiązania problemu w postaci

$$(2.6) \quad w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t),$$

gdzie $w_1(x, t)$ jest całką ogólną równania jednorodnego oraz $w_2(x, t)$ całką szczególną równania (2.5).

Przyjęcie całki ogólnej równania jednorodnego w postaci

$$(2.7) \quad w_1(x, t) = \sum_n X_n(x) T_n(t),$$

prowadzi do rozdziału zmiennych:

$$(2.8) \quad \ddot{T}_n(t) + \bar{A} \dot{T}_n(t) + \bar{B} T_n(t) + \bar{C} T_n(t) = 0$$

oraz

$$(2.9) \quad X_n^{IV}(x) - \lambda_n^4 X_n(x) = 0,$$

gdzie

$$(2.10) \quad \bar{A} = \left(\rho + \frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{\bar{m}}, \quad \bar{B} = \left(k + \frac{\rho}{\tau} + \omega_0^2 \bar{m} \frac{1}{\bar{m}} \right), \quad \bar{C} = \frac{k}{\bar{m} E \eta}.$$

We wzorze (2.10)₁ τ oznacza czas relaksacji modelu Maxwella, $X_n(x)$ znormowaną funkcję własną zagadnienia brzegowego wyznaczaną w [30] oraz

$$(2.11) \quad \lambda_n^4 = \frac{\omega_0^2 \bar{m}}{EJ}.$$

Całkę ogólną równania możemy podać w postaci

$$(2.12) \quad w_1(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) [C_1 e^{-\kappa t} + e^{-\kappa t} (C_2 \cos n_1 t + C_3 \sin n_1 t)].$$

Na podstawie (2.12) należy stwierdzić ogólnie, że drgania swobodne odbywają się dookoła położenia «równowagi reologicznej» i bardzo szybko zanikają.

Zajmiemy się całą szczególną równania (2.5). Obciążenie zewnętrzne i przemieszczenie rozkładamy w szereg Fouriera wg znormowanych funkcji własnych zagadnienia brzegowego:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} w_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \\ q(x, t) &= P\delta(x-vt) = \bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x-vt), \quad \text{jeśli } 0 < x < l; \\ q(x, t) &= 0, \quad \text{jeśli } x > l; \\ \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [P\delta(x-vt)] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x-vt) \right]. \end{aligned}$$

Podstawienie (2.13) do równania (2.5) prowadzi do równania

$$(2.14) \quad \ddot{T}(t) + \frac{\rho + \frac{1}{\tau}}{\bar{m}} \dot{T}(t) + \left(\frac{k + \frac{\rho}{\tau}}{\bar{m}} + \frac{\lambda_n^4 EJ}{\bar{m}} \right) T(t) + \frac{k}{\bar{m}} T(t) = \frac{1}{\tau} f_n(t) + \dot{f}_n(t).$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$(2.15) \quad \bar{A}_1 = \frac{\rho + \frac{1}{\tau}}{\bar{m}}, \quad \bar{B}_1 = \frac{k + \frac{\rho}{\tau}}{\bar{m}} + \lambda_n^4 \frac{EJ}{\bar{m}}, \quad \bar{C}_1 = \frac{k}{\bar{m}}.$$

równanie (2.14) możemy napisać następująco:

$$(2.16) \quad \ddot{T}_n(t) + \bar{A}_1 \dot{T}_n(t) + \bar{B}_1 T_n(t) + \bar{C}_1 T_n(t) = \frac{1}{\tau} f_n(t) + \dot{f}_n(t).$$

Funkcje $f_n(t)$ możemy wyznaczyć z warunku ortogonalizacyjnego funkcji własnych w przedziale $(0, l)$:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} f_n(t) &= \frac{1}{\bar{m}} \int_0^l q(x, t) X_n(x) dx = \frac{1}{\bar{m}} P X_n(vt), \\ \dot{f}_n(t) &= \frac{1}{\bar{m}} P \dot{X}_n(vt). \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu (2.17) równanie (2.16) znajdziemy

$$(2.18) \quad \ddot{T}_n(t) + \bar{A}_1 \dot{T}_n(t) + \bar{B}_1 T_n(t) + \bar{C}_1 T_n(t) = \frac{P}{\bar{m} N_n} [L_1 (\text{ch } \lambda_n vt + \cos \lambda_n vt) + L_3 \text{sh } \lambda_n vt + L_4 \sin \lambda_n vt],$$

gdzie

$$(2.19) \quad L_1 = L_2 = \left(\frac{1}{\tau} - A_n \lambda_n v \right), \quad L_3 = -\lambda_n v - \frac{A_n}{\tau}, \quad L_4 = \lambda_n v - \frac{A_n}{\tau}.$$

Przewidujemy, że rozwiązanie szczególne równania (2.18) ma postać

$$(2.20) \quad T_n(t) = K_1 \operatorname{ch} \lambda_n vt + K_2 \cos \lambda_n vt + K_3 \sin \lambda_n vt + K_4 \operatorname{sh} \lambda_n t.$$

Stałe K_1, K_2, K_3 i K_4 wyznaczamy z warunku spełnienia przez rozwiązanie (2.20) równania ruchu (2.18). Układ równań, z którego obliczamy współczynniki $K_1 - K_4$, ma postać:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \frac{PL_1}{\bar{m}N_n} &= K_1(\bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2 + \bar{C}_1) + K_4(\lambda_n^3 v^3 + \lambda_n v \bar{B}_1), \\ \frac{PL_2}{\bar{m}N_n} &= K_2(\bar{C}_1 - \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2) + K_3(-\lambda_n^3 v^3 + \bar{B}_1 \lambda_n v), \\ \frac{PL_3}{\bar{m}N_n} &= K_2(\lambda_n^3 v^3 - \bar{B}_1 \lambda_n v) + K_3(\bar{C}_1 - \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2), \\ \frac{PL_4}{\bar{m}N_n} &= K_1(\lambda_n^3 v^3 + \bar{B}_1 \lambda_n v) + K_4(\bar{C}_1 + \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2). \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu (2.21) względem $K_1 - K_4$ otrzymamy

$$(2.22) \quad \begin{aligned} K_1 &= \frac{P}{\bar{m}N_n} \frac{-L_1(\bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2 + \bar{C}_1) + L_4(\lambda_n^3 v^3 + \bar{B}_1 \lambda_n v)}{-(\bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2 + \bar{C}_1) + (\lambda_n^3 v^3 + \bar{B}_1 \lambda_n v)^2}, \\ K_2 &= \frac{P}{\bar{m}N_n} \frac{-L_1(\bar{C}_1 - \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2) + L_3(-\lambda_n^3 v^3 + \bar{B}_1 \lambda_n v)}{-(\bar{C}_1 - \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2)^2 + (\bar{B}_1 \lambda_n v)^2 - (\lambda_n^3 v^3)^2}, \\ K_3 &= \frac{P}{\bar{m}N_n} \frac{L_3(\bar{C}_1 - \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2) + L_1(\lambda_n^3 v^3 - \bar{B}_1 \lambda_n v)}{(\bar{C}_1 - \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2)^2 - (\bar{B}_1 \lambda_n v - \lambda_n^3 v^3)^2}, \\ K_4 &= \frac{P}{\bar{m}N_n} \frac{-L_1(\lambda_n^3 v^3 + \bar{B}_1 \lambda_n v) + L_4(\bar{C}_1 + \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2)}{-(\lambda_n^3 v^3 + \lambda_n v \bar{B}_1)^2 + (\bar{C}_1 + \bar{A}_1 \lambda_n^2 v^2)^2}. \end{aligned}$$

Ostatecznie całą szczególną wyrazimy następująco:

$$(2.23) \quad w_2(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) (K_1 \operatorname{ch} \lambda_n vt + K_2 \cos \lambda_n vt + K_3 \operatorname{sh} \lambda_n vt + K_4 \sin \lambda_n vt).$$

Analiza wzoru (2.23) wykazuje, że amplituda drgań wymuszonych rośnie w tym przypadku ze względu na rosnące funkcje $\operatorname{ch} \lambda_n vt$ i $\operatorname{sh} \lambda_n vt$. Współczynniki K_1 i K_3 są różne od zera. Wzrost ten jest ograniczony czynnikiem vt , który musi być mniejszy od l (przy $x=vt=l$ siła schodzi z belki). Do powyższego rozwiązania poprawnego dla $n=1, 2, \dots$ należy dodać rozwiązanie dla przypadku $n=0, \lambda_0=0$ (rys. 3). Jak wiadomo, wówczas

$$\omega_0^2 = \frac{k}{\bar{m}} = \frac{kl}{\bar{m}l} = \frac{kl}{M},$$

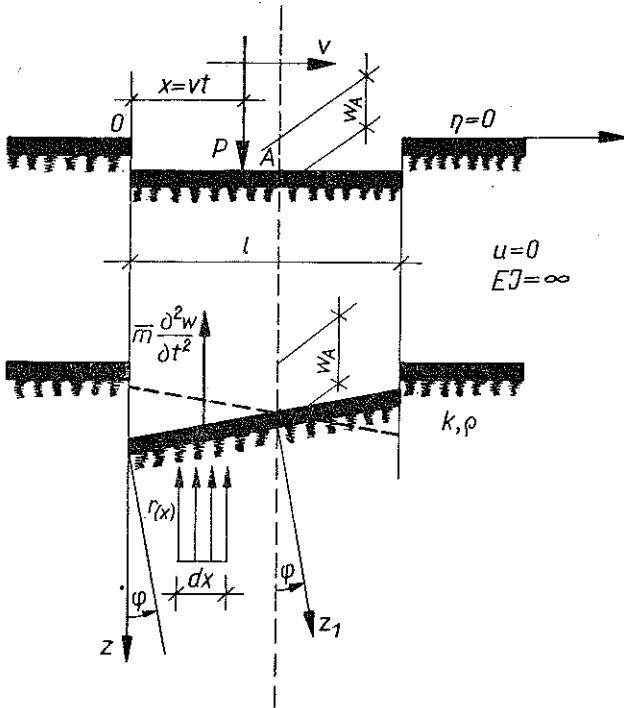
gdzie M oznacza masę całkowitą belki.

Funkcja własna unormowana dla tego przypadku ma postać

$$X_0 = \frac{1}{l}.$$

Całka szczególna upraszcza się w tym przypadku; należy jednak na miejsce m podstawić M :

$$(2.24) \quad w_2(t) = \frac{P}{[M\bar{\omega}]_{n=0}} \int_0^t e^{-\mu_2(t-\xi)} \sin \bar{\omega}_0(t-\xi) d\xi.$$



Rys. 3. Efekt bryłowy $EJ=\infty$ dla belki o wolnych końcach na podłożu odkształcalnym

Również współczynnik μ ma w tym przypadku trochę inną postać. Po rozwiązaniu tej prostej całki otrzymamy

$$(2.25) \quad w_2(t) = \frac{P}{M\bar{\omega}_0^2} \left(1 - e^{-\mu_1 t} \cos \bar{\omega}_0 t - e^{-\mu_1 t} \frac{\mu_1}{\bar{\omega}_0} \sin \bar{\omega}_0 t \right).$$

Współczynnik μ_1 ma teraz postać

$$(2.26) \quad 2\mu_1 = \frac{A}{M} + [\tau\omega^2]_{n=0} - \frac{kl}{M} = \frac{\rho A}{M}$$

i nie zależy od własności reologicznych belki.

W omawianym przypadku ze względu na specyfikę funkcji własnej $X_n = 1/l$ występuje oprócz symetrycznej również antysymetryczna postać drgań. Zakładamy, że przemieszczenia poziome punktów osi belki są równe zero. Antysymetryczny przypadek drgania dla powyższego założenia można opisać jednoznacznie jedną dodatkową współrzędną kątową:

$$(2.27) \quad [w(x, t)]_{n=0} = w_2(t) + \left(\frac{l}{2} - x\right) \varphi(t).$$

Brakujące równanie dla wyznaczenia kąta $\varphi(t)$ otrzymamy z warunku $\Sigma M_A = 0$, napisanego dla dynamicznej równowagi rozpatrywanej antysymetrycznej postaci drgania (rys. 3b). Oto równanie:

$$(2.28) \quad \int_A k \left[w_2(t) + \left(\frac{l}{2} - x\right) \varphi(t) \right] \left(\frac{l}{2} - x\right) dA + \\ + \int_M \left(\frac{l}{2} - x\right) \frac{d^2}{dt^2} \left[w_2(t) + \left(\frac{l}{2} - x\right) \varphi(t) \right] dm + \\ + \int_A \mu_1 \left(\frac{l}{2} - x\right) \frac{d}{dt} w_2(t) + \left(\frac{l}{2} - x\right) \varphi(t) dA = P \left(\frac{l}{2} - x\right).$$

Po pewnych uproszczeniach równanie (2.28) ma postać:

$$(2.29) \quad \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + 2\mu_2 \frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega^2 \varphi(t) = \frac{P}{J_{Am}} \left(\frac{l}{2} - Vt\right),$$

gdzie

$$2\mu_2 = \mu_1 \frac{J_A}{J_{Am}}, \quad \omega_\varphi^2 = \frac{kJ_A}{J_{Am}}, \quad \bar{\omega}_\varphi^2 = \omega_\varphi^2 - \mu_2^2.$$

Całka szczególna równania (2.29) ma postać

$$(2.30) \quad \varphi(t) = \frac{Pe^{-\mu_2 t}}{J_{Am} \omega_\varphi} \int_0^t e^{-\mu_2 \xi} \left(\frac{l}{2} - V\xi\right) \sin \bar{\omega}_\varphi(t - \xi) d\xi.$$

Po rozwiązaniu (2.30) otrzymujemy

$$(2.31) \quad \varphi(t) = \frac{P}{\omega_\varphi^2 J_{Am}} \left\{ \frac{l}{2} \left[1 - \bar{e}^{\mu_2 t} \cos \bar{\omega}_\varphi t - \bar{e}^{\mu_2 t} \frac{\mu_2}{\omega_\varphi} \sin \bar{\omega}_\varphi t \right] + \right. \\ \left. V - \left[t - \frac{2\mu_2}{\omega_\varphi^2} - \frac{\omega_\varphi^2 - 2\mu_2^2}{\omega_\varphi^2 \bar{\omega}_\varphi} \bar{e}^{\mu_2 t} \sin \bar{\omega}_\varphi t + \frac{2\mu_2}{\omega_\varphi^2} e^{-\mu_2 t} \cos \bar{\omega}_\varphi t \right] \right\}.$$

Wzór na prędkość krytyczną dla «efektu bryłowego» ma postać następującą:

$$V_{kr}^0 = \frac{l\omega_0}{\pi},$$

a po uwzględnieniu tłumienia w podłożu

$$V_{kr}^0 = \frac{l\omega_0}{\pi}.$$

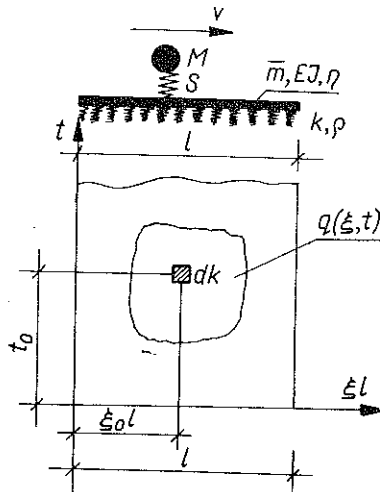
Rozwiązanie przytoczone odnosi się do przedziału $0 < t < l/V$. Z chwilą, gdy siła opuściła belkę, to znaczy dla $t > l/V$, odbywają się jeszcze drgania tłumione, którymi nie będziemy się zajmowali.

Analiza rozwiązania przypadku $n=1, 2, \dots$ doprowadza do wzoru na prędkość krytyczną obciążenia:

$$(2.32) \quad V_{krn} = \frac{1}{\lambda n} \sqrt{\frac{\lambda_n^4 EJ}{\bar{m}} + \frac{k}{m} + \frac{\rho}{\bar{m}\tau}}.$$

3. WPŁYW MASY OBCIĄŻENIA RUCHOMEGO NA DRGANIA BELKI LEPKOSPĘŻYSTEJ NA PODŁOŻU ODKSZTAŁCALNYM

W punkcie tym jako dynamiczny schemat pojazdu przyjęto masę skupioną na sprężynie o sztywności $S [T/m]$. Zadanie polega na znalezieniu ugięcia belki jako funkcji współrzędnych w czasoprzestrzeni (rys. 4).



Rys. 4. Schemat dynamiczny dla przypadku uwzględnienia masy pojazdu

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe $\xi = x/l$ i $\bar{\tau} = vt/l$, wyrazimy przemieszczenie pręta w zależności od dowolnie rozłożonego obciążenia $q(\xi, \bar{\tau})$ (rys. 4):

$$(3.1) \quad w_{(\xi, \bar{\tau})}^q = \frac{l^2}{\bar{m}V} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(\xi)}{\omega_n^2 + \mu_n^2} \int_0^{\bar{\tau}} \int_0^1 q_0(\xi_0, \bar{\tau}_0) F_{sn} \{(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) + N_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)\} d\bar{\tau}_0 d\xi_0,$$

gdzie $\beta_n = \bar{\omega}_n l / V$ oraz

$$(3.2) \quad \begin{aligned} F_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) &= e^{-\mu_n \frac{l}{V}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)} \left[\frac{V\beta_n}{l} \sin \beta_n(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) - \mu_n \cos \beta_n(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) \right], \\ N_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) &= \omega_n e^{-\mu_n \frac{l}{V}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)} \left[\cos \beta_n(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) + \frac{\mu_n l}{\beta_n V} \sin \beta_n(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) \right]. \end{aligned}$$

Jeżeli obciążenie przedstawia poruszająca się siła skupiona (bez masy), to dla modelu materiału belki i podłoża typu Voigta otrzymamy rozwiązanie [30 i 32]

$$(3.3) \quad w^p(\xi, \bar{\tau}) = \frac{P}{\bar{m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n \frac{l}{V} \bar{\tau}}}{\bar{\omega}_n N_n} X_n(\xi) \times \left[\begin{aligned} & (1 - A_n) \frac{\bar{\omega}_n e^{(\mu_n + \alpha_n) \frac{l}{V} \bar{\tau}} - (\mu_n + \alpha_n) \sin \beta_n \bar{\tau} + \bar{\omega}_n \cos \beta_n \bar{\tau}}{2[\bar{\omega}_n^2 + (\mu_n + \alpha_n)^2]} + \\ & + (1 + A_n) \frac{\bar{\omega}_n e^{(\mu_n - \alpha_n) \frac{l}{V} \bar{\tau}} - (\mu_n - \alpha_n) \sin \beta_n \bar{\tau} - \bar{\omega}_n \cos \beta_n \bar{\tau}}{2[\bar{\omega}_n^2 + (\mu_n - \alpha_n)^2]} + \\ & + \frac{\mu_n \left[e^{\mu_n \frac{l}{V} \bar{\tau}} \left(-\sin \alpha_n \frac{l}{V} \bar{\tau} + \frac{\bar{\omega}_n + \alpha_n}{\mu_n} \cos \alpha_n \frac{l}{V} \bar{\tau} \right) - \sin \beta_n \bar{\tau} - \frac{\bar{\omega}_n + \alpha_n}{\mu_n} \cos \beta_n \bar{\tau} \right]}{2[\mu_n^2 + (\bar{\omega}_n + \alpha_n)^2]} + \\ & + \frac{\mu_n \left[e^{\mu_n \frac{l}{V} \bar{\tau}} \left(\sin \alpha_n \frac{l}{V} \bar{\tau} + \frac{\bar{\omega}_n - \alpha_n}{\mu_n} \cos \alpha_n \frac{l}{V} \bar{\tau} \right) - \sin \beta_n \bar{\tau} - \frac{\bar{\omega}_n - \alpha_n}{\mu_n} \cos \beta_n \bar{\tau} \right]}{2[\mu_n^2 + (\bar{\omega}_n - \alpha_n)^2]} - \\ & - A_n \left\{ \frac{\mu_n \left[e^{\mu_n \frac{l}{V} \bar{\tau}} \left(\cos \alpha_n \frac{l}{V} \bar{\tau} + \frac{\bar{\omega}_n + \alpha_n}{\mu_n} \sin \alpha_n \frac{l}{V} \bar{\tau} \right) - \cos \beta_n \bar{\tau} + \frac{\bar{\omega}_n + \alpha_n}{\mu_n} \sin \beta_n \bar{\tau} \right]}{2[\mu_n^2 + (\bar{\omega}_n + \alpha_n)^2]} - \right. \\ & \left. \frac{\mu_n \left[e^{\mu_n \frac{l}{V} \bar{\tau}} \left(\cos \alpha_n \frac{l}{V} \bar{\tau} - \frac{\bar{\omega}_n - \alpha_n}{\mu_n} \sin \alpha_n \frac{l}{V} \bar{\tau} \right) - \cos \beta_n \bar{\tau} + \frac{\bar{\omega}_n - \alpha_n}{\mu_n} \sin \beta_n \bar{\tau} \right]}{2[\mu_n^2 + (\bar{\omega}_n - \alpha_n)^2]} \right\} \end{aligned} \right].$$

W dalszych rozważaniach będzie nas interesowało ugięcie belki pod działaniem siły skupionej, tj. dla $\xi = \bar{\tau}$. Przyjęcie założenia, że belka jest sprężysta i wolnopodparta prowadzi do znanych rozwiązań S. TIMOSHENKI [1 i 2] lub Z. KĄCZKOWSKIEGO [15].

Wreszcie gdy po belce przesuwają się ze stałą prędkością siła dowolnie zmienna w czasie $P(\bar{\tau})$, to na podstawie (3.1) mamy

$$(3.4) \quad w(\xi, \tau) = \frac{l^2}{\bar{m}V} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(\bar{\tau})}{\bar{\omega}_n^2 - \mu_n^2} \int_0^{\bar{\tau}} P(\bar{\tau}) X_n(\bar{\tau}_0) \{F_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) + N_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)\} d\bar{\tau}_0.$$

Siłą $P(\bar{\tau})$, działającą na belkę, jest siła w sprężynie (resorze) pojazdu. Siłę tę można przedstawić w postaci sumy dwóch składników:

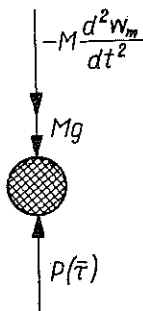
$$(3.5) \quad P(\bar{\tau}) = Mg + Y(\bar{\tau}).$$

Pierwszy z nich Mg oznacza ciężar własny pojazdu (g jest przyspieszeniem ziemskim), a drugi $Y(\bar{\tau})$, jest dodatkową siłą wywołaną skracaniem się lub wydłużeniem sprężyny. Podstawiając teraz $\bar{\tau}$ na miejsce ξ do (3.4), otrzymujemy ugięcie belki w miejscu przyłożenia dowolnie zmiennej w czasie siły $P(\bar{\tau})$:

$$(3.6) \quad w(\bar{\tau}, \bar{\tau}) = w_b(\bar{\tau}) = Mg w_B(\bar{\tau}) + \frac{l^2}{\bar{m}V} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(\bar{\tau})}{\omega_n^2 - \mu_n^2} \int_0^{\bar{\tau}} Y(\bar{\tau}_0) X_n(\bar{\tau}_0) \times \\ \times \{F_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) + N_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)\} d\tau_0.$$

Rozpatrzmy z kolei masę skupioną (rys. 5), na którą działają następujące siły: ciężar własny Mg , oddziaływanie sprężyny $P(\bar{\tau})$ i siła bezwładności $-Mg d^2 w_m/dt^2$. Zespół tych sił powinien spełniać warunek równowagi dynamicznej:

$$(3.7) \quad -M \frac{d^2 w_m}{dt^2} + Mg - P(\bar{\tau}) = 0.$$



Rys. 5. Rozkład sił działających na masę skupioną

Wprowadzamy i tu bezwymiarową współrzędną i po wykorzystaniu związku (4.5) dochodzimy do następującego równania różniczkowego:

$$(3.8) \quad \frac{d^2 w_m(\bar{\tau})}{d\bar{\tau}^2} = -\frac{l^2}{Mv^2} Y(\bar{\tau}).$$

Uwzględniając warunki początkowe ruchu masy skupionej

$$(3.9) \quad w_m(0) = \frac{Mg}{S}, \quad \frac{dw_m(0)}{d\bar{\tau}} = 0,$$

całkę równania różniczkowego (3.8) przedstawimy następująco:

$$(3.10) \quad w_m(\bar{\tau}) = \frac{Mg}{S} - \frac{l^2}{Mv^2} \int_0^{\bar{\tau}} (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) Y(\bar{\tau}_0) d\bar{\tau}_0.$$

Znamy już teraz przesunięcie dolnego końca sprężyny $w_b(\bar{\tau})$ i górnego końca $w_m(\bar{\tau})$. W obu równaniach, które te przesunięcia opisują, pozostaje jednak jako niewiadoma wielkość siły $Y(\bar{\tau})$. Niewiadomą tę wyznaczamy z warunku, że różnica między obu przesunięciami jest proporcjonalna do siły w sprężynie:

$$(3.11) \quad \frac{Y(\bar{\tau})}{S} = w_m(\bar{\tau}) - w_b(\bar{\tau}), \quad \xi = \bar{\tau}.$$

Po podstawieniu (3.10), (3.6) i (3.5) dochodzimy do następującego równania całkowego typu Volterry, drugiego rodzaju:

$$(3.12) \quad Y(\bar{\tau}) + \frac{Sl^2}{Mv^2} \int_0^{\bar{\tau}} Y(\bar{\tau}_0) K(\bar{\tau}, \bar{\tau}_0) d\bar{\tau}_0 = SF(\bar{\tau}),$$

którego jądro K oraz wyraz wolny F zawierają nieskończone szeregi:

$$(3.13) \quad K(\bar{\tau}, \bar{\tau}_0) = \bar{\tau} - \bar{\tau}_0 + \frac{M}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\omega}_n^2 - \mu_n^2} X_n(\bar{\tau}) X_n(\bar{\tau}_0) \{F_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) + N_{sn}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)\},$$

$$(3.14) \quad F(\bar{\tau}) = -Mg w_B(\bar{\tau}),$$

gdzie $w_B(\bar{\tau})$ określone jest wzorem (3.3) pod postacią szeregu nieskończonego. Z tego też względu metoda iteracyjna nie bardzo nadaje się do rozwiązania równania (3.12). W tym miejscu zwrócimy jeszcze uwagę na fakt, że (3.3) można przedstawić częściowo w postaci zamkniętej. Dla belki liniowo sprężystej swobodnie podpartej zrobił to Z. KĄCZKOWSKI [14], wykorzystując idee metody nakładania ugięć a Z. REI-PERT [26 i 27] rozszerzył na inne przypadki belek.

4. DRGANIA WYMUSZONE PŁYTY NA PODŁOŻU ODKSZTAŁCALNYM W ZAKRESIE LEPKOSPŘŻYSTYM POD OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM

W tej części pracy rozpatrywać będziemy płyty o skończonych wymiarach, których materiał odpowiada reologicznemu modelowi Voigta. Płyta spoczywać będzie na podłożu typu Voigta w ujęciu Winklera. Wprowadzamy dodatkowe upraszczające założenie

$$(4.1) \quad \frac{G}{E} = \frac{\eta_1}{\eta},$$

gdzie G oznacza współczynnik sprężystości poprzecznej, moduł odkształcenia postaciowego materiału płyty, E współczynnik sprężystości podłużnej materiału płyty, η_1 współczynnik lepkości poprzecznej (przy ścinaniu) płyty oraz η współczynnik lepkości podłużnej (przy rozciąganiu) płyty.

Poprawność założenia (4.1) potwierdzają doświadczenia wykonane dla wielu materiałów konstrukcyjnych [24 i 46], a jego przyjęcie znakomicie upraszcza rozwiązywanie problemu drgań płyt lepkospřżystych.

Siły wewnętrzne w płycie wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\
 M_y &= -D \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\
 M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\nu) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\
 Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 w, \\
 Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 w, \\
 A &= -2D(1-\nu) \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \\
 V_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \\
 V_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Jak wiadomo [32] równanie równowagi dynamicznej płyty na podłożu odkształcalnym przy poruszającym się obciążeniu równoległym do osi x jest następujące:

$$\begin{aligned}
 \nabla^4 \left[w(x, y, t) + \tau \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} \right] + \frac{\bar{m}}{D} \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} + \\
 + \frac{\rho}{D} \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial t} + \frac{k}{D} w(x, y, t) = \frac{P}{D} \delta(x-vt) \delta(y-y_0).
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Zajmiemy się przede wszystkim rozwiązaniem równania dla schematu statycznego płyty podanego na rys. 6. Przyjęcie rozwiązania w postaci

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{m,n}(x, y) T_{m,n}(t),
 \tag{4.4}$$

proceedzi do rozdzielenia zmiennych:

$$\nabla^4 W_{m,n}(x, y) - \lambda_{m,n}^4 W_{m,n}(x, y) = 0,
 \tag{4.5}$$

$$\ddot{T}_{m,n}(t) + 2\mu_{m,n} \dot{T}_{m,n}(t) + \omega_{m,n}^2 T_{m,n}(t) = 0,
 \tag{4.6}$$

gdzie

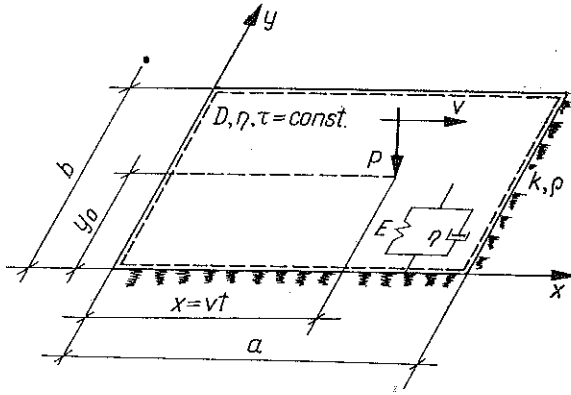
$$\lambda_{m,n}^4 = \frac{\omega_{0,m,n}^2 \bar{m}}{D}, \quad \bar{\omega}_{m,n}^2 = \bar{\omega}_{0,m,n}^2 - \mu_{m,n}^2, \quad \omega_{0,m,n}^2 = \omega_{m,n}^2 - \frac{k}{\bar{m}},$$

$$2\mu_{m,n} = \frac{\rho}{\bar{m}} + \tau \omega_{0,m,n}^2, \quad 2\mu_{m,n} = \frac{\rho}{\bar{m}} + \tau \omega_{m,n}^2 - \frac{k\tau}{\bar{m}}.
 \tag{4.7}$$

Jak wiadomo, drgania swobodne opisane równaniem jednorodnym (4.3) mają postać

$$(4.8) \quad w_s(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{m,n}(x, y) e^{-\mu_{m,n} t} (A_s \sin \bar{\omega}_{m,n} t + B_s \cos \bar{\omega}_{m,n} t),$$

$$[\omega_0]_{m,n=1} = \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right], \quad \lambda_{m,n}^2 = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2.$$



Rys. 6. Płyta lepkosprężysta swobodnie podparta na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem ruchomym

Znormowana funkcja własna zagadnienia brzegowego jest następująca:

$$(4.9) \quad W_{m,n}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Poszukujemy obecnie całki szczególnej zagadnienia; przemieszczenie i obciążenie rozkładamy w tym celu w szereg wg funkcji własnych zagadnienia brzegowego:

$$(4.10) \quad w_1(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{m,n}(x, y) T_{m,n}(t),$$

$$q(x, y, t) = \bar{m} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{m,n}(t) W_{m,n}(x, y).$$

Funkcje zmiennych geometrycznych spełniają równanie różniczkowe drgań swobodnych ustroju belki i tworzą układ zupełny funkcji własnych. Funkcje czasu spełnić muszą w wyniku założenia (4.10) niejednorodne równanie różniczkowe zwyczajne drugiego lub trzeciego rzędu (w zależności od przyjętego modelu ciała lepkosprężystego) i określone warunki początkowe ruchu.

W przypadku naszego zadania równanie niejednorodne ma postać

$$(4.11) \quad \ddot{T}_{m,n}(t) + 2\mu_{m,n} \dot{T}_{m,n}(t) + \omega_{m,n}^2 T_{m,n}(t) = f_{m,n}(t).$$

Po rozwiązaniu (4.11) otrzymamy funkcję

$$(4.12) \quad T_{m,n}(t) = e^{-\mu_{m,n}t} (D_1 \cos \bar{\omega}_{m,n}t + D_2 \sin \bar{\omega}_{m,n}t) + \\ + \frac{1}{\bar{\omega}_{m,n}} \int_0^t e^{-\mu_{m,n}(t-\xi)} \left[\frac{1}{\bar{m}} \int_0^a \int_0^b q(x, y, \xi) X_m(x) Y_n(y) dx dy \right] \sin \bar{\omega}_{m,n}(t-\xi) d\xi, \\ W_{m,n}(x, y) = X_m(x) Y_n(y).$$

Biorąc pod uwagę warunki początkowe otrzymamy

$$(4.13) \quad \left. \begin{aligned} w_1(x, y, 0) &= w(x, y, 0) - w_s(x, y, 0) \\ \dot{w}_1(x, y, 0) &= \dot{w}(x, y, 0) - \dot{w}_s(x, y, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_1 = D_2 = 0.$$

Po wykonaniu przejścia granicznego możemy podać wzór na funkcje $f_{m,n}(t)$:

$$(4.14) \quad f_{m,n}(t) = \frac{1}{\bar{m}} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t) X_m(x) Y_n(y) dx dy = \frac{P}{\bar{m}} X_m(\nu t) Y_n(y_0).$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego ma postać

$$(4.15) \quad w_1(x, y, t) = \frac{P}{\bar{m}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{\omega}_{m,n}} W_{m,n}(x, y) Y_n(y_0) \int_0^t \bar{e}^{\mu_{m,n}(t-\xi)} \times \\ \times X_m(\nu \xi) \sin \bar{\omega}_{m,n}(t-\xi) d\xi.$$

Ostatecznie po uwzględnieniu (4.9) otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia:

$$(4.16) \quad w(x, y, t) = \frac{4P}{\bar{m}ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_{m,n}t}}{\bar{\omega}_{m,n}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi y_0}{b} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu_{m,n} \left[e^{\mu_{m,n}t} \left(\cos \alpha_m t + \frac{\bar{\omega}_{m,n} + \alpha_m}{\mu_{m,n}} \sin \alpha_m t \right) - \cos \bar{\omega}_{m,n}t + \frac{\bar{\omega}_{m,n} - \alpha_m}{\mu_{m,n}} \sin \bar{\omega}_{m,n}t \right]}{2[\mu_{m,n}^2 + (\bar{\omega}_{m,n} + \alpha_m)^2]} \right. \\ \left. - \frac{\mu_{m,n} \left[e^{\mu_{m,n}t} \left(\cos \alpha_m t - \frac{\bar{\omega}_{m,n} - \alpha_m}{\mu_{m,n}} \sin \alpha_m t \right) - \cos \bar{\omega}_{m,n}t + \frac{\bar{\omega}_{m,n} - \alpha_m}{\mu_{m,n}} \sin \bar{\omega}_{m,n}t \right]}{2[\mu_{m,n}^2 + (\bar{\omega}_{m,n} - \alpha_m)^2]} \right\}.$$

Analiza rozwiązania (4.16) pod kątem maksymalnych przemieszczeń doprowadza do równań

$$(4.17) \quad \mu_{m,n}^2 + (\bar{\omega}_{m,n} + \alpha_m)^2 = 0, \quad \mu_{m,n}^2 + (\bar{\omega}_{m,n} - \alpha_m)^2 = 0.$$

Po rozwiązaniu (4.17) względem α_m mamy

$$(4.18) \quad \alpha_{1/2}^I = -\bar{\omega}_{m,n} \pm i\mu_{m,n}, \quad \alpha_{1/2}^{II} = \bar{\omega}_{m,n} \pm i\mu_{m,n}.$$

Moduł α_m jest określony następująco:

$$(4.19) \quad (\alpha_m) = \sqrt{\mu_{m,n}^2 + \bar{\omega}_{m,n}^2} = \omega_{m,n}.$$

Prędkość krytyczna bez uwzględnienia tłumienia ma postać:

$$(4.20) \quad \bar{V}_{m,n} kr = \frac{l}{\bar{m}\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{m,n}^4 D}{\bar{m}} + \frac{k}{\bar{m}}},$$

gdzie $l = a$.

Aby otrzymać wzory na prędkość krytyczną z uwzględnieniem tłumienia należy wielkość α_m przyrównać do części rzeczywistej (4.18). Pomijając wartości ujemne, wynikające z «charakteru falowego» zagadnienia, możemy napisać

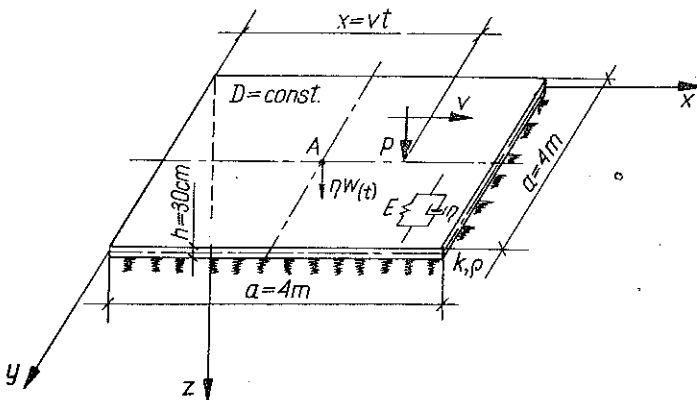
$$(4.21) \quad \alpha_m = \bar{\omega}_{m,n}, \quad \alpha_m = \mu_{m,n}.$$

Z równania (4.21) otrzymamy wzór na prędkość krytyczną z uwzględnieniem tłumienia.

$$(4.22) \quad V_{m,n} kr = \frac{l}{m\pi} \sqrt{\omega_{m,n}^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{\bar{m}} + \tau\omega_{m,n}^2 - \frac{k\tau}{\bar{m}} \right)^2}.$$

5. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY. ZASTOSOWANIE RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Ze względu na pojawiające się trudności nie do pokonania przy wyznaczaniu funkcji własnej płyty o wolnych brzegach (rys. 7) proponujemy w końcowym rozdziale rozwiązanie przybliżone równania (4.5) przy zastosowaniu sposobu różnic skończonych.



Rys. 7. Płyta lepkosprężysta o wolnych krawędziach na podłożu odkształcalnym pod obciążeniem ruchomym

Rozwiązanie problemu przy pominięciu drgań swobodnych zanikających ma postać

$$(5.1) \quad w(x, y, t) = \frac{P}{\bar{m}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{m,n}(x, y) \frac{1}{\bar{\omega}_{m,n} N_{m,n}} \int_0^t e^{-\mu_{m,n}(t-\xi)} (x=v\xi, y_0) \times \\ \times \sin \bar{\omega}_{m,n}(t-\xi) d\xi.$$

Wzorując się na monografii W. NOWACKIEGO [17], str. 328, wzór 17, przepisujemy równanie (5.1) w formie przystosowanej do metody różnic skończonych:

$$(5.2) \quad w(i, j, t) = \frac{P}{\bar{m}} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} W_{i,j}^{(k,l)} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} W_{s,u}^{(r,m)} \frac{e^{-\mu_{m,n} t}}{N_{m,n} \bar{\omega}_{m,n}} \int_0^t e^{\mu_{m,n} \xi} \times \\ \times \sin \bar{\omega}_{m,n}(t-\xi) d\xi.$$

Przy założeniu, że funkcje własne są określone numerycznie, po rozwiązaniu całki w równaniu (5.2) otrzymamy

$$(5.3) \quad w(i, j, t) = \frac{P}{\bar{m}} \sum_{(n)} \frac{1}{\bar{\omega}_{0m,n} N_{m,n}} \left[\frac{\bar{\omega}_{m,n}}{\mu_{m,n}^2 + \bar{\omega}_{m,n}^2} - \frac{e^{-\mu_{m,n} t}}{\mu_{m,n}^2 + \bar{\omega}_{m,n}^2} \times \right. \\ \left. \times (\mu_{m,n} \sin \bar{\omega}_{m,n} t + \bar{\omega}_{m,n} \cos \bar{\omega}_{m,n} t) \right] \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} W_{ij}^{(k,l)} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} W_{s,u}^{(r,m)},$$

gdzie

$$N_{m,n} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} (W_{ij}^{k,l,r,m})^2 \Delta^2, \quad \Delta x = \Delta y = \Delta.$$

Rozpatrzmy płytę betonową o wymiarach $400 \times 400 \times 30$ cm³, spoczywającą na podłożu sprężystym o współczynniku sprężystości $k=4$ kG/cm³. Ciężar płyty $G=4 \times 4 \times 0,3 \times 2000=9600$ kG, ciężar właściwy betonu $\gamma_{\text{bet}}=2000$ kG/m³. Masa całkowita płyty $M=4 \times 4 \times 0,3 \times 2000=9600$ kg. Masa całkowita płyty może być również obliczona inaczej:

$$M = \frac{G}{g} = \frac{9600}{981} = 9,79 \text{ [kGs}^2\text{/cm]}.$$

$$\text{Masa jednostkowa płyty } \bar{m} = \frac{M}{F} = \frac{0,3 \times 4 \times 4 \times 2000}{4 \times 4} = 0,06 \text{ [kG/cm}^2\text{]}.$$

Masę jednostkową możemy również obliczyć inaczej:

$$\bar{m} = \frac{G}{gF} = \frac{9,79}{400 \times 400} = 0,0000611 \text{ [kGs}^2\text{/cm}^3\text{]}.$$

Logarytmiczny dekrement tłumienia w podłożu pod płytą drogowo-lotniskową można przyjmować $\kappa=0,4-0,6$. Zatem odpowiednie liczby tłumienia są następujące:

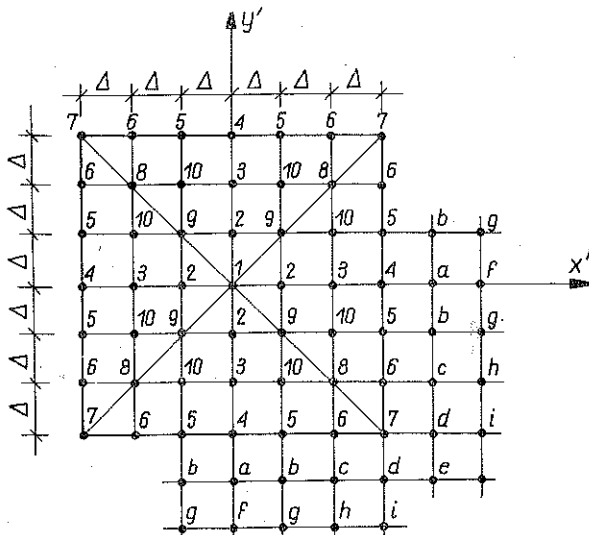
$$[D_1]_{\kappa=0,4} = \frac{\kappa}{\sqrt{4\pi^2 + \kappa^2}} = 0,0636,$$

$$[\bar{D}_1]_{\kappa=0,6} = 0,0952.$$

Czas opóźnienia τ dla betonu jest dosyć trudny do analitycznego bezpośredniego wyznaczenia; zależy on bardzo silnie jak wiadomo od temperatury, wilgotności i składu technologicznego. Tak więc po dyskusji [32] ostatecznie zakładając charakter przybliżony naszego obliczenia przyjmujemy następujące dane:

$$\kappa=0,6, \quad \tau=500 \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem częstości kołowej drgań płyty. Założymy pierwszą symetryczną postać drgań płyty. Płytę dzielimy na 36 części (rys. 8). W mo-



Rys. 8. Podział płyty siatką ortogonalną na elementy

nografii Z. KĄCZKOWSKIEGO [16] podano gotowe algorytmy dla punktów leżących w pobliżu lub na swobodnej krawędzi i na narożniku. Algorytmy te uwzględniają warunki brzegowe⁽¹⁾. Własności własne zagadnienia brzegowego otrzymamy przyrównując do zera wyznacznik uporządkowanego układu równań różniczkowych. Macierz tego wyznacznika daje się zsymetryzować względem głównej przekątnej. Oznaczmy przez $X_n = \lambda_n^4 \Delta^4$ i przyjmijmy $\nu_{bet} = 0,2$. Rozwiązanie wyznacznika przeprowadzono przy zastosowaniu elektronicznej maszyny cyfrowej GIER, program «obliczenie wartości własnych macierzy symetrycznych». Otrzymane dziewięć

⁽¹⁾ W tym miejscu należy zwrócić uwagę na błąd w [16] na stronie 414, rys. 12-13b w punkcie $(r-2, p-1)$ powinno być $2-\nu$, nie zaś $2(2-\nu)$, a na rys. 12-13c w punkcie (r, p) powinno być $(3+\nu)(1-\nu)$, nie zaś $5-\nu^2$.

wartości własnych $X_{1...9}$ pozwala na określenie ze wzoru (5.4) dziewięciu kolejnych częstości kołowych drgań swobodnych symetrycznych płyty:

$$(5.4) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{X_n D}{\bar{m}(\Delta)^4} + \frac{k}{\bar{m}}}$$

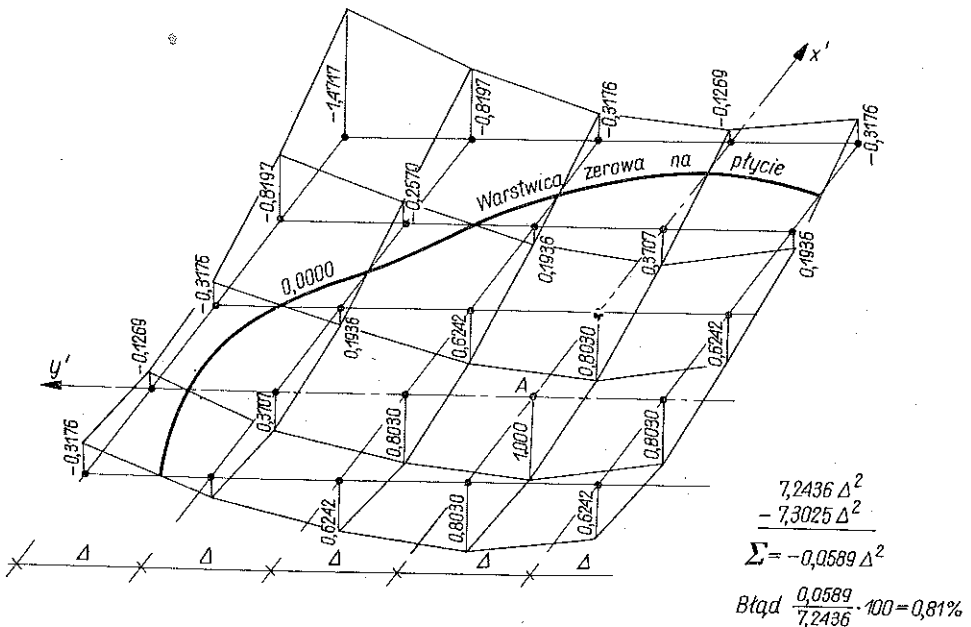
Częstości kołowe podano w tablicy 1.

Tablica 1

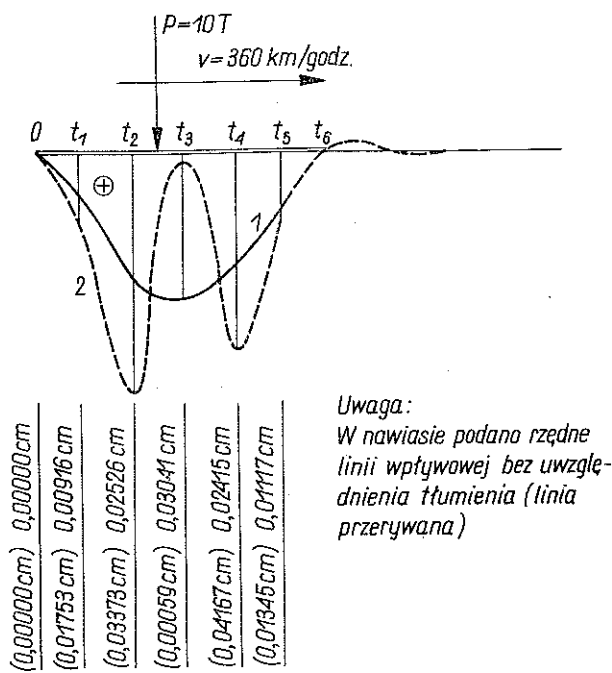
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
Wartość przy podziale na 36 części	324 1/sek	565 1/sek	894 1/sek	1145 1/sek	1645 1/sek	1827 1/sek
Wartość przy podziale na 16 części	331 1/sek	582 1/sek	816 1/sek	1220 1/sek	1952 1/sek	
%	2,52 %	3,1 %	9,55 %	6,55 %	32 %	

Na rysunku 9 podano pierwszą symetryczną postać drgań odpowiadającą częstości $[\omega]_{n=1}$. Ograniczając liczbę wyrazów nieskończonego szeregu do dwu, wyznaczono dynamiczne linie wpływu przemieszczenia pionowego punktu 1 dla dwu różnych prędkości obciążenia $P=10T$:

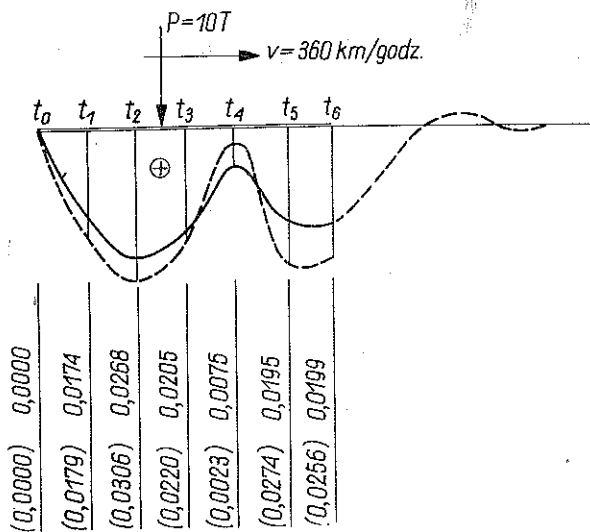
$V_1=24$ kG/godz. i $V_2=360$ kG/godz. (rys. 10, 11, 12)



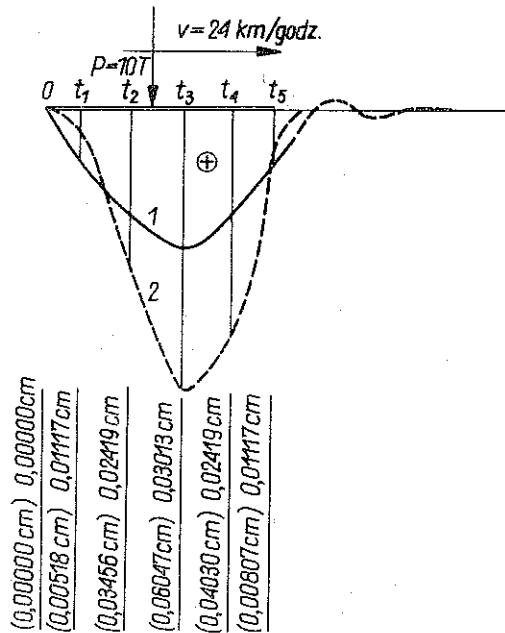
Rys. 9. Funkcja własna płyty — pierwsza symetryczna postać drgań podana dla 1/4 płyty z zaznaczeniem warstwy zerowej



Rys. 10. Dynamiczna linia wpływowa przemieszczenia pionowego punktu A z uwzględnieniem (1) oraz bez uwzględnienia tłumienia przy $V=360 \text{ km/godz.}$



Rys. 11. Dynamiczna linia wpływowa przemieszczenia pionowego punktu A przy założeniu, że płyta jest nieskończenie sztywna z uwzględnieniem (1) i bez uwzględnienia tłumienia (2) $V=360 \text{ km/godz.}$



Rys. 12. Dynamiczna linia wpływa przemieszczenia pionowego punktu A z uwzględnieniem (1) oraz bez uwzględnienia tłumienia przy $V=24$ km/godz.

6. WNIOSKI I UOGÓLNIENIA

W pracy wykazano, że tłumienie zewnętrzne (w podłożu sprężystym) i tłumienie wewnętrzne (tarcie wewnętrzne materiału) wpływają na prędkość krytyczną powodując jej zmniejszenie w porównaniu do prędkości krytycznej obciążenia dla belki i płyty sprężystej. Wpływ masy obciążenia sprowadza zagadnienie do rozwiązania równania całkowego Voltery drugiego rodzaju. Przeprowadzona analiza przykładu obliczeniowego wykazała, że tłumienie zmniejsza znakomicie amplitudy drgań aperiodycznych płyty, zarówno podczas tzw. «efektu bryłowego» (płyta ma wówczas nieskończenie dużą sztywność na zginanie), jak i podczas wykonywania drgań giętnych. Dla przypadku drgań giętnych wpływ tłumienia jest bardziej efektywny, a to dlatego, iż występuje dodatkowo oprócz tłumienia podłoża wpływ tarcia konstrukcyjnego wewnętrznego w materiale samej płyty.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. TIMOSHENKO, *Etude de l'action des charges roulantes sur les rails*, La Génie Civil, p. 555, 1921
2. S. TIMOSHENKO, *Method of analysis of statical and dynamical stresses in rail*, Proc. Sec. Int National Congr. Appl. Mech., Zurich 1926.
3. J. T. KENNEY, *Stead-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load*, J. Appl. Mech., 1, 1954.
4. А. П. ФИЛИППОВ, *Колебания механических систем*, Киев 1965.
5. H. CRINER, G. MC. CANN, *Rails on elastic foundation under the influence of high-speed traveling loads*, J. Appl. Mech., 1953.
6. C. R. STEELE, *The Timoshenko beam with a moving load*, J. Appl. Mech., p. 481, 1968.

7. C. R. STEELE, *The finite beam with a moving load*, J. Appl. Mech., p. 111, 1967.
8. З. А. Кричук, *Колебания лежащей на упругом с последствием основании, с учетом массы подвижной нагрузки*, Теория оболочек и пластин, Труды IV Всесоюзной Конференции по теории оболочек и пластин, Ереван 1964, Изд. Акад. Наук Армянской ССР.
9. В. А. Киселев, *Динамические влияния перемещений внутренних сил в балках и плитах простых и на упругом основании от груза двигающегося с равномерной скоростью*, Труды МАДЯ, Вып. 18, Автотрансиздат, 1955.
10. В. А. Киселев, *Динамические поверхности влияния перемещений и внутренних сил ортотропных пластин на упругом основании с двумя коэффициентами пастели*, Исследования по теории сооружений, Вып. XII, Гостроиздат, 1963.
11. Б. Г. Коренев, М. Н. Рудимский, *Некоторые задачи динамики балок на упругом основании*, Строиздат, 1955.
12. Ржаницын, *Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени*, ГИТТЛ, Москва 1949.
13. J. NALESZKIEWICZ, *Z dynamiki belki mostowej*, Arch. Mech. Stos., 4, 1953.
14. Z. KĄCZKOWSKI, *Vibration of a beam under a moving load*, Proc. Vibr. Probl., 4, 4, 1963.
15. Z. KĄCZKOWSKI, *O drganiach belki mostowej pod wpływem przesuwających się obciążeń*, Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, Budownictwo, z. 20 (I Krajowa Konferencja Naukowa w sprawie Dynamiki Mostów), Gliwice 1967.
16. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*. Arkady, Warszawa 1969.
17. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1961.
18. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, tom I i II, PWN, Warszawa 1959.
19. M. ŻYSZKO, *Drgania nieograniczonej płyty na sprężystym podłożu pod wpływem przesuwających się obciążeń*, Rozprawa doktorska, Biblioteka PW, Warszawa 1968.
20. M. ŻYSZKO, *Pewne zagadnienie dynamiki belki mostowej*, Arch. Inżyn. Łądown., 12, 3, 1966.
21. R. SKARŻYŃSKI, *Równania ruchu nawierzchni nieciąglej i ich techniczna interpretacja*, Rozprawa doktorska, Biblioteka PW, Warszawa 1965.
22. R. SKARŻYŃSKI, *Dynamiczne linie wpływu ugięć wieloczęściowego pasma na sprężystym podłożu*, Rozpr. Inżyn., 4, 1970.
23. Z. TROJAN, *Ruch ciężna wywołany przejeżdżającą siłą skupioną*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo, z. 22, Gliwice 1968.
24. S. KALISKI, *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, WAT, Warszawa 1957.
25. S. KALISKI, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
26. Z. REIPERT, *Vibration of a beam arbitrarily supported on its edges under a moving load*, Proc. Vibr. Probl., 2, 10 Warsaw, 1969.
27. Z. REIPERT, *Vibration of frames under moving load*, Arch. Inż. Łądown., 16, 3, 1970.
28. E. SZCZEPANIAK, *Równanie dynamiczne odkształconej środkowej powierzchni płyty w przypadku dowolnego obciążenia*, Arch. Mech. Stos., 2, 1955.
29. E. SZCZEPANIAK, *Wpływ sprężystej podatności podłoża na pracę opartej na nim płyty*, Księga Jubileuszowa prof. W. Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959.
30. W. SZCZEŚNIAK, S. BOROWIK, *Drgania belki lepkosprężystej o skończonej długości i swobodnych końcach na podłożu sprężystym, wymuszone przesuwającą się siłą*, Rozpr. Inżyn., 17, 4, 1969.
31. W. SZCZEŚNIAK, *Zastosowanie różnic skończonych do obliczenia maszynami cyfrowymi podkładu kolejowego z uwzględnieniem wpływu sprężystej podatności podłoża*, Przegląd Kolejowy Drogowy, Warszawa 1966.
32. W. SZCZEŚNIAK, *Drgania wymuszone belki i płyty na podłożu odkształcalnym w zakresie lepkosprężystym pod obciążeniem ruchomym*, Rozprawa doktorska, Biblioteka PW, Warszawa 1970.
33. R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*, Arkady, Warszawa 1964.
34. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Arkady, Warszawa 1963.
35. S. ZIEMBA, W. DERSKI, *Analiza modeli reologicznych*, PWN, Warszawa 1968.
36. D. R. BLAND, *The theory of linear viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.

37. S. ZIEMBA, *Najprostsze przypadki zachowania się ciał sprężystych z uwzględnieniem tarcia wewnętrznego*, Księga Jubileuszowa prof. W. Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959.
38. E. MACIĄG, *Drgania poprzeczne belki lepkosprężystej*, Politechnika Krakowska, Zeszyt Naukowy nr 16, 1968.
39. В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев, *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*, ГИФМЛ, Москва 1960.
40. M. T. HUBER, *Pisma*, t. III (Zagadnienia kolejowe), PWN, Warszawa 1957.
41. Z. DŻYGADŁO, *Wymuszone drgania płyty o skończonej długości w płaskim opływie naddźwiękowym*, Biul. WAT, 3/16, 1967.
42. G. JEUFFREY, *Conceptions et constructions des chaussées*, t. I i II, Paris 1965.
43. Z. REIPERT, *Zastosowanie funkcji własnych do rozwiązywania pewnych praktycznych zagadnień inżynierskich*, Księga Konferencyjna, Krynica 1968.
44. J. KRZEMIŃSKI, *Krytyczne prędkości obciążeń skupionych poruszających się po powłoce walcowej*, Prace IPPT-PAN, 28, 1970.
45. Т. К. Кучма, А. Б. Моргаевски, *Расчет пластин на подвижные нагрузки*, Теория плит и оболочек, Москва 1970.
46. Z. OLEŚNIAK, *Dynamiczne zagadnienie ciał o własnościach lepkosprężystych*, Rozpr. Inżyn., 9, 4, 1961.
47. Z. MAZURKIEWICZ, M. ŻÓRAWSKI, *Wpływ nagłej zmiany więzów na odkształcenia ustrojów sprężystych*, AIL, 8, 4, 1962.
48. *Rheology* pod red. F. R. EIRICH praca T. ALFREY, E. F. GURNI — tłumaczenie rosyjskie, 1961.

Резюме

АПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ БАЛОК И ПЛАСТИН НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

В работе даются решения задач о вынужденных колебаниях вязко-упругих балок или пластин на упругом основании под действием подвижного безмассового усилия, перемещающегося с постоянной скоростью. Решение получено с помощью метода ортогонализации, при использовании собственных функций краевых задач.

Из приведенного анализа следует, что критическая скорость перемещения нагрузки зависит как от внутреннего демпфирования (внутреннего трения), так и от феноменологического демпфирования в основании. Оба вида демпфирования существенно влияют на амплитуду колебаний.

SUMMARY

FORCED VIBRATIONS OF BEAMS AND PLATES RESTING ON DEFORMABLE FOUNDATION ACTED UPON BY A MOVING LOAD

The paper presents the solution of the problem of vibrations of a visco-elastic beam and plate resting on a deformable foundation; the vibrations are forced by a weightless load moving at a constant velocity. The problem is solved by means of the orthogonalization method, the eigenfunctions of the boundary value problem being used. From the analysis it follows that the critical velocity of the load depends both on the internal damping (internal friction) and on the phenomenological damping within the foundation; the both damping phenomena are shown to have a significant influence on the vibration amplitude.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 lutego 1972 r.