

## STATECZNOŚĆ POWŁOKI STOŻKOWEJ POZA GRANICĄ SPRĘŻYSTOŚCI

JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

Praca zawiera wyprowadzenie wzorów opisujących zagadnienie utraty stateczności powłoki w kształcie stożka ściętego poza granicą sprężystości. Problem sprowadzono do układu równań cząstkowych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach. W rozważaniach oparto się na związkach fizycznych deformacyjnej teorii plastyczności Nádai'a-Hencky'ego, uwzględniając ściślliwość materiału powłoki i wykorzystując koncepcję wzrastającego obciążenia Shanleya-Rabotnova. Wyjściowych równań nie uproszczono, a moduły wzmocnienia uzależniono od współrzędnych geometrycznych powierzchni podstawowej powłoki.

Wykorzystując metodę ortogonalizacyjną rozwiązano i przeprowadzono obliczenia numeryczne dolnych obciążeń krytycznych dla pewnego przypadku swobodnie podpartej powłoki, obciążonej wszechstronnym ciśnieniem równomiernym.

### 1. WPROWADZENIE

Problem wyboczenia powłok poza granicą sprężystości stanowi stosunkowo mało zbadaną dziedzinę w porównaniu z dość dużą ilością opracowań zagadnień dotyczących sprężystej utraty stateczności. W roku 1967 ukazała się publikacja E. I. GRIGOLUKA [6], w której autor przedstawił stan dotychczasowych badań nad pozasprężystym wyboczeniem powłok oraz przytoczył w dość zwarty sposób wyniki większości prac. Zagadnienie stateczności powłoki stożkowej jest bardziej złożone od zagadnienia stateczności powłok cylindrycznych czy też kulistych ze względu na niejednorodny rozkład naprężeń w stanie przedkrytycznym. Konsekwencją tego jest uzależnienie modułów wzmocnienia  $E_c$  i  $E_k$  od współrzędnych geometrycznych i znaczne rozbudowanie równań podstawowych. Z tego też powodu [6] istnieje kilka zaledwie prac dotyczących bezpośrednio powłoki stożkowej; natomiast powłoki walcowe i kuliste są szeroko opracowane.

W pracy A. W. SACZENKOWA [16] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia czysto plastycznej utraty stateczności powłoki stożkowej, wykonanej z materiału nieściśliwego według związków fizycznych ILIUSZINA [8] przy założeniu potęgowego umocnienia materiału. Zagadnienie zostało uproszczone przez pominięcie zależności modułów  $E_c$  i  $E_k$  od współrzędnych. W przypadku osiowego obciążenia powłoki autor pominął w równaniach różniczkowych wyższe pochodne, a współczynniki równań traktował jako stałe. Wykorzystując wyniki pracy [3], P. W. MJURSEPP w pracy [12] rozpatrzył stateczność powłoki stożkowej obciążonej zewnętrznym,

liniowo zmieniającym się wzdłuż tworzących ciśnieniu, przyjmując liniowe umocnienie materiału, ograniczając się do przypadków powłok o małej zbieżności. Zagadnienie rozwiązano metodą małego parametru, za który uważano stosunek różnicy średnic obydwu podstaw do ich średniej geometrycznej. Otrzymano związki określające obciążenie krytyczne dla zerowego, pierwszego i drugiego przybliżenia przy sztywno zamocowanych brzegach powłoki. Celem pracy TRAPEZINA [17] było uzyskanie jak najbardziej prostego związku, określającego obciążenie krytyczne powłoki stożkowej zaostrejonej, obciążonej stałym ciśnieniem zewnętrznym. Przyjęto, że powłoka jest utwierdzona sztywno u podstawy, założono nieściśliwość materiału i dowolną charakterystykę umocnienia. Zagadnienie rozwiązano metodą ortogonalizacyjną i metodą małego parametru, wykorzystując związki teorii deformacyjnej i liniowe geometrycznie równania równowagi i nierozdzielności odkształceń.

W cytowanych pracach przyjęto, że utrata stateczności następuje w stanie czysto plastycznym, pomijając odciążenie.

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie równań różniczkowych zagadnienia utraty stateczności powłoki stożkowej poza granicą sprężystości w sposób ogólny oraz rozwiązanie pewnego przypadku swobodnie podpartej powłoki, obciążonej wszechstronnym ciśnieniem równomiernym. Nie wprowadzono przy tym ograniczeń odnośnie parametrów geometrycznych czy też fizycznych, współczynniki równań traktowano jako zmienne, a moduły wzmocnienia  $E_c$  i  $E_k$  uzależniono od współrzędnych geometrycznych powłoki. Uwzględniono również ściśliwość materiału powłoki. Przyjęto przy tym koncepcję wzrastającego obciążenia SHANLEYA-RABOTNOVA, a całość rozważań oparto na związkach fizycznych deformacyjnej teorii plastyczności NADAI'A-HENCKY'EGO ze względu na lepszą zgodność tej teorii z badaniami doświadczalnymi. Fakt ten został potwierdzony przez wielu badaczy, którzy zajmowali się wyboczeniem płyt i powłok w stanach sprężysto-plastycznych, m.in. [18].

## 2. WARUNKI RÓWNOWAGI

Rozpatrujemy kołową powłokę stożkową według rys. 1. Odwzorowanie współrzędnych  $Z^A$  ortogonalnego układu kartezjańskiego  $\{Z^A\}$  na  $X^K$  krzywoliniowego układu na powierzchni podstawowej powłoki określają związki:

$$(2.1) \quad Z^I = X^1 \sin \alpha \cos X^2, \quad Z^{II} = X^1 \sin \alpha \sin X^2, \quad Z^{III} = X^1 \cos \alpha.$$

Stąd określimy wektory  $G_A$ ,  $G_3$  bazy lokalnej:

$$G_A = Z^A_{,A} I_A, \quad G_3 = \frac{G_1 \times G_2}{|G_1 \times G_2|}.$$

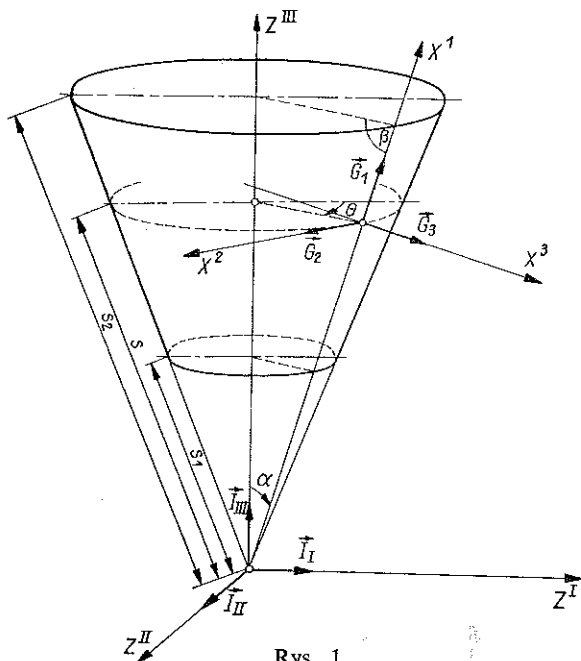
Tak więc

$$(2.2) \quad \begin{aligned} G_1 &= \sin \alpha \cos \theta I_1 + \sin \alpha \sin \theta I_{11} + \cos \alpha I_{111}, \\ G_2 &= -s \sin \alpha \sin \theta I_1 + s \sin \alpha \cos \theta I_{11}, \\ G_3 &= -\cos \alpha (\cos \theta I_1 + \sin \theta I_{11}) + \sin \alpha I_{111}. \end{aligned}$$

Wzory (2.2) umożliwiają wyznaczenie składowych pierwszego tensora metrycznego  $G_{AA}$  i  $G^{AA}$  stanu początkowego:

$$(2.3) \quad G_{AA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 \sin^2 \alpha \end{vmatrix}, \quad G^{AA} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^{-2} \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{vmatrix},$$

$$G_{33} = G^{33} = 1.$$



Rys. 1

Składowe drugiego tensora metrycznego są następujące:

$$(2.4) \quad 'G_{AA} = G_3 G_{A,A}, \quad 'G^A = G^{A\Phi} 'G_{A\Phi},$$

$$'G_{AA} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \sin \alpha \cos \alpha \end{vmatrix}, \quad 'G^A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix}$$

oraz symbole Christoffela pierwszego i drugiego rodzaju, różne od zera:

$$(2.5) \quad [22, 1] = -s \sin^2 \alpha, \quad [12, 2] = [21, 2] = s \sin^2 \alpha$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 22 \end{Bmatrix} = -s \sin^2 \alpha, \quad \begin{Bmatrix} 2 \\ 21 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 12 \end{Bmatrix} = \frac{1}{s}.$$

Równania równowagi elementu dowolnej powłoki [2] przedstawione są następującymi formułami:

$$(2.6) \quad n^{\alpha\beta} |_{\alpha} - 'g_{\beta}^{\alpha} m^{\lambda\alpha} = 0,$$

$$'g_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} + p = 0,$$

$$\varepsilon_{\lambda\beta} (n^{\lambda\beta} - 'g_{\alpha}^{\lambda} m^{\alpha\beta}) = 0.$$

Równanie (2.6)<sub>3</sub> pomijamy, gdyż warunkuje ono jedynie symetrię tensora naprężeń. Po rozwinięciu i opuszczeniu wyrazów mnożonych przez zerowe składowe tensorów metrycznych uzyskamy następujący układ równań:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} n^{11}|_1 + n^{22}|_2 &= 0, \\ n^{22}|_2 + n^{12}|_1 - 'g_2^2(m^{12}|_1 + m^{22}|_2) &= 0, \\ 'g_{22} n^{22} + m^{11}|_{11} + m^{12}|_{12} + m^{21}|_{21} + m^{22}|_{22} + p &= 0. \end{aligned}$$

Przyjmując uproszczoną metrykę przestrzeni oraz mając na uwadze, że

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 22 \end{array} \right\}_{,2} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 12 \end{array} \right\}_{,2} = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 22 \end{array} \right\}_{,1} = -\sin^2 \alpha, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 12 \end{array} \right\}_{,1} = \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 21 \end{array} \right\}_{,1} = -\frac{1}{s^2},$$

wyznamy wartości pochodnych kowariantnych tensora sił i momentów, które po podstawieniu wartości tensorów metrycznych przyjmą postać:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} n^{11}|_1 &= n^{11},_1, \\ n^{21}|_2 &= n^{21},_2 + \frac{1}{s} n^{11} - s \sin^2 \alpha n^{22}, \\ n^{12}|_1 &= n^{12},_1 + \frac{1}{s} n^{12}, \\ n^{22}|_2 &= n^{22},_2 + \frac{1}{s} (n^{12} + n^{21}), \\ m^{12}|_1 &= m^{12},_1 + \frac{1}{s} m^{12}, \\ m^{22}|_2 &= m^{22},_2 + \frac{1}{s} (m^{12} + m^{21}), \\ m^{11}|_{11} &= m^{11},_{11}, \\ m^{22}|_{22} &= m^{22},_{22} + \frac{2}{s} (m^{12},_2 + m^{21},_2) + s \sin^2 \alpha m^{22},_1 + \frac{2}{s} m_{11}, \\ m^{12}|_{12} &= m^{12},_{12} - s \sin^2 \alpha m^{22},_1 + \frac{1}{s} m^{11},_1 - \sin^2 \alpha m^{22} - \frac{1}{s^2} m^{11}. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.4) i (2.8) do (2.7), uzyskamy

$$(2.9) \quad \begin{aligned} n^{11},_1 + n^{21},_2 + \frac{1}{s} n^{11} - s \sin^2 \alpha n^{22} &= 0, \\ n^{12},_1 + \frac{1}{s} (2n^{12} + n^{21}) + n^{22},_2 - \frac{1}{s \operatorname{tg} \alpha} \left[ m^{12},_1 + m^{22},_2 + \frac{1}{s} (2m^{12} + m^{21}) \right] &= 0, \\ s \sin \alpha \cos \alpha n^{22} + m^{11},_{11} + m^{22},_{22} + m^{12},_{12} + m^{21},_{21} + \\ + \frac{2}{s} (m^{12},_2 + m^{21},_2 + m^{11},_1) - s \sin^2 \alpha (m^{22},_1 + 2m^{22}) + p &= 0, \end{aligned}$$

Są to równania statyki cienkiej powłoki stożkowej, w skład których wchodzi tensorowe składowe stanu napięcia  $n^{\alpha\beta}$  i  $m^{\alpha\beta}$ . Przechodząc od składowych tensorowych do fizycznych [2], wykonując przepisane operacje różniczkowania oraz przeprowadzając redukcję wyrazów, doprowadzimy wzory (2.9) do postaci

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s} n_{[11]} + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} n_{[21]} + \frac{1}{s} (n_{[11]} - n_{[22]}) = 0, \\
 & s \sin \alpha \frac{\partial}{\partial s} n_{[12]} + \frac{\partial}{\partial \theta} n_{[22]} + \sin \alpha (n_{[12]} + n_{[21]}) - \\
 (2.10) \quad & - \cos \alpha \left[ \frac{\partial}{\partial s} m_{[21]} + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} m_{[22]} + \frac{1}{s} (m_{[21]} + m_{[12]}) \right] = 0, \\
 & \cos \alpha n_{[22]} + s \sin \alpha \frac{\partial^2}{\partial s^2} m_{[11]} + \frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} m_{[22]} + \\
 & + 2 \sin \alpha \frac{\partial}{\partial s} m_{[11]} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial s} m_{[22]} + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial \theta} (m_{[12]} + m_{[21]}) + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} (m_{[12]} + m_{[21]}) + s \sin \alpha \bar{p} = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie  $m_{[\alpha\beta]}$ ,  $n_{[\alpha\beta]}$  są fizycznymi składowymi tensorów.

### 3. RÓWNANIA STATECZNOŚCI

Przyjmujemy, że przed utratą stateczności w powłoce istnieje błonowy stan naprężenia o siłach wewnętrznych:  $N_{10}, N_{20}, T_{10}, T_{20}$ . Równania stateczności uzyskamy bezpośrednio z równań statyki (2.10), dokonując wariacji składowych tensora sił i momentów. Pomijamy przy tym wyraz we wzorze (2.10)<sub>2</sub> odpowiadający sile poprzecznej, co jest zgodne z wymogami niniejszego opracowania. W zagadnieniach stateczności przez normalną składową obciążenia  $\bar{p}$  należy rozumieć wariację tego obciążenia w zależności od stanu odkształceń powierzchni środkowej przy utracie stateczności, tzn.

$$(3.1) \quad \bar{p} = N_{10} \delta\kappa_1 + N_{20} \delta\kappa_2 + 2T_{10} \delta\kappa_{12},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad \delta\kappa_1 &= \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \delta\kappa_2 = \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \beta}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \\
 \delta\kappa_{12} &= \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \cos \beta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{2s} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s^2} \operatorname{tg} \beta.
 \end{aligned}$$

oznaczają wariacje zmian krzywizn.

Biorąc pod uwagę powyższe oraz przechodząc do zapisu tradycyjnego uzyskamy:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \delta N_1}{\partial s} + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial \delta N_{21}}{\partial \theta} + \frac{1}{s} (\delta N_1 - \delta N_2) = 0, \\
 & s \cos \beta \frac{\partial \delta N_{12}}{\partial s} + \frac{\partial \delta N_2}{\partial \theta} + \cos \beta (\delta N_{12} - \delta N_{21}) = 0, \\
 (3.3) \quad & \delta N_2 \sin \beta + \frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial s^2} s \cos \beta + 2 \frac{\partial \delta M_1}{\partial s} \cos \beta - \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial \theta^2} + \\
 & - \frac{\partial \delta M_2}{\partial s} \cos \beta + \frac{2}{s} \frac{\partial \delta M_{12}}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{12}}{\partial s \partial \theta} + \left( \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \cos \beta \frac{\partial w}{\partial s} \right) N_{20} + \\
 & + s \cos \beta \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} N_{10} + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) T_{10} = 0,
 \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu funkcji sił  $\Phi$ , związanej z wariacjami sił i momentów za pomocą wzorów

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \delta N_1 = \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad \delta N_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}, \\
 & \delta N_{12} = -\delta N_{21} = -\frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta},
 \end{aligned}$$

pierwsze dwa równania (3.3) spełnią się tożsamościowo, a trzecie przyjmie postać

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \sin \beta + \frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial s^2} s \cos \beta + 2 \frac{\partial \delta M_1}{\partial s} \cos \beta + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \delta M_2}{\partial \theta^2} - \\
 & - \frac{\partial \delta M_2}{\partial s} \cos \beta + \frac{2}{s} \frac{\partial \delta M_{12}}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{12}}{\partial s \partial \theta} + \left( \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \cos \beta \frac{\partial w}{\partial s} \right) N_{20} + \\
 & + s \cos \beta \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} N_{10} + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) T_{10} = 0.
 \end{aligned}$$

Jest to pierwsze podstawowe równanie problemu. Drugim równaniem będzie równanie nierozdzielności odkształceń [17]:

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \sin \beta - \frac{\partial^2 \delta \gamma_{12}}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial \delta \gamma_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial \delta \varepsilon_2}{\partial s^2} s \cos \beta + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_1}{\partial \theta^2} + \\
 & + 2 \frac{\partial \delta \varepsilon_2}{\partial s} \cos \beta - \frac{\partial \delta \varepsilon_1}{\partial s} \cos \beta = 0.
 \end{aligned}$$

#### 4. ZWIĄZKI FIZYCZNE

W niniejszej pracy opieramy się na związkach fizycznych deformacyjnej teorii plastyczności Nádai'a-Hencky'ego [14]:

$$(4.1) \quad \sigma_{ij} = 2m(\varepsilon_i) \varepsilon_{ij} + [3K - 2m(\varepsilon_i)] \varepsilon_m \delta_{ij}.$$

Przyjmując, że  $\sigma_{11} = \sigma_s$  oznacza naprężenie wzdłużne,  $\sigma_{22} = \sigma_\theta$  naprężenie obwodowe,  $\sigma_{12} = \tau_{s\theta}$  naprężenie tnące oraz rozwijając funkcje (4.1), uzyskamy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_s &= E[3E^2 + 2EE_c(1-2\nu) - (1-2\nu)^2 E_c^2]^{-1} \{4EE_c \varepsilon_s + 2E_c[E - (1-2\nu)E_c] \varepsilon_\theta\}, \\ \sigma_\theta &= E[3E^2 + 2EE_c(1-2\nu) - (1-2\nu)^2 E_c^2]^{-1} \{4EE_c \varepsilon_\theta + 2E_c[E - (1-2\nu)E_c] \varepsilon_s\}, \\ \tau_{s\theta} &= \gamma_{s\theta} \left( \frac{1}{G} + 3 \frac{E\varepsilon_i - \sigma_i}{E\sigma_i} \right), \end{aligned}$$

gdzie  $E_c = \sigma_i / \varepsilon_i$  oznacza moduł sieciowy.

Jak wiadomo, wariacje sił i momentów w powłoce wywołane utratą stateczności są równe

$$(4.3) \quad \delta N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad \delta M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3,$$

przy czym według hipotezy Kirchhoffa-Love'a

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \delta \varepsilon_s &= \delta \varepsilon_1 - x_3 \delta \kappa_1, \\ \delta \varepsilon_\theta &= \delta \varepsilon_2 - x_3 \delta \kappa_2, \\ \delta \gamma_{s\theta} &= \delta \gamma_{12} - 2x_3 \delta \kappa_{12}. \end{aligned}$$

Wariacje naprężeń wyznaczymy z następujących wzorów:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \delta \sigma_s &= \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_s} \delta \varepsilon_s + \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_\theta} \delta \varepsilon_\theta + \frac{\partial \sigma_s}{\partial \gamma_{s\theta}} \delta \gamma_{s\theta}, \\ \delta \sigma_\theta &= \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \varepsilon_s} \delta \varepsilon_s + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \varepsilon_\theta} \delta \varepsilon_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \gamma_{s\theta}} \delta \gamma_{s\theta}, \\ \delta \tau_{s\theta} &= \frac{\partial \tau_{s\theta}}{\partial \varepsilon_s} \delta \varepsilon_s + \frac{\partial \tau_{s\theta}}{\partial \varepsilon_\theta} \delta \varepsilon_\theta + \frac{\partial \tau_{s\theta}}{\partial \gamma_{s\theta}} \delta \gamma_{s\theta}. \end{aligned}$$

Wykorzystując wzory (4.2) wyznaczymy pochodne cząstkowe naprężeń względem odkształceń, występujące w równaniach (4.5). Przy różniczkowaniu należy mieć oczywiście na uwadze, iż  $\sigma_i = \sigma_i(\sigma_s, \sigma_\theta, \tau_{s\theta})$ . Podstawiając wyznaczone pochodne wraz z funkcjami (4.4) do (4.5), a te z kolei do (4.3), uzyskamy po przeprowadzeniu całkowania następujące formuły:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \delta N_1 &= b_{11} \delta \varepsilon_1 + b_{12} \delta \varepsilon_2 - b_{13} \delta \gamma_{12}, \\ \delta N_2 &= b_{21} \delta \varepsilon_1 + b_{22} \delta \varepsilon_2 - b_{23} \delta \gamma_{12}, \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \delta N_{12} &= -b_{31} \delta \varepsilon_1 - b_{32} \delta \varepsilon_2 + b_{33} \delta \gamma_{12}, \\ \delta M_1 &= -a_{11} \delta \kappa_1 - a_{12} \delta \kappa_2 + a_{13} \delta \kappa_{12}, \\ \delta M_2 &= -a_{21} \delta \kappa_1 - a_{22} \delta \kappa_2 + a_{23} \delta \kappa_{12}, \\ \delta M_{12} &= a_{31} \delta \kappa_1 + a_{32} \delta \kappa_2 - a_{33} \delta \kappa_{12}. \end{aligned}$$

Współczynniki występujące w równaniach (4.6) i (4.7) wynoszą:

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \frac{12}{h^2} d_{11} = \frac{h}{\psi} \left\{ k \left[ \bar{k} \left( \bar{\sigma}_\theta - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_s \right)^2 + 9 \bar{\tau}_{s\theta}^2 \right] - \frac{E_k}{E_c} \bar{k} \right\}, \\
 b_{12} = b_{21} &= \frac{12}{h^2} d_{12} = \frac{12}{h^2} d_{21} = \frac{h}{\psi} \left\{ k \left[ -\bar{k} \left( \bar{\sigma}_s - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\theta \right) \left( \bar{\sigma}_\theta - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_s \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{9}{2} (\bar{k} - 2) \bar{\tau}_{s\theta}^2 \right] + \frac{1}{4} \bar{k} (\bar{k} - 1) \frac{E_k}{E_c} \right\}, \\
 (4.8) \quad b_{13} = b_{31} &= \frac{6}{h^2} d_{13} = \frac{12}{h^2} d_{31} = \frac{3hk\bar{\tau}_{s\theta}}{4\psi} \left[ \bar{k} \bar{\sigma}_s - 2 \frac{1-2\nu}{E} E_c (\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_s) \right], \\
 b_{23} = b_{32} &= \frac{6}{h^2} d_{23} = \frac{12}{h^2} d_{32} = \frac{3hk\bar{\tau}_{s\theta}}{4\psi} \left[ \bar{k} \bar{\sigma}_\theta - 2 \frac{1-2\nu}{E} E_c (\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_\theta) \right], \\
 b_{22} &= \frac{12}{h^2} d_{22} = \frac{h}{\psi} \left\{ k \left[ \bar{k} \left( \bar{\sigma}_s - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\theta \right)^2 + 9 \bar{\tau}_{s\theta}^2 \right] + \bar{k} \frac{E_k}{E_c} \right\}, \\
 b_{33} &= \frac{6}{h^2} d_{33} = \frac{h}{\psi} \left\{ \frac{1}{4} \left[ 3 + 2 \frac{1-2\nu}{E} E_k - \frac{(1-2\nu)^2}{E^2} E_k E_c \right] - \right. \\
 &\quad \left. - k \left[ \frac{1-2\nu}{E} E_c \left( \bar{\sigma}_s - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\theta \right) \left( \bar{\sigma}_\theta - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_s \right) + \frac{9}{4} \bar{\tau}_{s\theta}^2 \right] \right\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}, \quad k = 1 - \frac{E_k}{E_c}, \quad \bar{k} = 3 - \frac{1-2\nu}{E} E_c, \\
 (4.9) \quad \bar{\psi} &= \bar{k} \left\{ \frac{1}{4E_c} \left[ 3 + 2 \frac{1-2\nu}{E} E_k - \frac{(1-2\nu)^2}{E} E_k E_c \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1-2\nu}{E} k \left[ \left( \bar{\sigma}_s - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\theta \right) \left( \bar{\sigma}_\theta - \frac{1}{2} \bar{\sigma}_s \right) - \frac{9}{4} \bar{\tau}_{s\theta}^2 \right] \right\}, \\
 \bar{\sigma}_s &= \frac{\sigma_s}{\sigma_i}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_i}, \quad \bar{\tau}_{s\theta} = \frac{\tau_{s\theta}}{\sigma_i},
 \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (4.6) ze względu na odkształcenia, uzyskamy

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad \delta\varepsilon_1 &= \bar{b}_{11} \delta N_1 + \bar{b}_{12} \delta N_2 + \bar{b}_{13} \delta N_{12}, \\
 \delta\varepsilon_2 &= \bar{b}_{21} \delta N_1 + \bar{b}_{22} \delta N_2 + \bar{b}_{23} \delta N_{12}, \\
 \delta\gamma_{12} &= \bar{b}_{31} \delta N_1 + \bar{b}_{32} \delta N_2 + \bar{b}_{33} \delta N_{12}
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.11) \quad \bar{b}_{ij} = \frac{\min b_{ij}}{\det b_{ij}}.$$



Zależności (4.6) i (4.7) pokazują, że wariacje naprężeń, wchodzące w skład wariacji sił i momentów, są liniowymi funkcjami współrzędnej  $X_3$ , przy czym w odróżnieniu od przypadku sprężystej utraty stateczności zależą one nie tylko od odkształceń i mechanicznych własności materiału, ale i od działających przed utratą stateczności naprężeń. W tym właśnie tkwi specyfika zagadnienia.

Wstawiając (3.2) (po pominięciu wyrazów zawierających składowe przemieszczenia  $v$ ) do (4.7) oraz (3.4) do (4.10), uzyskamy wzory umożliwiające obliczenie pochodnych cząstkowych wariacji momentów i odkształceń względem współrzędnych  $s$  i  $\theta$ , wchodzące w skład równań (3.5) i (3.6). Podstawiając je do tychże równań uzyskamy po uporządkowaniu

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \sin \beta + \bar{b}_{22} s \cos \beta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} + \frac{1}{s \cos \beta} (\bar{b}_{33} + \bar{b}_{21} + \bar{b}_{12}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^2 \partial \theta^2} + \\
 & + (\bar{b}_{32} + \bar{b}_{23}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^3 \partial \theta} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} (\bar{b}_{32} + \bar{b}_{13}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s \partial \theta^3} + \frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} \bar{b}_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} + \\
 & + \left[ \frac{\partial \bar{b}_{32}}{\partial s} + 2 \frac{\partial \bar{b}_{33}}{\partial s} + \frac{1}{s} (\bar{b}_{31} + \bar{b}_{32} - \bar{b}_{13} - \bar{b}_{23}) + \left( \frac{\partial \bar{b}_{33}}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \bar{b}_{12}}{\partial \theta} \right) \times \right. \\
 & \quad \times \left. \frac{1}{s \cos \beta} \right] \frac{\partial^3 \Phi}{\partial s^2 \partial \theta} + \left[ \frac{\partial \bar{b}_{33}}{\partial s} + 2 \frac{\partial \bar{b}_{21}}{\partial s} - \frac{1}{s} (\bar{b}_{33} + 2 \bar{b}_{21}) + \right. \\
 & \quad + \left. \frac{1}{s \cos \beta} \left( \frac{\partial \bar{b}_{31}}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial \bar{b}_{13}}{\partial \theta} \right) \right] \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial s \partial \theta^2} + \left[ (\bar{b}_{21} - \bar{b}_{12} + 2 \bar{b}_{22} + \right. \\
 & \quad + 2s \frac{\partial \bar{b}_{22}}{\partial s}) \cos \beta + \frac{\partial \bar{b}_{32}}{\partial \theta} \left. \right] \frac{\partial^3 \Phi}{\partial s^3} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \left[ \frac{\partial \bar{b}_{31}}{\partial s} - \frac{1}{s} (\bar{b}_{31} + \bar{b}_{13}) + \right. \\
 & \quad + \left. \frac{2}{s \cos \beta} \frac{\partial \bar{b}_{11}}{\partial \theta} \right] \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} + \left[ \frac{\partial^2 \bar{b}_{21}}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \left( \frac{\partial \bar{b}_{33}}{\partial s} + 2 \frac{\partial \bar{b}_{21}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{b}_{11}}{\partial s} + \right. \right. \\
 & \quad + \left. \frac{1}{s^2} (\bar{b}_{33} + 2 \bar{b}_{21} + 2 \bar{b}_{11}) + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \bar{b}_{31}}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \cos \beta} \left( \frac{\partial \bar{b}_{31}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{b}_{13}}{\partial \theta} \right) + \right. \\
 & \quad + \left. \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 \bar{b}_{11}}{\partial \theta^2} \right] \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \cos \beta \left[ s \frac{\partial^2 \bar{b}_{22}}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial \bar{b}_{22}}{\partial s} + 2 \frac{\partial \bar{b}_{21}}{\partial s} - \right. \\
 & \quad - \left. \frac{1}{s} \bar{b}_{11} - \frac{\partial \bar{b}_{12}}{\partial s} + \frac{1}{s \cos \beta} \left( \frac{\partial \bar{b}_{31}}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{b}_{32}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \bar{b}_{12}}{\partial \theta^2} \frac{1}{\cos \beta} \right) + \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial^2 \bar{b}_{32}}{\partial s \partial \theta} \right] \times \\
 & \quad \times \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \left[ \frac{\partial \bar{b}_{31}}{\partial s} - \frac{\partial \bar{b}_{13}}{\partial s} + \frac{2}{s} \bar{b}_{13} + s \frac{\partial^2 \bar{b}_{23}}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial \bar{b}_{23}}{\partial s} + \frac{2}{s} \bar{b}_{23} + \right. \\
 & \quad + \left. \frac{1}{s \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 \bar{b}_{13}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\cos \beta} \left( \frac{\partial^2 \bar{b}_{33}}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{b}_{33}}{\partial \theta} + \frac{2}{s} \frac{\partial \bar{b}_{11}}{\partial \theta} \right) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \theta} + \\
 & + \cos \beta \left[ \frac{\partial^2 \bar{b}_{21}}{\partial s^2} - \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{b}_{11}}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \bar{b}_{11} + \frac{1}{s \cos \beta} \left( \frac{\partial^2 \bar{b}_{31}}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \bar{b}_{11}}{\partial \theta^2} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial s} +
 \end{aligned}$$

$$(4.12) \quad \begin{aligned} & + \frac{1}{s} \left[ \frac{2}{s} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{b}_{13}}{\partial s} - \frac{1}{s} \bar{b}_{13} + \frac{\partial \bar{b}_{23}}{\partial s} - \frac{1}{s} \bar{b}_{23} - s \frac{\partial^2 \bar{b}_{23}}{\partial s^2} - \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial^2 \bar{b}_{33}}{\partial s \partial \theta} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{s^2 \cos \beta} \left( \frac{\partial \bar{b}_{33}}{\partial \theta} - \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial^2 \bar{b}_{13}}{\partial \theta^2} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0, \end{aligned}$$

$$(4.13) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \sin \beta - d_{11} s \cos \beta \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - 2 \cos \beta \left( s \frac{\partial d_{11}}{\partial s} + d_{11} + \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial d_{31}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \\ & - \left[ \cos \beta \left( s \frac{\partial^2 d_{11}}{\partial s^2} + \frac{\partial d_{12}}{\partial s} + 2 \frac{\partial d_{11}}{\partial s} - \frac{d_{22}}{s} \right) + 2 \frac{\partial^2 d_{31}}{\partial s \partial \theta} + \frac{2}{s} \frac{\partial d_{32}}{\partial \theta} + \frac{2}{s} \frac{\partial d_{31}}{\partial \theta} + \right. \\ & + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 d_{21}}{\partial \theta^2} \left. \right] \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left[ \cos \beta \left( - \frac{\partial^2 d_{12}}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial d_{22}}{\partial s} - \frac{1}{s^2} d_{22} \right) - \frac{2}{s} \frac{\partial^2 d_{32}}{\partial s \partial \theta} + \right. \\ & + \frac{1}{s^2 \cos \beta} \frac{\partial^2 d_{22}}{\partial \theta^2} \left. \right] \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{2}{s \cos \beta} (d_{33} - 2d_{21}) \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2} + (d_{13} + d_{31}) \frac{\partial^4 w}{\partial s^3 \partial \theta} + \\ & + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} (d_{23} - 2d_{32}) \frac{\partial^4 w}{\partial s \partial \theta^3} + \left( 2 \frac{\partial d_{13}}{\partial s} - \frac{1}{s} d_{13} - \frac{1}{s} d_{23} + 2 \frac{\partial d_{31}}{\partial s} - \right. \\ & - \frac{2}{s} d_{32} - \frac{2}{s} d_{31} - \frac{2}{s \cos \beta} \frac{\partial d_{21}}{\partial \theta} + \frac{2}{s \cos \beta} \frac{\partial d_{33}}{\partial \theta} \left. \right) \frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial \theta} + \frac{1}{s \cos \beta} \left( \frac{2}{s} d_{22} - \right. \\ & - 2 \frac{\partial d_{12}}{\partial s} + 2 \frac{\partial d_{33}}{\partial s} - \frac{2}{s} d_{33} \left. \right) \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + \left[ \frac{\partial^2 d_{13}}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \left( \frac{1}{s} d_{13} - \frac{\partial d_{13}}{\partial s} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2s \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 d_{23}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial d_{23}}{\partial s} + \frac{1}{s} d_{23} + \frac{\partial d_{32}}{\partial s} + \frac{d_{32}}{s} - \frac{d_{33}}{s} + \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial^2 d_{33}}{\partial s \partial \theta} + \\ & + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial d_{33}}{\partial \theta} + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial d_{22}}{\partial \theta} \left. \right] \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \left( \frac{2}{s} d_{32} - \frac{1}{s} d_{23} - \right. \\ & - 2 \frac{\partial d_{32}}{\partial s} \left. \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{1}{s^2 \cos \beta} \left[ \frac{2}{s} d_{33} - 2 \frac{\partial d_{33}}{\partial s} - \frac{2}{s \cos \beta} \left( \frac{\partial d_{33}}{\partial \theta} + s \frac{\partial^2 d_{32}}{\partial s \partial \theta} - \right. \right. \\ & - \frac{\partial d_{32}}{\partial \theta} \left. \right) - s \frac{\partial^2 d_{12}}{\partial s^2} + 2 \frac{\partial d_{12}}{\partial s} + \frac{\partial d_{22}}{\partial s} - \frac{2}{s} d_{12} - \frac{2}{s} d_{22} \left. \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{2}{s^2} \left( \frac{\partial d_{13}}{\partial s} - \right. \\ & - \frac{1}{2} s \frac{\partial^2 d_{13}}{\partial s^2} - \frac{1}{s} d_{13} + \frac{1}{2s \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 d_{23}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial d_{23}}{\partial s} - \frac{d_{23}}{s} + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial d_{33}}{\partial \theta} - \\ & - \frac{1}{\cos \beta} \frac{\partial^2 d_{33}}{\partial s \partial \theta} \left. \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \frac{d_{22}}{s^3 \cos^3 \beta} + \left( \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^4} + \cos \beta \frac{\partial w}{\partial s} \right) N_{20} + \\ & + s \cos \beta \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} N_{10} = 0. \end{aligned}$$

W ten sposób problem wyboczenia powłoki stożkowej poza granicą sprężystości został sprowadzony do układu dwu równań różniczkowych cząstkowych czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach i dwu poszukiwanych funkcjach: funkcji ugięcia  $w$  i funkcji sił  $\Phi$ .

5. POWŁOKA STOŻKOWA OBCIĄŻONA WSZECHSTRONNYM CIŚNIENIEM RÓWNOMIERNYM

Rozważmy obecnie przypadek swobodnie podpartej powłoki w kształcie stożka ściętego, obciążonej wszechstronnym ciśnieniem równomiernym o intensywności  $\sigma$ . Siły błonowego stanu naprężeń określają związki:

$$(5.1) \quad N_{10} = \sigma_s h = -\frac{\sigma s}{2 \operatorname{tg} \beta}, \quad N_{20} = \sigma_\theta h = -\frac{\sigma s}{\operatorname{tg} \beta}, \quad T_{10} = T_{20} = 0,$$

gdzie  $h$  oznacza grubość powłoki.

Intensywność naprężeń określa wzór

$$(5.2) \quad \sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma s}{h \operatorname{tg} \beta}.$$

Charakterystykę materiału przyjmiemy w postaci funkcji potęgowej:

$$(5.3) \quad \sigma_i = E^{(0)} \varepsilon_i^\xi,$$

spełniającej [11] warunek o «prostym obciążeniu», co odpowiada zastosowanej tutaj deformacyjnej teorii plastyczności (4.1). Funkcja ta jest modulowana dwoma parametrami, tj.  $E^{(0)}$ ,  $\xi$  [ $\xi \in (0, 1]$ ], mogącymi przyjmować dowolne wartości, ale stałe dla konkretnego materiału.

Biorąc pod uwagę (5.2) i (5.3) wyznaczmy wartości współczynników (4.9):

$$(5.4) \quad E_c = k_1 \sigma^\lambda s^\lambda, \quad E_k = \xi k_1 \sigma^\lambda s^\lambda, \quad \frac{E_k}{E_c} = \xi = \text{const},$$

$$\bar{k} = 3 - \frac{(1-2\nu) k_1}{E} \sigma^\lambda s^\lambda, \quad k = 1 - \xi = \text{const},$$

$$\bar{\sigma}_s = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \bar{\tau}_{s\theta} = 0,$$

gdzie

$$k_1 = E^{(0)-\xi} \left( \frac{\sqrt{3}}{2h \operatorname{tg} \beta} \right)^\lambda, \quad \lambda = \frac{\xi - 1}{\xi}, \quad \lambda \in (-\infty, 0)$$

oraz

$$(5.5) \quad \bar{\psi} = \bar{k} \left( \psi_1 \frac{1}{\sigma^\lambda s^\lambda} + \psi_2 \sigma^\lambda s^\lambda + \psi_3 \right),$$

gdzie

$$(5.6) \quad \psi_1 = \frac{3}{4k_1}, \quad \psi_2 = -\frac{(1-2\nu)^2 \xi k_1}{4E^2}, \quad \psi_3 = \frac{2(1-2\nu)\xi}{4E}.$$

Wstawiając (5.4) i (5.5) do (2.4) uzyskamy:

$$\begin{aligned}
 d_{11}(s) &= \frac{h^2}{12} b_{11}(s) = \frac{h^3}{48} (3+\xi) \frac{1}{\psi_n(s)}, \\
 d_{12}(s) &= d_{21}(s) = \frac{h^2}{12} b_{12}(s) = \frac{h^2}{12} b_{21}(s) = \frac{h^3 \xi}{48 E} \frac{2E - (1-2\nu) k_1 \sigma^\lambda s^\lambda}{\psi_n(s)}, \\
 (5.7) \quad d_{13} &= d_{31} = b_{13} = b_{31} = 0, \\
 d_{22}(s) &= \frac{h^2}{12} b_{22}(s) = \frac{h^3 \xi}{12} \frac{1}{\psi_n(s)}, \\
 d_{23} &= d_{32} = b_{23} = b_{32} = 0, \\
 d_{33}(s) &= \frac{h^2}{6} b_{33}(s) = \frac{h^3 \sigma^\lambda s^\lambda}{24 E} \frac{3E^2 + 2(1-2\nu) E \xi k_1 \sigma^\lambda s^\lambda - (1-2\nu)^2 \xi k_1^2 \sigma^{2\lambda} s^{2\lambda}}{(\psi_1 + \psi_3 \sigma^\lambda s^\lambda + \psi_2 \sigma^{2\lambda} s^{2\lambda}) [3E - (1-2\nu) k_1 \sigma^\lambda s^\lambda]},
 \end{aligned}$$

gdzie podstawiono

$$\psi_n(s)^{-1} = \frac{\sigma^\lambda s^\lambda}{\psi_1 + \psi_3 \sigma^\lambda s^\lambda + \psi_2 \sigma^{2\lambda} s^{2\lambda}}.$$

Opierając się na wzorze (4.11) wyznaczmy współczynniki  $\bar{b}_{ij}$  układu odwróconego (4.10):

$$\begin{aligned}
 \bar{b}_{11}(s) &= \frac{16E^2}{h} \frac{1}{\psi_n(s) \psi_m(s)}, \quad \bar{b}_{22}(s) = \frac{4E^2}{h\xi} \frac{3+\xi}{\psi_n(s) \psi_m(s)}, \\
 (5.8) \quad \bar{b}_{12}(s) &= b_{21}(s) = -\frac{4E}{h} \frac{2E - (1-2\nu) k_1 \sigma^\lambda s^\lambda}{\psi_n(s) \psi_m(s)}, \\
 \bar{b}_{33}(s) &= \frac{4E}{h} \frac{3E - (1-2\nu) k_1 \sigma^\lambda s^\lambda}{[3E^2 + 2(1-2\nu) E \xi k_1 \sigma^\lambda s^\lambda - (1-2\nu)^2 \xi k_1^2 \sigma^{2\lambda} s^{2\lambda}] \psi_n(s)},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\psi_m(s) = 4E^2(3+\xi) - \xi [2E - (1-2\nu) k_1 \sigma^\lambda s^\lambda]^2.$$

Jak widać, współczynniki  $d_{ij}$  i  $\bar{b}_{ij}$  są funkcjami argumentu  $s$ . W podstawowych równaniach problemu (4.12) (4.13) oprócz tych współczynników występują ich pierwsze i drugie pochodne. Ponieważ mają one dość złożoną i rozbudowaną postać nie przytaczamy wszystkich, lecz dla przykładu podajemy jeden z nich, mianowicie  $\bar{b}_{12}(s)_{,ss}$ :

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad \bar{b}_{12}(s)_{,ss} &= -\frac{4E}{h} \frac{\lambda}{\{4E^2(3+\xi) - \xi [2E - (1-2\nu) k_1 \sigma^\lambda s^\lambda]^2\}^3 s^{3\lambda}} \times \\
 &\quad \times \{D_1(s) D_2(s) - 2\lambda [12E^2 s^{(\lambda-1)} + 8E(1-2\nu) k_1 \xi \sigma^\lambda s^{(2\lambda-1)} - \\
 &\quad - 3(1-2\nu)^2 k_1^2 \xi \sigma^{2\lambda} s^{(3\lambda-1)}] D_3(s)\},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 D_1(s) = & -24(\lambda-1)E^3 \psi_1 s^{(\lambda-2)} - 16(2\lambda-1)E^2 \psi_1 (1-2\nu) k_1 \xi \sigma^\lambda s^{2(\lambda-1)} + \\
 & + 2(3\lambda-1)E[5(1-2\nu)^2 k_1^2 \psi_1 \xi - 10E(1-2\nu) k_1 \psi_3 \xi + \\
 & + 12E^2 \psi_3] \sigma^{2\lambda} s^{(3\lambda-2)} + 2(4\lambda-1) \{ (1-2\nu) k_1 \xi [2E\psi_3 - \\
 & - (1-2\nu) k_1 \psi_1] - 12E^2 \psi_2 \} (1-2\nu) k_1 \sigma^{3\lambda} s^{2(2\lambda-1)} - \\
 & - (5\lambda-1)(1-2\nu)^2 k_1^2 [2E\psi_2 + (1-2\nu) k_1 \psi_3] \sigma^{2\lambda} s^{(5\lambda-2)}, \\
 D_2(s) = & 12E^2 s^\lambda + 4(1-2\nu) k_1 E \xi \sigma^\lambda s^{2\lambda} - (1-2\nu)^2 k^2 \xi \sigma^{2\lambda} s^{2\lambda}, \\
 D_3(s) = & -24E^3 \psi_1 s^{(\lambda-1)} - 16E^2 \psi_1 (1-2\nu) k_1 \xi \sigma^\lambda s^{(2\lambda-1)} + \\
 & + 2E[5(1-2\nu)^2 k_1^2 \psi_1 s^{(\lambda-1)} - 16E^2 \psi_1 (1-2\nu) k_1 \xi \sigma^\lambda s^{(2\lambda-1)} + \\
 & + 2E[5(1-2\nu)^2 k_1^2 \psi_1 \xi - 10E k_1 (1-2\nu) \psi_3 \xi + 12E^2 \psi_3] \sigma^{2\lambda} s^{(3\lambda-1)} + \\
 & + 2 \{ (1-2\nu) k_1 \xi [2E\psi_3 - (1-2\nu) k_1 \psi_1] - 12E^2 \psi_2 \} \times \\
 & \times (1-2\nu) k_1 \sigma^{3\lambda} s^{(4\lambda-1)} - (1-2\nu)^2 k [2E\psi_2 + (1-2\nu) k_1 \psi_3] \sigma^{4\lambda} s^{(5\lambda-1)}.
 \end{aligned}$$

Podstawiając współczynniki  $\bar{b}_{ij}$ ,  $d_{ij}$  i ich pochodne do równań (4.12) i (4.13), otrzymujemy następujące równania:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \sin \beta + \alpha_1(s) \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \alpha_2(s) \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \bar{\alpha}_3(s) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \bar{\alpha}_4(s) \frac{\partial w}{\partial s} + \alpha_5(s) \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \theta^2} + \\
 + \alpha_7(s) \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \theta^2} + \bar{\alpha}_9(s) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \alpha_{10}(s) \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} = 0, \\
 (5.10) \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \sin \beta + \beta_1(s) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} + \beta_2(s) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2 \partial \theta^2} + \beta_3(s) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} + \beta_4(s) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial s \partial \theta^2} + \\
 + \beta_5(s) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial s^3} + \beta_6(s) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \beta_7(s) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \beta_8(s) \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0.
 \end{aligned}$$

Zmienne współczynniki  $\alpha_i(s)$  i  $\beta_i(s)$  równań (5.10) są następujące:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(s) = & -d_{11}(s) s \cos \beta, \\
 \alpha_2(s) = & -2 \cos \beta [s d_{11}(s)_{,s} + d_{11}(s)], \\
 (5.11) \quad \bar{\alpha}_3(s) = & -\cos \beta \left[ s d_{11}(s)_{,ss} + d_{12}(s)_{,s} + 2d_{11}(s)_{,s} - \frac{1}{s} d_{22}(s) \right] + s \cos \beta N_{10}, \\
 \bar{\alpha}_4(s) = & \cos \beta \left[ -d_{12}(s)_{,ss} + \frac{1}{s} d_{22}(s)_{,s} - \frac{1}{s^2} d_{22}(s) \right] + N_{20} \cos \beta, \\
 \alpha_5(s) = & \frac{2}{s \cos \beta} [d_{33}(s) - d_{21}(s)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.11) \quad & \alpha_7(s) = \frac{2}{s \cos \beta} \left[ \frac{1}{s} d_{22}(s) + d_{33}(s),_s - \frac{1}{s} d_{33}(s) - d_{12}(s),_s \right], \\
 & \bar{\alpha}_9(s) = \frac{1}{s \cos \beta} \left[ -d_{12}(s),_{ss} + \frac{2}{s} d_{12}(s),_s + \frac{1}{s} d_{22}(s),_s - \frac{2}{s} d_{33}(s),_s + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{2}{s^2} d_{12}(s) - \frac{2}{s^2} d_{22}(s) + \frac{2}{s^2} d_{33}(s) \right] + \frac{1}{s \cos \beta} N_{20}, \\
 \alpha_{10}(s) &= -\frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} d_{22}(s), \\
 \beta_1(s) &= s \cos \beta \bar{b}_{22}(s), \\
 \beta_2(s) &= \frac{1}{s \cos \beta} [\bar{b}_{33}(s) + 2\bar{b}_{12}(s)], \\
 \beta_3(s) &= \frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} \bar{b}_{11}(s), \\
 \beta_4(s) &= \frac{1}{s \cos \beta} \left[ \bar{b}_{33}(s),_s + 2\bar{b}_{21}(s),_s - \frac{2}{s} \bar{b}_{33}(s) - \frac{2}{s} \bar{b}_{12}(s) - \frac{1}{s} \bar{b}_{33}(s) \right], \\
 \beta_5(s) &= 2 \cos \beta [s\bar{b}_{22}(s),_s - \bar{b}_{22}(s)], \\
 \beta_6(s) &= \frac{1}{s \cos \beta} \left\{ \bar{b}_{21}(s),_{ss} - \frac{1}{s} \bar{b}_{33}(s),_s - \frac{2}{s} \bar{b}_{21}(s),_s - \frac{1}{s} \bar{b}_{11}(s),_s + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{s^2} [\bar{b}_{33}(s) + 2\bar{b}_{21}(s) + 2\bar{b}_{11}(s)] \right\}, \\
 \beta_7(s) &= \cos \beta \left[ s\bar{b}_{22}(s),_{ss} + 2\bar{b}_{22}(s),_s + \bar{b}_{21}(s),_s - \frac{1}{s} \bar{b}_{11}(s) \right], \\
 \beta_8(s) &= \cos \beta \left[ \bar{b}_{21}(s),_{ss} - \frac{1}{s} \bar{b}_{11}(s),_s - \frac{1}{s^2} \bar{b}_{11}(s) \right].
 \end{aligned}$$

## 6. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ

Funkcje aproksymujące  $w$  i  $\Phi$  równań (4.12), (4.13) przyjmujemy w postaci podwójnych szeregów nieskończonych

$$(6.1) \quad w(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}(s) \cos n\theta, \quad \Phi(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{mn}(s) \cos n\theta,$$

gdzie  $2n$  jest dodatnią parzystą liczbą określającą ilość półfal na obwodzie powłoki przy wyboczeniu. Biorąc w pierwszym przybliżeniu po jednym wyrazie funkcji  $w$  i  $\Phi$  (6.1) i podstawiając je do równań (4.12) i (4.13) uzyskamy

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad & \sin \beta \Phi(s),_{ss} + \alpha_1(s) w(s),_{sss} + \alpha_2(s) w(s),_{sss} + [\bar{\alpha}_3(s) - n^2 \alpha_5(s)] w(s),_{ss} + \\
 & \quad + [\bar{\alpha}_4(s) - n^2 \alpha_7(s)] w(s),_s - n^2 w(s) [\bar{\alpha}_9(s) - n^2 \alpha_{10}(s)] = 0, \\
 & \sin \beta w(s),_{ss} + \beta_5(s) \Phi(s),_{sss} + [\beta_7(s) - n^2 \beta_2(s)] \Phi(s),_{ss} + \beta_1(s) \Phi(s),_{sss} + \\
 & \quad + [\beta_8(s) - n^2 \beta_4(s)] \Phi(s),_s + n^2 \Phi(s) [n^2 \beta_3(s) - \beta_6(s)] = 0.
 \end{aligned}$$

W ten sposób układ równań różniczkowych sprowadzono do układu równań zwyczajnych (6.2). Scałkujemy go w sposób przybliżony stosując metodę Galerkin-Bubnowa. Funkcje  $w(s)$  i  $\Phi(s)$ , obieramy w postaci

$$(6.3) \quad w(s) = w_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s-s_1), \quad \Phi(s) = \Phi_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s-s_1),$$

gdzie  $m$  jest parametrem określającym ilość półfal wzdłuż tworzącej. Funkcje (6.3) spełniają kinematyczne warunki brzegowe [16]:

$$(6.4) \quad w(s_1, \theta) = 0, \quad w(s_2, \theta) = 0,$$

natomiast warunki statyczne spełnione są częściowo. Jak wiadomo, w przypadku powłok o długości  $l$  dużej w porównaniu ze średnicą, niespełnienie ściśle wszystkich warunków brzegowych nie ma istotnego znaczenia z technicznego punktu widzenia. Oznaczając lewe strony równań (6.2) przez  $F_1(s)$  i  $F_2(s)$  żądamy, aby

$$(6.5) \quad \int_{s_1}^{s_2} F_1(s) w(s) ds = 0, \quad \int_{s_1}^{s_2} F_2(s) \Phi(s) ds = 0.$$

Podstawiając (6.3) i (6.2) do (6.5) uzyskamy układ równań algebraicznych względem niewiadomych  $w_0$  i  $\Phi_0$ . Jak wiadomo, będzie on jednoznacznie spełniony, gdy zniknie wyznacznik tego układu, co jednocześnie odpowiada kryterium stateczności. W myśl tego uzyskamy ostatecznie

$$(6.6) \quad A_1(\sigma) + A_2(\sigma) n^2 + A_3(\sigma) n^4 + \frac{C}{B_1(\sigma) + B_2(\sigma) n^2 + B_3(\sigma) n^4} = 0,$$

gdzie

$$A_1(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{\pi^2}{l^2} \left[ \frac{\pi^2}{l^2} \beta_1(s) - \beta_7(s) \right] \sin \frac{\pi}{l} (s-s_1) + \frac{\pi}{l} \left[ \beta_8(s) - \frac{\pi^2}{l^2} \beta_5(s) \right] \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\pi}{l} (s-s_1) \right\} \sin \frac{\pi}{l} (s-s_1) ds,$$

$$A_2(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \left[ \beta_2(s) \frac{\pi^2}{l^2} - \beta_6(s) \right] \sin \frac{\pi}{l} (s-s_1) - \frac{\pi}{l} \beta_4(s) \cos \frac{\pi}{l} (s-s_1) \right\} \times \\ \times \sin \frac{\pi}{l} (s-s_1) ds,$$

$$A_3(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} \beta_3(s) \sin^2 \frac{\pi}{l} (s-s_1) ds,$$

$$B_1(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{\pi^2}{l^2} \left[ \frac{\pi^2}{l^2} \alpha_1(s) - \bar{\alpha}_3(s) \right] \sin \frac{\pi}{l} (s-s_1) + \frac{\pi}{l} \left[ \bar{\alpha}_4(s) - \frac{\pi^2}{l^2} \alpha_2(s) \right] \times \right. \\ \left. \times \cos \frac{\pi}{l} (s-s_1) \right\} \sin \frac{\pi}{l} (s-s_1) ds,$$

$$B_2(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \left[ \frac{\pi^2}{l^2} \alpha_5(s) - \bar{\alpha}_9(s) \right] \sin \frac{\pi}{l} (s-s_1) - \frac{\pi}{l} \alpha_7(s) \cos \frac{\pi}{l} (s-s_1) \right\} \times \\ \times \cos \frac{\pi}{l} (s-s_1) ds, \\ B_3(\sigma) = \int_{s_1}^{s_2} \alpha_{10}(s) \sin^2 \frac{\pi}{l} (s-s_1) ds, \quad C = \frac{\pi^4}{4l^2} \sin^2 \beta.$$

Równanie (6.6) jest poszukiwanym równaniem stateczności. Jak widać, obciążenie  $\sigma$  występuje w tym równaniu w sposób uwikłany. Obciążeniu krytycznemu (oznaczonemu przez  $\sigma_{kr}^*$ ) odpowiada najmniejszy rzeczywisty dodatni pierwiastek równania (6.6) przy optymalnie dobranym parametrze  $n$ .

W obliczeniach numerycznych posłużono się elektroniczną maszyną cyfrową MINSK 22. Lewą stronę równania stateczności (6.6) oznaczono przez  $F(\sigma)$ ; w ten sposób uzyskano funkcję jednej zmiennej i jednego parametru  $n$ . Przyjmując konkretne wymiary powłoki, oraz obierając szereg wartości  $\sigma$ , wyznaczono odpowiadające im wartości funkcji  $F(\sigma)$  przy  $n$  z przedziału [1, 20]. Wykonanie wykresu we współrzędnych  $F(\sigma)$ ,  $\sigma$  umożliwiło znalezienie miejsc zerowych funkcji  $F(\sigma)$ , co oczywiście odpowiada rozwiązaniu równania (6.6). Przy obliczaniu całek posłużono się numeryczną metodą Simpsona z automatycznym wyborem kroku całkowania. Całość zaprogramowano w autokodzie MAT-4.

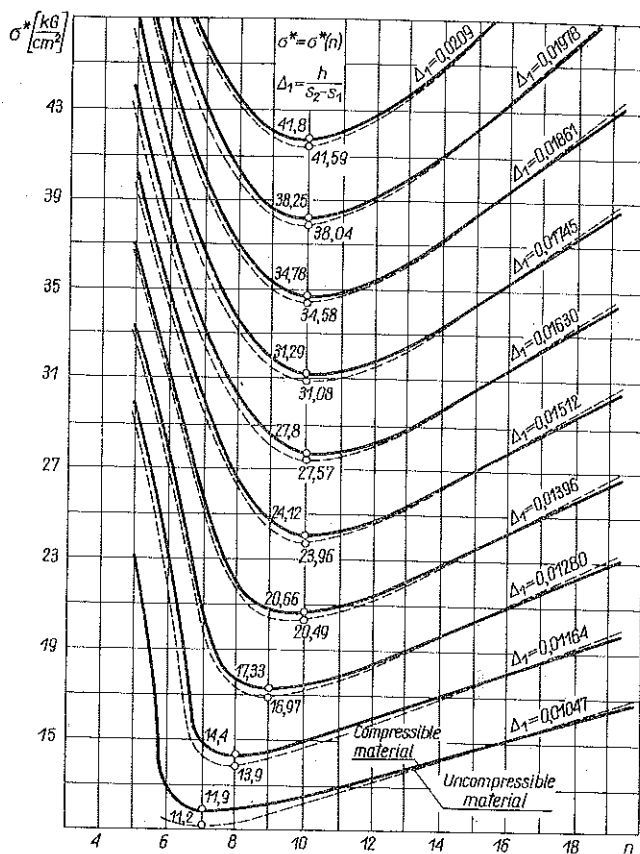
## 7. PRZYKŁAD LICZBOWY I WNIOSKI

Do obliczeń przyjęto rodzinę powłok o następujących parametrach:  $s_1 = 84$  cm,  $s_2 = 127$  cm,  $\beta = 1,082086$ ,  $E = 2 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>,  $E^{(0)} = 1,9 \cdot 10^4$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\xi = 1/3$ . Parametry te przyjęto jako stałe, a obliczenia wykonano dla dziesięciu powłok o grubościach zmieniających się od  $h = 0,45$  cm do  $h = 0,9$  cm co 0,05 cm przy współczynniku ściśliwości  $\nu = 0,5$  (materiał nieściśliwy) i  $\nu = 0,3$  (materiał ściśliwy).

Jak już wspomniano, pod pojęciem obciążenia krytycznego  $\sigma_{kr}^*$  kryje się minimalna wartość  $\sigma^*$  (spośród obliczonych dla różnych  $n$ ) dla danej powłoki. Rysunek 2 przedstawia wykres krzywych zależności miejsc zerowych funkcji  $F(\sigma)$  (oznaczonych  $\sigma^*$ ) od parametru  $n$  dla wyżej przyjętych danych. Minimum każdej krzywej określa obciążenie krytyczne  $\sigma_{kr}^*$  oraz ilość półfal  $n$  na obwodzie odkształconej przy wyboczeniu powłoki. Aby mieć możliwość ustalenia obciążenia krytycznego dla powłoki o dowolnej grubości w badanym zakresie, sporządzono wykres 3. Każdej krzywej na tym wykresie odpowiada inna liczba  $n$ . Obwiednia wszystkich krzywych określa wartość obciążenia krytycznego. Wykres 4 pokazuje rozbieżności jakie zachodzą pomiędzy obciążeniem krytycznym przy przyjęciu materiału ściśliwego i nieściśliwego. Z analizy numerycznej zagadnienia wynika, że w miarę wzrostu grubości powłoki obciążenie krytyczne wzrasta i to w sposób zbliżony do liniowego. Z wykresu 4 wynika, że dla powłok o grubościach ścianek większych różnice obciążeń krytycznych przy  $\nu = 0,3$  i  $\nu = 0,5$  są małe, natomiast zmniejszenie grubości  $h$  powoduje nieliniowy

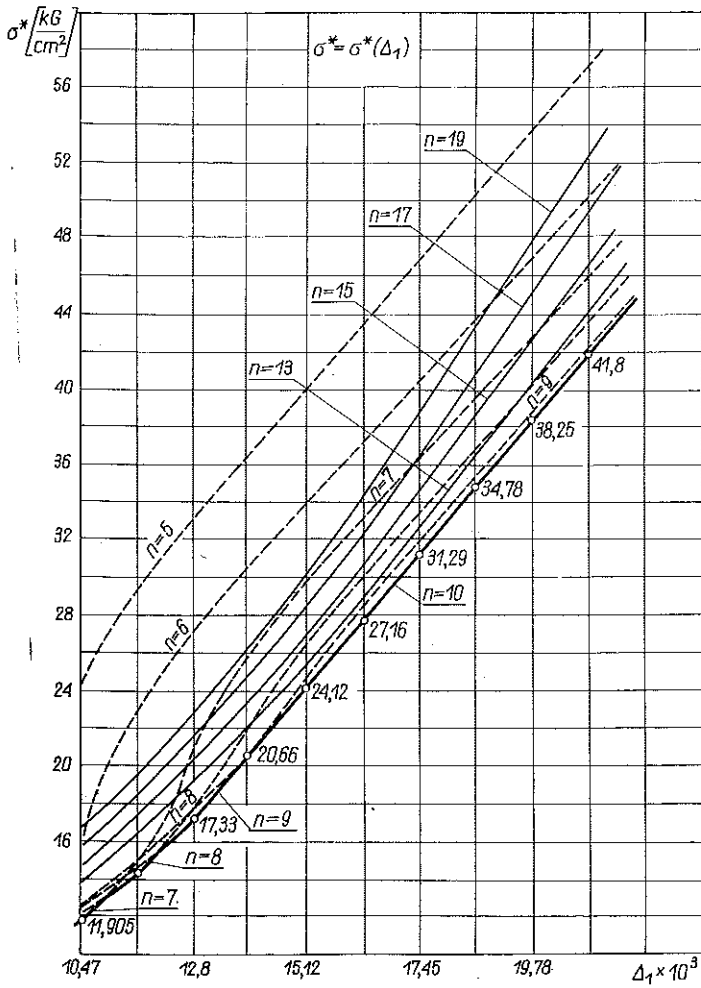


wzrost tychże różnic. Spowodowane to jest najprawdopodobniej rozwojem procesu uplastycznienia materiału w miarę wzrostu obciążenia powłok przed utratą stateczności. Zjawisko to pokrywa się w pełni z badaniami przeprowadzonymi nad powłokami cylindrycznymi [6]. Zmiana grubości powłoki nie wpływa w sposób zasadniczy na ilość półtal  $2n$  (wykres 3).

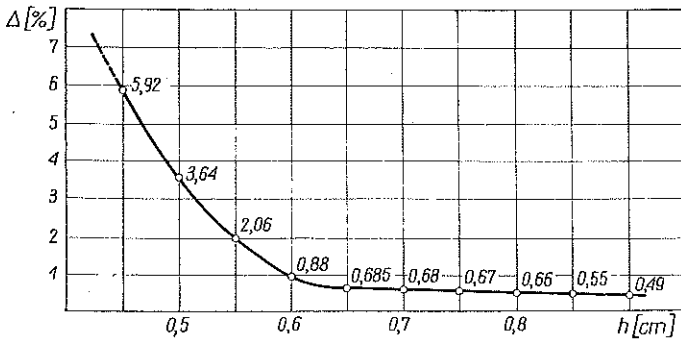


Rys. 2

Podstawowym celem niniejszej pracy było uzyskanie zależności umożliwiającej wyznaczenie obciążeń krytycznych powłoki w kształcie stożka ściętego poza granicą sprężystości materiału, uwzględniając ściśliwość materiału. Ostateczne równanie (6.6) zawiera sześć funkcji podstawowych  $A_i(\sigma)$  i  $B_i(\sigma)$ , danych w postaci pojedynczych całek zmiennej  $s$ . Ponieważ funkcje podstawowe mają dość złożoną postać, nie podano wyznaczenia ich *explicite*, lecz przeprowadzono obliczenia numeryczne. Mimo iż rozwiązanie nie zostało podane w formie zamkniętej, korzystanie z niego nie nastęrcza trudności ze względu na gotowy program obliczeń numerycznych na maszynę cyfrową. W tym miejscu nadmienić należy, że związki służące do obliczenia sił krytycznych w stanach pozasprężystych dla płyt i powłok według dotychczasowych prac również nie pozwalają na wyznaczenie poszukiwanych parametrów wprost, lecz jedynie metodą kolejnych przybliżeń. Obliczenia numeryczne wykazały, że podana



Rys. 3



Rys. 4

w pracy zależność może służyć również do obliczenia sił krytycznych dla powłok sprężystych, byleby przyjęta tutaj charakterystyka (5.3) niewiele odbiegała od prostej aproksymującej stan liniowo-sprężysty dla danego materiału. Całość analizy pozwala na stwierdzenie, że przez przyjęcie konkretnej charakterystyki materiału można w podany tutaj sposób rozwiązać szereg problemów pozasprężystej utraty stateczności powłok o niejednorodnym rozkładzie naprężeń. W dalszych badaniach należałoby zastanowić się nad zastosowaniem teorii plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. C. S. BATTERMAN, *Free-edge plastic buckling of axially compressed cylindrical shells*, Trans. ASME, **35**, 1, 1968.
2. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Oxford at the Clarendon Press, 1954.
3. Э. И. Григолюк, *О выпучивании тонких оболочек за пределом упругости*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Н., **10**, 1957.
4. Э. И. Григолюк, *Пластическое выпучивание оболочек вращения*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Н., **2**, 1958.
5. Э. И. Григолюк, *Об учете сжимаемости материалов при определении нижних критических нагрузок*, Изв. АН СССР, Отд. Техн. Н., **5**, 1958.
6. Э. И. Григолюк, *Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости тонких оболочек за пределом упругости*, Механика, Устойчивость и пластичность, Итоги Наук, 1967.
7. G. GERARD, *Plastic stability of thin shells*, I. Aeronaut. Sci., **24**, 4, 1967.
8. А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Гостехиздат, 1948.
9. L. H. N. LEE, *Inelastic buckling of initially imperfect cylindrical shells subject to axial compression*, I. Aeronaut. Sci., **29**, 1, 1962.
10. W. C. LYONS, *Elastic and plastic buckling of cylindrical shells subjected to impulsive loads*, Arch. Mech. Stos., **22**, 1, 1970.
11. Н. Н. Малинин, *Прикладная теория пластичности и ползучести*, Машиностроение, Москва 1968.
12. П. В. Мюрсеши, *К определению критической нагрузки конической оболочки вращения за пределом упругости*, Изв. АН СССР, С. Физ. Мат и Техн. Н., **1**, 1964.
13. H. NEUBER, *Die stabilität der Kugelschale unter Aussendruck bei Nichtlinear elastischer und plastischer Formänderung*, Zeit. angew. Math. und Mech., **3-4**, **46**, 1966.
14. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod naczelną redakcją W. OLSZAKA, Warszawa 1965.
15. R. S. ROTN, *Plastic buckling of thin shallow shells*, Proc. 4-th US Nat. Congr. Appl. Mech. Berkeley-Calif., 1962.
16. А. В. Саченков, *Об устойчивости оболочек за пределом упругости*, Изв. Казанск. Филь. АН СССР, С. Физ. Мат. и Техн. Н., **1**, 1964.
17. И. И. Трапезин, *Об устойчивости конической оболочки при напряжениях больших предела упругости*, Сб. Расчеты на прочность, Машин., **11**, 1965.
18. А. С. Вольмир, *Об устойчивости пластинок за пределом упругости*, Расчет пространственных конструкций, **1**, 1961.

#### Резюме

#### УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

В работе выведены зависимости, описывающие потерю устойчивости оболочки за пределом упругости. Рассматривается оболочка в виде усеченного конуса.

Задача сведена к сопряженной системе дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с переменными коэффициентами. Рассуждения исходят из физических уравнений деформационной теории пластичности Генки-Надая, с учетом сжимаемости материала и при использовании понятия возрастающей нагрузки по Шенли-Работнову. Исходные уравнения не упрощены, а модули упрочнения связаны зависимостями с геометрическими параметрами основной поверхности оболочки.

По методу ортогонализации решены и численно рассчитаны нижние критические нагрузки для некоторого случая свободно опертой оболочки, всесторонне нагруженной равномерным давлением.

#### SUMMARY

### STABILITY OF A CONICAL SHELL BEYOND THE ELASTIC LIMIT

In the paper are derived the formulae describing the loss of stability of a shell having the form of a truncated cone and deformed beyond the elastic limit. The problem is reduced to a system of partial differential equations of fourth order with variable coefficients. The considerations are based on the physical relations of the deformational plasticity theory by Nadai-Hencky, which takes into account material's compressibility and uses the concept of the Stanley-Robotnov increasing load. The fundamental equations are not simplified and the hardening moduli are assumed to depend on the geometric parameters of the shell.

Using the orthogonalization method, the lower critical loads are determined and numerically calculated in a certain case of simply supported shell subject to uniform pressure.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 stycznia 1972 r.*

---