

## ANALIZA PEWNEJ KLASY PŁASKICH DWUWARSTWOWYCH KRATOWNIC

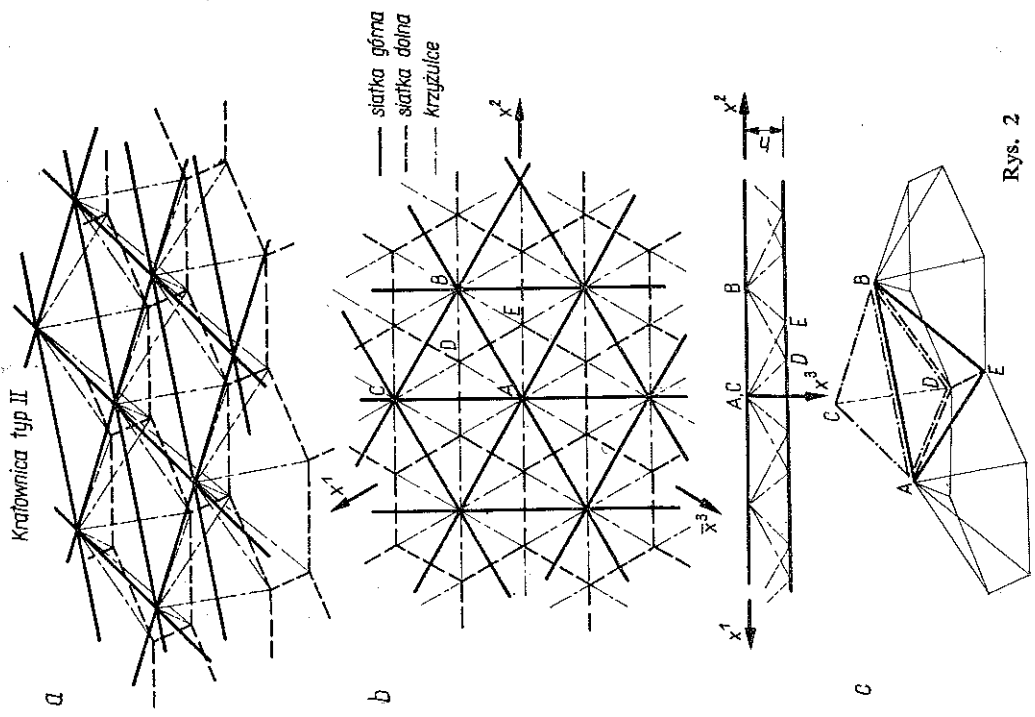
JAN BOGDAN OBRĘBSKI (WARSZAWA)

### 1. WSTĘP

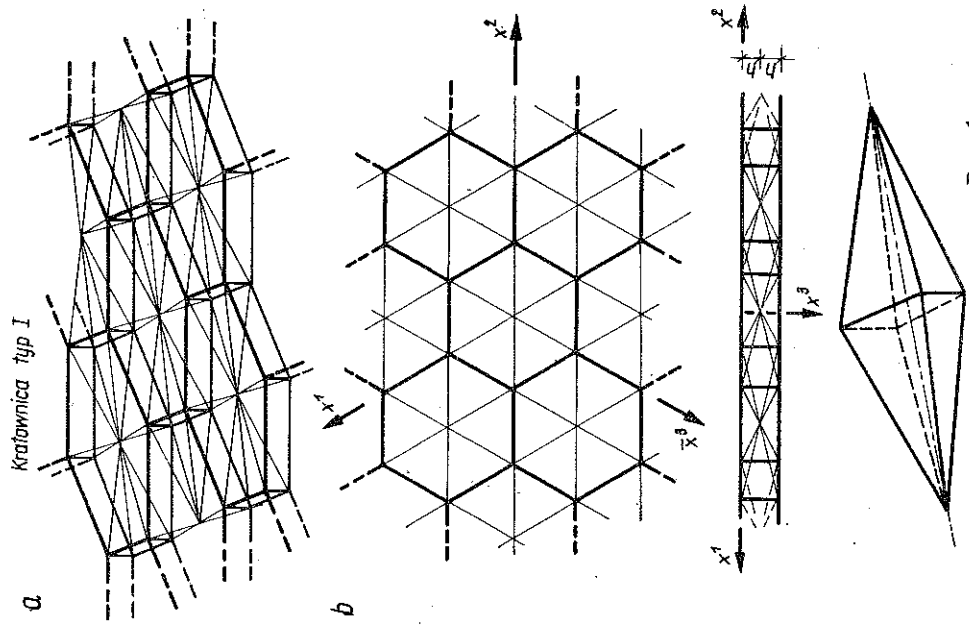
Tematem niniejszej pracy jest statyczna analiza płaskich dwuwarstwowych kratownic zawierających w rzucie poziomym motyw heksagonalnego układu prętów. Kratownice te składają się z prętów prostych i są obciążone w węzłach siłami skupionymi o dowolnie ukierunkowanym wektorze. Przy budowie równań opisujących stan równowagi w poszczególnych węzłach takiej konstrukcji wykorzystano pewną wspólną ich cechę. W konstrukcjach tych występuje jeden lub więcej rodzajów podstawowych układów powtarzalnych, z których przez przesunięcie w płaszczyźnie, obrót o  $180^\circ$ , lustrzane odbicie względem płaszczyzny środkowej kratownicy lub odpowiednią kombinację tych operacji można uzyskać każdy węzeł konstrukcji wraz z przylegającymi do niego prętami. W pracy ograniczono się do trzech typów takich kratownic jako najbardziej przydatnych do konkretnych realizacji w budownictwie. Kratownice te pokazują rys. 1, 2, 3. W konstrukcjach tych udało się wyodrębnić trzy węzły łącznie z przylegającymi do nich prętami, które są typowe dla wszystkich trzech rozpatrywanych kratownic. Bezpośrednim wynikiem pracy jest dostarczenie kompletnego materiału będącego podstawą do obliczeń numerycznych tego rodzaju przekryć dwuwarstwowych. Jednocześnie należy zwrócić uwagę na fakt, że zaprezentowana tu metoda postępowania może być bez większych trudności adoptowana do rozwiązywania dowolnych, regularnych kratownic dwuwarstwowych.

### 2. ZAŁOŻENIA I OZNACZENIA

Każda kratownica składa się z prostych sprężystych prętów pryzmatycznych, połączonych w węzłach idealnymi, pozbawionymi tarcia przegubami. Osie geometryczne prętów przecinają się w środku przegubów. W związku z tym w prętach występują jedynie siły osiowe. Siły te wzrastają od zera do swej ostatecznej wartości w sposób nieskończenie powolny. Wzory wyprowadzono na podstawie zasady zeszytnienia pozwalającej na pominięcie wpływu odkształceń układu na współrzędne punktów przyłożenia sił. Siły obciążeń zewnętrznych o wektorach dowolnie skierowanych zostały przyłożone w przegubach i przebiegają idealnie przez ich

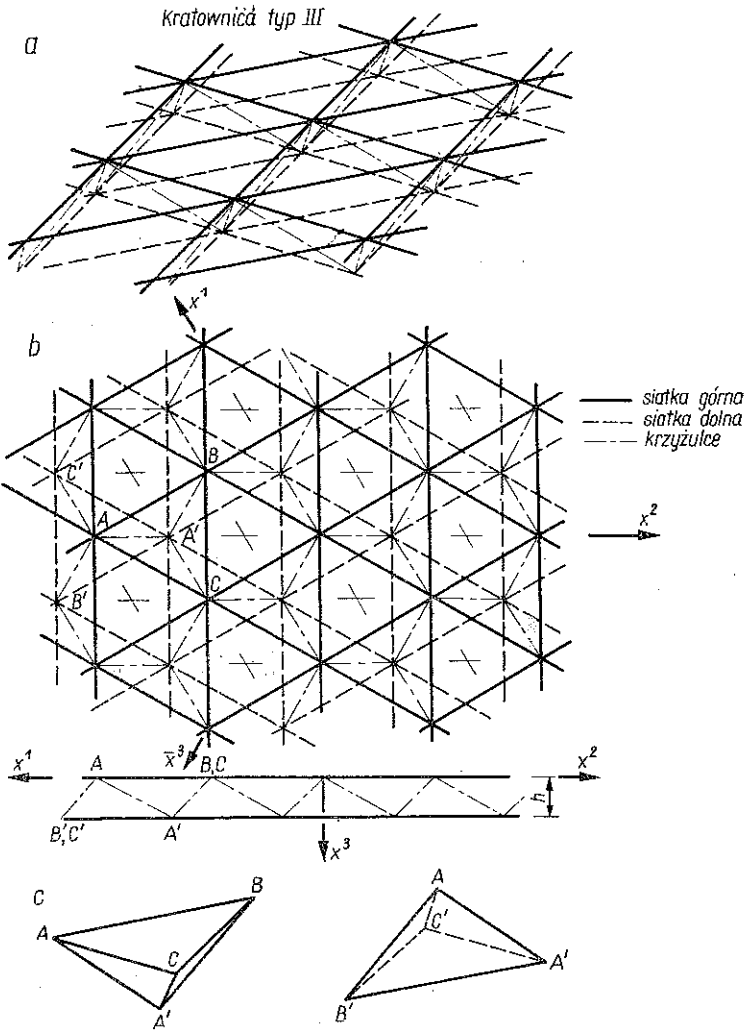


Rys. 2



Rys. 1

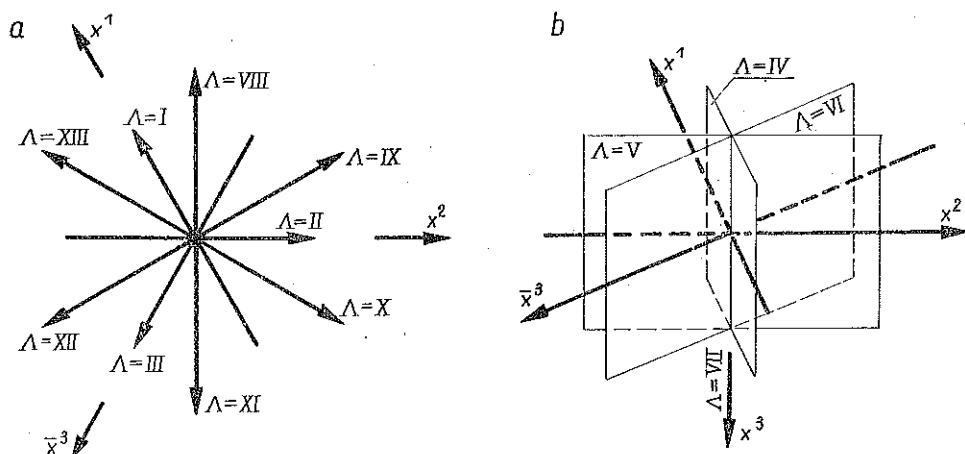
środki. W zadaniu przyjęto kartezjański, prawoskrętny, ukośnokątny układ współrzędnych o osiach  $x^1$  i  $x^2$ , leżących w górnej płaszczyźnie kratownicy i nachylonych do siebie pod kątem  $120^\circ$ , oraz osią  $x^3$  skierowaną w dół prostopadłe do dwóch pozostałych. Pomocniczo wprowadzono czwartą oś oznaczoną  $\bar{x}^3$ , leżącą w płaszczyźnie osi  $x^1$ ,  $x^2$  i pokrywającą się z dwusieczną kąta pomiędzy tymi osiami



Rys. 3

Pręty kratownic leżące w górnej i dolnej płaszczyźnie nazwano odpowiednio prętami górnego i dolnego pasa oraz pręty łączące te dwie płaszczyzny nazwano krzyżulcami. Wszystkie pręty sklasyfikowano jako leżące na trzynastu wyróżnionych prostych  $A=I, II, \dots, XIII$ . Trzy pierwsze z nich  $A=I, II, III$  pokrywają się z osiami  $x^1, x^2, \bar{x}^3$ . Następne trzy dla  $A=IV, V, VI$  są właściwie płaszczyznami

przebiegającymi prostopadle do płaszczyzny  $x^1, x^2$  i przechodzącymi odpowiednio przez osie  $x^1, x^2, \bar{x}^3$  (rys. 4b). Służą one do określania położenia krzyżulców. Kierunek  $\Lambda = VII$  pokrywa się z osią  $x^3$  natomiast wszystkie pozostałe  $\Lambda = VIII, IX, \dots, XIII$  odpowiadają półprostym leżącym w płaszczyźnie  $x^1, x^2$  i przyjętym zgodnie z rys. 4a.



Rys. 4

Przemieszczenia węzłów kratownic zostały określone za pomocą niewiadomego wektora  $u$  o trzech składowych  $u^1, u^2, u^3$  i skierowanych odpowiednio wzdłuż osi  $x^1, x^2, x^3$ .

Jako funkcję opisującą obrót węzła przy przejściu od jednego punktu węzłowego do punktu sąsiedniego wprowadzono następującą:

$$(2.1) \quad \mu(x^1, x^2, x_g^3) = \mu(x^1, x^2, x_d^3) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x^1 + x^2 = 3n + 1, \\ 0, & \text{jeśli } x^1 + x^2 = 3n + 0, \\ -1, & \text{jeśli } x^1 + x^2 = 3n - 1 \end{cases}$$

oraz funkcję opisującą lustrzane odbicie węzłów

$$(2.2) \quad \eta(x^1, x^2, x^3) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } x^3 = x_d^3, \\ -1, & \text{jeśli } x^3 = x_g^3, \end{cases}$$

gdzie wskaźniki  $d$  i  $g$  przypisują odpowiednio współrzędne dolnemu i górnemu pasowi.

Jak widać ze wzorów (2.1) i (2.2), funkcje  $\mu$  i  $\eta$  są zdefiniowane właściwie jedynie w węzłach konstrukcji występujących w pasach. Wynikła stąd konieczność wprowadzenia dla węzłów w krzyżulcach (kratownice typu I) i tych, w których funkcje te nie są zdefiniowane (kratownice typu II i III), oznaczeń typu  $\bar{\mu}$  i  $\bar{\eta}$  przybierających wartości funkcji  $\mu, \eta$  w przeciwległym końcu pręta  $\Lambda$ .

W kratownicy typu III (ze względu na wzajemne poziome przesunięcie siatek obydwu pasów) wartości  $\mu$  i  $\eta$  zostały określone wzorami (2.1) i (2.2) dla układów

współrzędnych odpowiednio w pasie dolnym  $x_d^1, x_d^2, x^3$  oraz w pasie górnym  $x_g^1, x_g^2, x^3$ , które otrzymujemy z ogólnie przyjętego układu współrzędnych  $x^1, x^2, x^3$  za pomocą wzorów:

$$\begin{aligned} x_g^1 &= x^1 - 1, & x_g^2 &= x^2, & x^3 &= x^3, \\ x_d^1 &= x^1, & x_d^2 &= x^2. \end{aligned}$$

Powyższa definicja jest następstwem faktu, że podstawę każdego czworobocianu o krawędziach zbudowanych z trzech prętów pasa oraz trzech krzyżulców można wpisać w nieistniejącą sieć sześciokątów regularnych o bokach długości  $l$ . Wartość  $\mu$  jest więc po prostu znakiem ukierunkowania odpowiedniego nieistniejącego węzła.

Pozostałe oznaczenia

- P** siły zewnętrzne przyłożone w węzłach o składowych  $P^1, P^2, P^3$  skierowanych odpowiednio wzdłuż osi  $x^1, x^2, x^3$ ,
- G<sub>A</sub>** siła w pręcie  $A$  o długości  $l\sqrt{3}$  — ( $A=VIII, IX, \dots, XIII$ ) (pas z motywem trójkątnym),
- K<sub>A</sub>** siła w krzyżulcach  $A = IV, V, VI$ ,
- R<sub>A</sub>** siła w pręcie  $A = I, II, III$  o długości  $l$  dla pasów z motywem sześciokątnym,
- S<sub>A</sub>** siła w słupku  $A = VII$ ,
- A** pole przekroju poprzecznego pręta,
- E** moduł Younga,
- h** moduł wysokości kratownicy,
- l** długość pręta w pasach z motywem sześciokątnym,

$$\begin{aligned} l_s &= 2h && \text{długość słupka kratownicy typu I,} \\ l_k &= \sqrt{h^2 + l^2} && \text{długość krzyżulców we wszystkich trzech typach kratownic,} \\ l_g &= l\sqrt{3} && \text{długość pręta w pasach z motywem trójkątnym,} \\ \cos \alpha &= \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}} \\ \sin \alpha &= \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} l_s \\ l_k \\ l_g \\ \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{aligned}} \right\} \text{dla wszystkich trzech typów kratownic,}$$

$\alpha$  kąt nachylenia krzyżulców do poziomu,

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}_1^k &= \frac{EA}{l}, & \tilde{C}_1^k &= \frac{EA_k}{l_k}, \\ \tilde{C}_1^s &= \frac{EA_s}{l_s}, & \tilde{C}_1^g &= \frac{EA_g}{l_g} \end{aligned} \right\} \text{sztywności prętów na rozciąganie kolejno dla pasa z motywem sześciokątnym, krzyżulców, słupków i pasa z motywem trójkątnym,}$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1^k &= \frac{\tilde{C}_1^k}{\tilde{C}_1}, & \kappa_1^s &= \frac{\tilde{C}_1^s}{\tilde{C}_1}, \\ & & \kappa_1^g &= \frac{\tilde{C}_1^g}{\tilde{C}_1} \end{aligned} \right\} \text{stosunki odpowiednich sztywności prętów.}$$

Operatory przesunięcia wzdłuż każdego z kierunków  $A$  oznaczono:

$$\left. \begin{aligned} E_I \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^n \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 + \mu, x^2, x^3), \\ E_{II} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_2^\mu \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1, x^2 + \mu, x^3), \\ E_{III} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_3^\mu \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 - \mu, x^2 - \mu, x^3), \\ E_{IV} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^{-\mu} E_4^{-\eta} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 - \mu, x^2, x^3 - \eta), \\ E_V \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_2^{-\mu} E_4^{-\eta} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1, x^2 - \mu, x^3 - \eta), \\ E_{VI} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_3^{-\mu} E_4^{-\eta} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \\ &= \Phi(x^1 + \mu, x^2 + \mu, x^3 - \eta), \end{aligned} \right\} \text{dla węzłów w pa-} \\ \text{sach z motywem} \\ \text{sześciookątnego} \\ \text{układu prętów.}$$

$$\left. \begin{aligned} E_{IV} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 + \bar{\mu}, x^2, x^3 + \bar{\eta}), \\ E_V \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1, x^2 + \bar{\mu}, x^3 + \bar{\eta}), \\ E_{VI} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 - \bar{\mu}, x^2 - \bar{\mu}, x^3 + \bar{\eta}), \\ E_{VII} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_4^{-2\eta} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1, x^2, x^3 - 2\eta), \\ E_{VIII} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^2 E_2^1 \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 + 2, x^2 + 1, x^3), \\ E_{IX} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^1 E_2^2 \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 + 1, x^2 + 2, x^3), \\ E_X \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^{-1} E_2^1 \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 - 1, x^2 + 1, x^3), \\ E_{XI} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^{-2} E_2^{-1} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 - 2, x^2 - 1, x^3), \\ E_{XII} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^{-1} E_2^{-2} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 - 1, x^2 - 2, x^3), \\ E_{XIII} \Phi(x^1, x^2, x^3) &= E_1^1 E_2^{-1} \Phi(x^1, x^2, x^3) = \Phi(x^1 + 1, x^2 - 1, x^3). \end{aligned} \right\} \text{dla pozostałych} \\ \text{węzłów}$$

Jako dodatnie przyjęto siły oraz przemieszczenia występujące w prętach o wektorach skierowanych od węzłów. Rozważania prowadzone są przy założeniu, że sztywności poszczególnych rodzajów prętów w całym obszarze kratownicy są stałe.

### 3. OPIS GEOMETRYCZNY KRATOWNIC

Ze względu na regularną budowę konstrukcji tak sparametryzowano ich punkty węzłowe, że odpowiadają im współrzędne o liczbach całkowitych [1]. W tym celu wprowadzona została siatka punktów określona zależnością

$$\mathbf{r} = x^j \mathbf{g}_j,$$

gdzie  $\mathbf{r}$  jest wektorem położenia punktu,  $\mathbf{g}_j$  wektorami bazy oraz  $x^j$  są liczbami całkowitymi. W danym przypadku wektory  $\mathbf{g}_j$  wyrażają się przez jednostkowe wektory prostokątnego układu współrzędnych  $\mathbf{i}_k$

$$\mathbf{g}_j = \beta_j^k \mathbf{i}_k, \quad j, k = 1, 2, 3,$$

gdzie

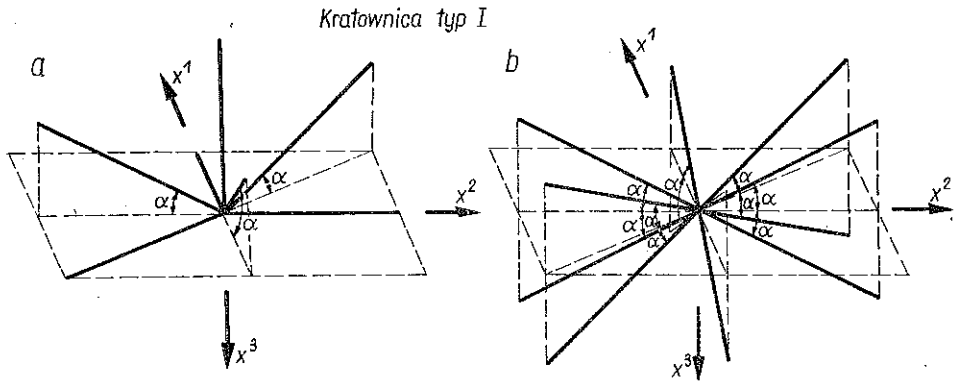
$$[\beta_j^k] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

W ten sposób wektory  $\mathbf{g}_1$  i  $\mathbf{g}_2$  tworzą między sobą kąt  $120^\circ$  i każdy z nich jest prostopadły do  $\mathbf{g}_3$ .

Ponadto wprowadzone zostały wektory kierunkowe wzdłuż prętów łączących dwa sąsiednie węzły, co prowadzi do wzoru

$$(3.1) \quad \mathbf{T}_A = T_A^i \mathbf{g}_i,$$

gdzie  $A$  oznacza zgodnie z przyjętymi oznaczeniami kierunek pręta w przestrzeni.



Rys. 5

Dzięki takiemu opisowi możemy określić geometrię wszystkich prętów zbiegających się w każdym z trzech rodzajów węzłów, przyjętych jako typowe dla naszych kratownic. Węzły te pokazane są na rys. 5a, 5b, 6b. Wszystkie pozostałe rodzaje węzłów dla wszystkich typów kratownic można uzyskać przez transformację opisaną na wstępie pracy jak też przez przyjęcie, że niektóre pręty są prętami zerowymi. Opierając się na takich założeniach określono macierze współczynników  $T_A$  dla poszczególnych rodzajów węzłów i dla poszczególnych kratownic.

### 3.1

Macierz dla węzłów w pasach z motywem sześciokątnym dla kratownic typu I i II

$$(3.2) \quad [T_A^i(x^1, x^2, x^3)] = I_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -c & 0 & -s \\ 0 & -c & -s \\ c & c & -s \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \\ \eta \end{bmatrix},$$

gdzie dla kratownicy typu I-ego  $A = \text{I, II, ..., VII}$ , dla kratownicy typu II-go  $A = \text{=I, II, ..., VI}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$  oraz gdzie  $I_A$  oznacza długość pręta  $A$ .

## 3.2

Dla węzłów o współrzędnych dla a) kratownicy typu I-go ( $x^1+x^2=3n$  oraz  $x^3=1$ ); b) dla kratownicy typu II-go ( $x^1+x^2=3n$  oraz  $x^3=x_g^3$ ); dla c) kratownicy typu III-go ( $x^1+x^2=3n$  oraz  $x^3=x_g^3$  lub  $x^1+x^2=3n+1$  oraz  $x^3=x_g^3$ ) mamy macierz

$$(3.3) \quad [T_A^i(x^1, x^2, x^3)] = I_A \begin{bmatrix} c & 0 & s \\ 0 & c & s \\ -c & -c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{\mu} \\ \bar{\eta} \end{bmatrix},$$

gdzie  $A=IV, V, VI$ ,  $i=1, 2, 3$ ,  $c=\cos \alpha$  oraz  $s=\sin \alpha$ .

## 3.3

Dla węzłów w pasach z motywem trójkątnym dla kratownic typu II-go i III-go

$$(3.4) \quad [T_A^i(x^1, x^2, x^3)] = I_A \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie  $A=VIII, IX, \dots, XIII$ ,  $i=1, 2, 3$ .

Należy zwrócić uwagę na fakt, że wzory (3.1) oraz macierze współczynników (3.2) i (3.3) pozwalają przez przyjęcie odpowiednich wartości  $\mu, \eta$  lub  $\bar{\mu}, \bar{\eta}$  na określenie przesunięcia, obrotu węzła oraz jego lustrzanego odbicia zgodnie z przyjętymi założeniami. Natomiast macierz (3.4) umożliwia określenie wyłącznie przesunięcia. Wzory te dodatkowo umożliwiają dokonanie bezpośredniego określenia zmiany położenia siatek dolnego i górnego pasa kratownic typu II i III wyłącznie przez dobór właściwych dla danego przypadku wartości funkcji  $\mu, \eta$  lub  $\bar{\mu}, \bar{\eta}$ . Podobnie będzie również przy wprowadzaniu dalej równań równowagi.



#### 4. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI KRATOWNIC

Zgodnie z twierdzeniem EULERA [3] każda konstrukcja prętowa, która ma kształt wielościanu zamkniętego o ścianach trójkątnych, jest geometrycznie niezmienna. Odpowiednie prawo ma postać

$$(4.1) \quad r = k + p - 2,$$

gdzie  $r$  oznacza liczbę prętów,  $k$  liczbę węzłów oraz  $p$  liczbę ścian.

##### 4.1. Kratownica typu I

Cała kratownica składa się właściwie z jednego rodzaju elementów powtarzających się (rys. 1c) i jak łatwo sprawdzić według wzoru (4.1) każdy taki element jest geometrycznie niezmienny. W związku z tym cała kratownica także zachowuje tę własność. Osobnego rozpatrzenia wymaga brzeg kratownicy. W tym przypadku należy zwrócić uwagę na konieczność zachowania geometrycznej niezmienności elementów skrajnych; spełnianie tego warunku nie przedstawia większych trudności. Można to osiągnąć lokując na brzegu elementy geometrycznie niezmiennie bądź dołączając do nich pręty w ten sposób, aby cały brzeg był geometrycznie niezmienny.

##### 4.2. Kratownica typu II

Jak wynika z rys. 2 cała konstrukcja zbudowana jest z dwóch rodzajów geometrycznie niezmiennych czworoscianów  $ABCD$  oraz  $ABDE$ . Jednocześnie występujące tam prawidłowe ostrosłupy sześciokątne jako samodzielne bryły są geometrycznie zmienne. Stąd wniosek, że przy brzegu konstrukcja może kończyć się wyłącznie w taki sposób, aby znajdowały się tam wyłącznie pokazane na rys. 2c czworosciany obramowujące wyżej wspomniane ostrosłupy. Sprowadza się do tego, że obrys pasa zawierającego trójkąty musi być większy od obrysu pasa z sześciokątnym układem prętów.

##### 4.3. Kratownica typu III

Kratownica ta jest zbudowana z czworoscianów mających podstawę leżącą w dolnym lub górnym pasie i uwidocznionych na rys. 3c. Każde trzy czworosciany mające podstawy w tym samym pasie i połączone wierzchołkami podstaw mogą mieć dodatkowo wierzchołki leżące w drugim pasie, połączone prętami prostymi. Otrzymujemy dzięki temu układ niezmienny. Dołączając za każdym razem do części geometrycznie niezmiennej następnne elementy geometrycznie niezmiennie uzyskujemy żądany kształt kratownicy i zachowujemy jej ogólną sztywność.

#### 5. RÓWNANIA RÓWNOWAGI WĘZŁÓW

W celu zbadania równowagi poszczególnych węzłów rozcinamy myślowo konstrukcję odcinając pręty w węzłach. Następnie przykładamy do węzłów siły zewnętrzne oraz wewnętrzne, z jakimi oddziałują na nie odcięte pręty. Dla określenia wartości sił działających w każdym z prętów rozpatrywanego węzła przedsta-

wiamy przemieszczenia wzdłużne początków i końców tych prętów za pomocą następujących wzorów:

$$u_A = t_A u = t_A^k g_{ki} u^i,$$

$$E_A u_A = t_A E_A u = t_A^k g_{ki} E_A u^i,$$

gdzie  $t_A$  jest wektorem skierowanym wzdłuż kierunku  $A$  o składowych

$$(5.1) \quad [t_A^k] = \frac{[T_A^k]}{l_A}.$$

Stąd przyrost długości pręta ma postać

$$\Delta l = E_A u_A - u_A = t_A^k g_{ki} (E_A - 1) u^i.$$

Korzystając następnie ze wzoru na siłę dla pręta poddanego rozciąganiu

$$(5.2) \quad F = \frac{EA}{l} \Delta l$$

określimy siły we wszystkich prętach układu:

$$R_A = \frac{EA}{l} t_A^k g_{ki} (E_A - 1) u^i,$$

$$K_A = \frac{EA_k}{l_k} t_A^k g_{ki} (E_A - 1) u^i,$$

$$(5.3) \quad S_A = \frac{EA_s}{l_s} t_A^k g_{ki} (E_A - 1) u^i,$$

$$G_A = \frac{EA_g}{l_g} t_A^k g_{ki} (E_A - 1) u^i.$$

Wszystkie powyżej określone siły zależą od współrzędnych położenia węzła, a operacje przesunięcia przyjmują zgodnie z przyjętymi oznaczeniami wykładniki  $\mu, \eta$  lub  $\bar{\mu}, \bar{\eta}$  co odpowiada występowaniu identycznych mnożników w macierzy (5.1).

### 5.1. Równania równowagi węzła typu 1

Jako węzeł typu 1 przyjmujemy węzeł kratownicy typu I przedstawiony na rys. 5a. Jego równanie równowagi w zapisie wektorowym ma postać

$$\sum_{A=I}^{III} R_A + \sum_{A=IV}^{VI} K_A + S_{VII} + P = 0.$$

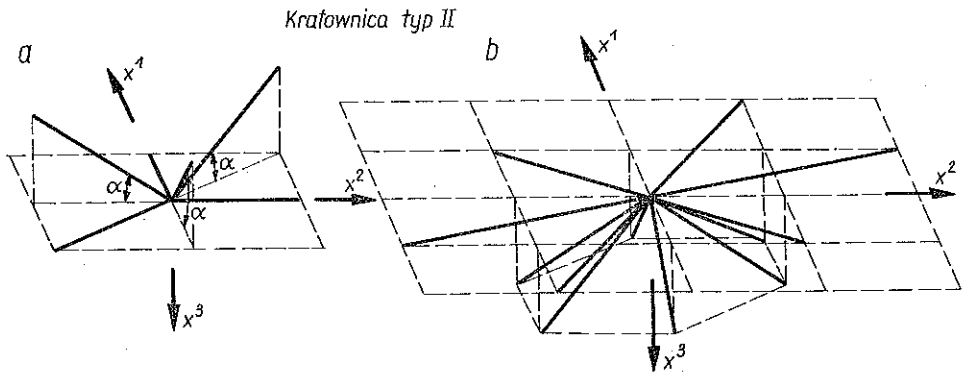
Rozkładając wektory sił na składowe wzdłuż wektorów bazy  $g_j$  otrzymamy

$$(5.4) \quad \sum_{A=I}^{III} t_A^j g_j R_A + \sum_{A=IV}^{VI} t_A^j g_j K_A + t_{VII}^j g_j S_{VII} + P^j g_j = 0.$$

Dokonując następnie rzutu sumy wektorowej na kierunek  $r$  otrzymujemy dla  $r = 1, 2, 3$  trzy równania równowagi węzła wyrażone w przemieszczeniach:

$$(5.5) \quad \sum_{A=1}^{\text{III}} \frac{EA}{l} t_A^j g_{jr} [t_A^n g_{ni} (E_A - 1) u^i] + \sum_{A=\text{IV}}^{\text{VI}} \frac{EA_k}{l_k} t_A^j g_{jr} [t_A^n g_{ni} (E_A - 1) u^i] + \\ + \frac{EA_s}{l_s} t_{\text{VII}}^j g_{jr} [t_{\text{VII}}^n g_{ni} (E_{\text{VII}} - 1) u^i] + P^j g_{jr} = 0,$$

gdzie  $j, i, n, r = 1, 2, 3$  oraz  $g_{ir}$  jest tensorem metrycznym.



Rys. 6

Przy założeniu, że  $E_{\text{VII}} = 1$  otrzymujemy bezpośrednio wzór dla węzła kratownicy typu II z rys. 6a, to jest nie zawierającego pręta dla  $A = \text{VII}$ . Pisząc równania (5.5) w postaci rozwiniętej uzyskamy następujący układ równań:

$$\begin{aligned} & \tilde{C}_1 \mu \left[ \left( E_1^\mu + \frac{1}{4} E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu - \frac{3}{2} \right) u^1 + \left( -\frac{1}{2} E_1^\mu - \frac{1}{2} E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu + \frac{3}{4} \right) u^2 \right] + \\ & + \tilde{C}_1^k \cos \alpha \left\{ -\mu \cos \alpha \left[ \left( -E_1^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{1}{4} E_2^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{1}{4} E_3^{-\mu} E_4^{-n} + \frac{3}{2} \right) u^1 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( \frac{1}{2} E_1^{-\mu} E_4^{-n} + \frac{1}{2} E_2^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{1}{4} E_3^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{3}{4} \right) u^2 \right] + \right. \\ & \quad \left. + \eta \sin \alpha \left[ \left( E_1^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{1}{2} E_2^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{1}{2} E_3^{-\mu} E_4^{-n} \right) u^3 \right] \right\} + \mu \left( P^1 - \frac{1}{2} P^2 \right) = 0, \\ & \tilde{C}_1 \mu \left[ \left( -\frac{1}{2} E_1^\mu - \frac{1}{2} E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu + \frac{3}{4} \right) u^1 + \left( \frac{1}{4} E_1^\mu + E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu - \frac{3}{2} \right) u^2 \right] + \\ & + \tilde{C}_1^k \cos \alpha \left\{ -\mu \cos \alpha \left[ \left( +\frac{1}{2} E_1^{-\mu} E_4^{-n} + \frac{1}{2} E_2^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{1}{4} E_3^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{3}{4} \right) u^1 + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( -\frac{1}{4} E_1^{-\mu} E_4^{-n} - E_2^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{1}{4} E_3^{-\mu} E_4^{-n} + \frac{3}{2} \right) u^2 \right] + \eta \sin \alpha \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[ \left( -\frac{1}{2} E_1^{-\mu} E_4^{-n} + E_2^{-\mu} E_4^{-n} - \frac{1}{2} E_3^{-\mu} E_4^{-n} \right) u^3 \right] \right\} + \mu \left( -\frac{1}{2} P^1 + P^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_1^k \sin \alpha \left\{ \mu \cos \alpha \left[ \left( -E_1^{-\mu} E_4^{-n} + \frac{1}{2} E_2^{-\mu} E_4^{-n} + \frac{1}{2} E_3^{-\mu} E_4^{-n} \right) u^1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{2} E_1^{-\mu} E_4^{-n} - E_2^{-\mu} E_4^{-n} + \frac{1}{2} E_3^{-\mu} E_4^{-n} \right) u^2 \right] - \eta \sin \alpha [(E_1^{-\mu} E_4^{-n} + \right. \\ \left. + E_2^{-\mu} E_4^{-n} + E_3^{-\mu} E_4^{-n} - 3) u^3] \right\} - \bar{C}_1^s \eta (E_4^{-2n} - 1) u^3 - \eta P^3 = 0. \end{aligned}$$

Grupując wyrazy przy operatorach poszczególnych przesunięć, otrzymamy następujące równanie różnicowe typu macierzowego opisujące stan równowagi w węźle typu 1:

$$(5.6) \quad \sum_{A=1}^{VII} W_A E_A x + W_{w1} x = \bar{Q},$$

gdzie

$$W_I = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{II} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{III} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_{IV} = \begin{bmatrix} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{1}{2} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & \frac{1}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha \\ \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{1}{2} \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha & \kappa_1^k \sin^2 \alpha \end{bmatrix},$$

$$W_V = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{1}{2} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & \kappa_1^k \cos^2 \alpha & \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{1}{2} \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha & \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha & \kappa_1^k \sin^2 \alpha \end{bmatrix},$$

$$W_{VI} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & \frac{1}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha \\ \frac{1}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & \frac{1}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & -\frac{1}{2} \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha \\ -\frac{1}{2} \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha & -\frac{1}{2} \eta \mu \kappa_1^k \sin \alpha \cos \alpha & \kappa_1^k \sin^2 \alpha \end{bmatrix},$$

$$W_{\text{VII}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1^s \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\bar{C}_1} \left( P^1 - \frac{1}{2} P^2 \right) \\ -\frac{1}{\bar{C}_1} \left( -\frac{1}{2} P^1 + P^2 \right) \\ -\frac{1}{\bar{C}_1} P^3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix},$$

$$W_{w1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & 0 \\ \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_1^s - 3\kappa_1^k \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

Działanie operatora  $E_A$  na macierz kolumnową  $x$  w równaniu (5.5) jest identyczne z działaniem wielkości skalarnej na taką macierz. Ponieważ, jak można sprawdzić,

$$W_{w1} = - \sum_{A=I}^{\text{VII}} W_A,$$

przekształcając równanie (5.6) ma postać

$$\sum_{A=I}^{\text{VII}} W_A (E_A - 1) x = \bar{Q}.$$

Analogiczne równanie równowagi dla węzła kratownicy typu II w pasie z motywem sześciokątnego układu prętów (rys. 6a) ma postać

$$\sum_{A=I}^{\text{VI}} W_A (E_A - 1) x = \bar{Q}.$$

## 5.2. Równanie równowagi węzła typu 2

Jako węzeł typu 2 przyjmujemy węzeł kratownicy typu I przedstawiony na rys. 5b. Jego wektorowe równanie równowagi ma postać

$$\sum_{\bar{\mu}, \bar{\eta}=-1, +1} \sum \left[ \sum_{A=IV}^{\text{VI}} K_A \right] + P = 0.$$

Dokonując analogicznych operacji do operacji dokonanej we wzorach (5.4) i (5.5) otrzymujemy dla  $r=1, 2, 3$  następujący układ trzech równań równowagi:

$$\sum_{\bar{\mu}, \bar{\eta}=-1, +1} \sum \left\{ \sum_{A=IV}^{\text{VI}} \frac{EA_k}{l_k} t_A^j g_{jr} [t_A^n g_{ni} (E_A - 1) u^i] \right\} + P^j g_{jr} = 0,$$

gdzie  $j, i, n, r = 1, 2, 3$ . Równania te w postaci rozwiniętej tworzą następujący układ równań:

$$\sum_{\bar{\mu}, \bar{\eta} = -1, +1} \sum \left\{ \bar{C}_1^k \cos \alpha \left\{ -\bar{\mu} \cos \alpha \left[ \left( -E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{3}{2} \right) u^1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left( \frac{1}{2} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{1}{2} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{3}{4} \right) u^2 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\eta} \sin \alpha \left[ \left( E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \right) u^3 \right] \right\} \right\} + \bar{\mu} \left( P^1 - \frac{1}{2} P^2 \right) = 0,$$

$$\sum_{\bar{\mu}, \bar{\eta} = -1, +1} \sum \left\{ \bar{C}_1^k \cos \alpha \left\{ -\bar{\mu} \cos \alpha \left[ \left( \frac{1}{2} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{1}{2} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{3}{4} \right) u^1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left( -\frac{1}{4} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{3}{2} \right) u^2 \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\eta} \sin \alpha \left[ \left( -\frac{1}{2} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \right) u^3 \right] \right\} \right\} + \bar{\mu} \left( -\frac{1}{2} P^1 + P^2 \right) = 0,$$

$$\sum_{\bar{\mu}, \bar{\eta} = -1, +1} \sum \left\{ \bar{C}_1^k \sin \alpha \left\{ \bar{\mu} \cos \alpha \left[ \left( -E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{1}{2} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{1}{2} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \right) u^1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left( \frac{1}{2} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{1}{2} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \right) u^2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \bar{\eta} \sin \alpha \left[ \left( E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - 3 \right) u^3 \right] \right\} \right\} - \bar{\eta} P^3 = 0.$$

Grupując wyrazy przy operatorach poszczególnych przesunięć, otrzymamy równanie różnicowe typu macierzowego:

$$(5.7) \quad \sum_{\bar{\mu}, \bar{\eta} = -1, +1} \sum \left\{ \sum_{A=IV}^{VI} \bar{W}_A E_A x + W_{W_2} \right\} = \bar{Q}.$$

W tym przypadku macierze  $\bar{W}_A$  są prawie identyczne z macierzami  $W_A$ , które występują we wzorze (5.6), jedynie należy zastąpić w nich funkcje  $\mu, \eta$  funkcjami  $\bar{\mu}, \bar{\eta}$ . Natomiast  $W_{W_2}$  ma postać

$$W_{W_2} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & \frac{3}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & 0 \\ \frac{3}{4} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & -\frac{3}{2} \kappa_1^k \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -3\kappa_1^k \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$W_{W2} = - \sum_{A=IV}^{VI} \bar{W}_A,$$

więc równanie (5.7) można przepisać w postaci

$$\sum_{\bar{\mu}, \bar{\eta}=-1, +1} \left\{ \sum_{A=IV}^{VI} \bar{W}_A (E_A - 1) x \right\} = \bar{Q}.$$

Jest to równanie różnicowe typu macierzowego opisujące stan równowagi węzła typu 2.

### 5.3. Równania równowagi węzła typu 3

Jako węzeł typu 3 przyjmujemy węzeł kratownicy typu II przedstawiony na rys. 6b. Jego wektorowe równanie równowagi ma postać

$$\sum_{\bar{\mu}=-1, +1} \left\{ \sum_{A=IV}^{VI} \mathbf{K}_A \right\} + \sum_{A=VIII}^{XIII} \mathbf{G}_A + \mathbf{P} = \mathbf{0}.$$

Po dokonaniu analogicznych operacji do zastosowanych w równaniach (5.4) i (5.5) otrzymujemy dla  $r=1, 2, 3$  następujący układ trzech równań równowagi:

$$\sum_{\bar{\mu}=-1, +1} \left\{ \sum_{A=IV}^{VI} \frac{EA_k}{l_k} t_A^j g_{jr} [t_A^n g_{ni} (E_A - 1) u^i] \right\} + \sum_{A=VIII}^{XIII} \frac{EA_g}{l_g} t_A^j g_{jr} [t_A^n g_{ni} (E_A - 1) u^i] + P^j g_{jr} = 0,$$

gdzie  $j, i, n, r=1, 2, 3$ . Rozwinięta ich postać tworzy układ

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\mu}=-1, +1} \left\{ \bar{C}_1^k \bar{\mu} \cos \alpha \left\{ -\bar{\mu} \cos \alpha \left[ \left( -E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{3}{2} \right) u^1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left( \frac{1}{2} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{1}{2} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{3}{4} \right) u^2 \right] + \bar{\eta} \sin \alpha \left[ \left( E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{2} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \right) u^3 \right] \right\} \right\} + \bar{C}_1^g \left[ \left( +\frac{3}{4} E_1^2 E_2^1 + \frac{3}{4} E_1^{-1} E_2^1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{4} E_1^{-2} E_2^{-1} + \frac{3}{4} E_1^1 E_2^{-1} - 3 \right) u^1 + \left( -\frac{3}{4} E_1^{-1} E_2^1 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{4} E_1^1 E_2^{-1} + \frac{3}{2} \right) u^2 \right] + P^1 - \frac{1}{2} P^2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\mu}=-1, +1} \left\{ \bar{C}_1^k \bar{\mu} \cos \alpha \left\{ -\bar{\mu} \cos \alpha \left[ \left( \frac{1}{2} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{1}{2} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{3}{4} \right) u^1 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left( -\frac{1}{4} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{4} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \frac{3}{2} \right) u^2 \right] + \bar{\eta} \sin \alpha \left[ \left( -\frac{1}{2} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} u^3 \Big] \Big\} + \bar{C}_1^g \left[ \left( -\frac{3}{4} E_1^{-1} E_2^1 - \frac{3}{4} E_1^1 E_2^{-1} + \frac{3}{2} \right) u^1 + \right. \\
& + \left. \left( \frac{3}{4} E_1^1 E_2^2 + \frac{3}{4} E_1^{-1} E_2^2 + \frac{3}{4} E_1^{-1} E_2^{-2} + \frac{3}{4} E_1^1 E_2^{-1} - 3 \right) u^2 \right] - \frac{1}{2} P^1 + P^2 = 0, \\
& \sum_{\bar{\mu}=-1, +1} \left\{ \bar{C}_1^k \bar{\eta} \sin \alpha \left\{ \bar{\mu} \cos \alpha \left[ \left( E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \right) u^1 + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \left( -\frac{1}{2} E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - \frac{1}{2} E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} \right) u^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \bar{\eta} \sin \alpha \left[ \left( E_1^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + E_2^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} + E_3^{\bar{\mu}} E_4^{\bar{\eta}} - 3 \right) u^3 \right] \right\} \right\} + P^3 = 0.
\end{aligned}$$

Grupując wyrazy przy operatorach poszczególnych przesunięć otrzymamy następujące równanie typu macierzowego:

$$(5.8) \quad \sum_{\bar{\mu}=-1, +1} \left\{ \sum_{A=IV}^{VI} \bar{W}_A E_A x \right\} + \sum_{A=VIII}^{XIII} \left\{ W_A E_A x \right\} + W_{w3} = \bar{Q},$$

gdzie  $\bar{W}_A$  dla  $A=IV, V, VI$  są macierzami identycznymi z występującymi we wzorze (5.7); natomiast pozostałe macierze mają postać

$$\begin{aligned}
(5.9) \quad W_{VIII} = W_{XI} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \kappa_1^g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & W_{IX} = W_{XII} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \kappa_1^g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
W_X = W_{XIII} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \kappa_1^g & -\frac{3}{4} \kappa_1^g & 0 \\ -\frac{3}{4} \kappa_1^g & \frac{3}{4} \kappa_1^g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
W_{w3} &= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \nu \kappa_1^k \cos^2 \alpha - 3 \kappa_1^g & \frac{3}{4} \nu \kappa_1^k \cos^2 \alpha + \frac{3}{2} \kappa_1^g & 0 \\ \frac{3}{4} \nu \kappa_1^k \cos^2 \alpha + \frac{3}{2} \kappa_1^g & -\frac{3}{2} \nu \kappa_1^k \cos^2 \alpha - 3 \kappa_1^g & 0 \\ 0 & 0 & -3 \nu \kappa_1^k \sin^2 \alpha \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

gdzie dla kratownicy typu II (rys. 6b)  $\nu=2$ .

Podobnie jak poprzednio możemy napisać

$$W_{w3} = - \sum_{\bar{\mu}=-1, +1} \left\{ \sum_{A=IV}^{VI} \bar{W}_A \right\} - \sum_{A=VIII}^{XIII} W_A.$$



Stąd równanie (5.7) przyjmie postać

$$(5.10) \quad \sum_{\bar{\mu}=-1, +1} \left\{ \sum_{A=IV}^{VI} \bar{W}_A(E_A-1)x \right\} + \sum_{A=VIII}^{XIII} W_A(E_A-1)x = \bar{Q}.$$

Jest to układ równań opisujący stan równowagi w węźle typu 3 (rys. 6b). Ze wzoru tego, przyrównując siły w odpowiednich prętach do zera oraz stosując właściwe mnożniki  $\bar{\eta}$  we wzorze (5.8) i  $\nu=1$ , w macierzy (5.9) uzyskamy bezpośrednio wzór dla kratownicy typu III (rys. 7). W tym przypadku zamiast sumowania po  $\bar{\mu}$  we wzorach (5.8) i (5.10),  $\bar{\mu}$  przyjmuje jedną z wartości  $\bar{\mu}=-1$  lub  $\bar{\mu}=1$  w zależności od pasa, w którym występuje dany węzeł.

## 6. BRZEGOWE RÓWNANIA RÓWNOWAGI I WARUNKI BRZEGOWE

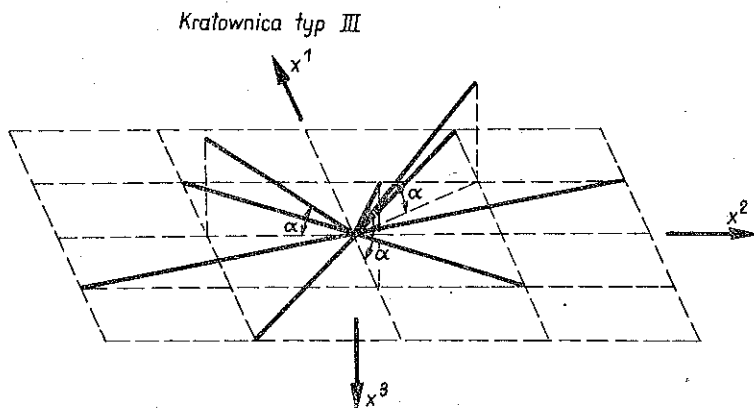
W zależności od sposobu zakończenia kratownicy na brzegu w typowych węzłach mogą nie wystąpić niektóre pręty. Jest to równoznaczne przyjęciu, że w tych prętach siły są równe zero. W związku z tym na podstawie wzoru (5.2) oraz przyjmując

$$AI = t_A^k g_{ki} (E_A - 1) u^i = 0,$$

otrzymamy poszukiwaną zależność dla operatorów przesunięcia:

$$(6.1) \quad E_A = 1$$

Jest ona prawdziwa dla każdego  $A$ . Przyjmując (6.1) dla  $A$  odpowiadającym brakującym prętom w każdym z trzech wyprowadzonych równań równowagi (5.6), (5.7) i (5.8), otrzymamy bezpośrednio gotowe równania węzłów brzegowych. Po-



Rys. 7

nieważ w węzłach podporowych występują dodatkowo dane przemieszczenia  $u_0^1$ ,  $u_0^2$  i  $u_0^3$ , należy fakt ten uwzględnić w ich równaniach równowagi. W szczególnym przypadku przemieszczenia te mogą być równe zero. W związku z tym, gdy warunki

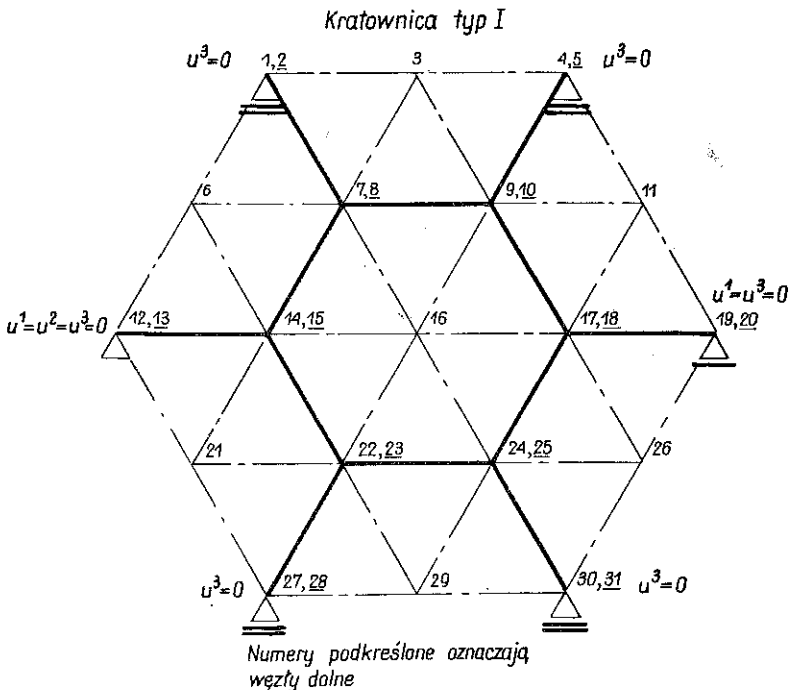
brzegowe są sformułowane w przemieszczeniach, należy przy obliczeniach numerycznych pomnożyć w równaniach równowagi macierz odpowiadająca przemieszczeniom danego węzła przez wektor danych przemieszczeń, tj. przez wektor

$$x_0 = \begin{bmatrix} u_0^1 \\ u_0^2 \\ u_0^3 \end{bmatrix}$$

i wyraz ten przenieść na prawą stronę równości jako znany. Natomiast w przypadku przedstawienia warunków brzegowych za pomocą sił fakt ten uwzględniamy jako zwykłe obciążenie węzłów siłami zewnętrznymi.

### 7. PRZYKŁADY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

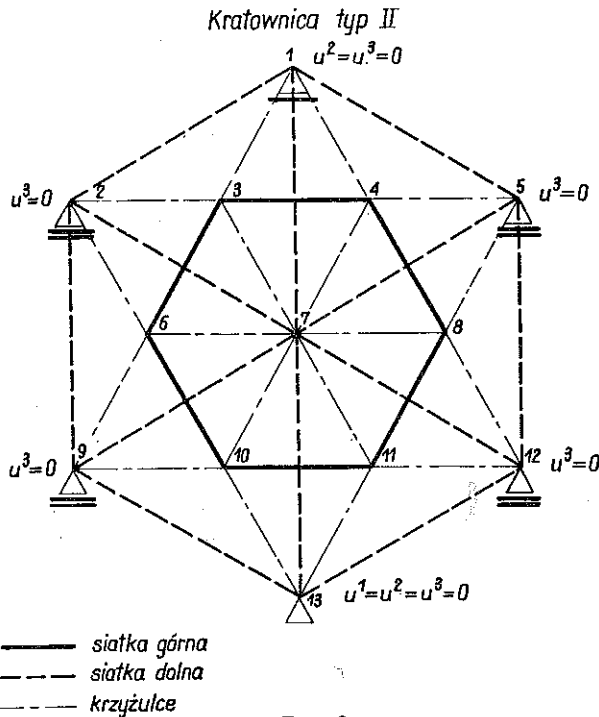
W celu ilustracji wyprowadzonych wzorów przeprowadzono obliczenia numeryczne na maszynie cyfrowej ODRA 1204 dla kratownic przedstawionych na rys. 8 i 9. W obydwu przypadkach kratownice obciążone są we wszystkich węzłach siłami



Rys. 8

skupionymi o składowych  $P^1 = P^2 = 0$ ,  $P^3 = \text{const}$  w całym obszarze oraz wszystkie pręty ich mają równe pola przekrojów poprzecznych. Wyniki obliczeń przedstawione są dla kratownicy z rys. 8 w tabelicy 1 dla i kratownicy z rys. 9 w tabelicy 2. W obydwu przypadkach uzyskano dobre rezultaty.

W tym miejscu ograniczę się jedynie do ogólnego scharakteryzowania toku postępowania przy obliczeniach. Krokiem wstępnym do osiągnięcia rozwiązania numerycznego jest ponumerowanie węzłów kratownicy. Dla rozważanych kratownic numeracja ta uwidoczniła jest na rys. 8 i 9. Następnie podobnie jak w pracy [4] budujemy zgodnie z uwagami zawartymi w p. 6 niniejszej pracy wszystkie brzegowe równania równowagi węzłów. Mając już ten układ równań zestawiamy ogólny układ równań, w którym w poszczególnych jego wierszach znajdują się równania równowagi węzłów w zapisie macierzowym w kolejności zgodnej z przyjętą numeracją. Niewiadomymi są przemieszczenia węzłów występujące także w tej samej



kolejności. Po prawej stronie tego ogólnego układu równań znajdują się wyrazy odpowiadające obciążeniom zewnętrznym. Lewa zaś strona otrzymanego układu jest właściwie macierzą, w której elementami są macierze  $W_A$  o wymiarze  $3 \times 3$ . Ta macierz ma charakter pasmowy i jest macierzą symetryczną. Należy pamiętać, że każdemu elementowi takiej macierzy przypisana jest pewna wartość funkcji  $\mu, \eta$  lub  $\bar{\mu}, \bar{\eta}$  w zależności od występowania ich w tych elementach.

Dążąc do lepszego wykorzystania pamięci maszyny oraz zwiększenia jej możliwości obliczeniowych, została opracowana odmiana procedury przedstawionej w pracy [4], która wykorzystuje przy obliczeniach jedynie tablice współczynników o wymiarach przedstawionych na rys. 10b. Procedura ta nosi nazwę DET GAUSS PASMOWYS.

W celu uwzględnienia sposobu podparcia kratownicy dokonujemy pomnożenia współczynników tych kolumn ogólnej macierzy, które odpowiadają danym przemieszczeniom, przez te przemieszczenia po czym odpowiednie wyrazy jako dane przenosimy na prawą stronę równań. W ten sposób wymiar macierzy zmniejsza się o tyle kolumn, ile mamy danych na podporach przemieszczeń.

Tablica 1

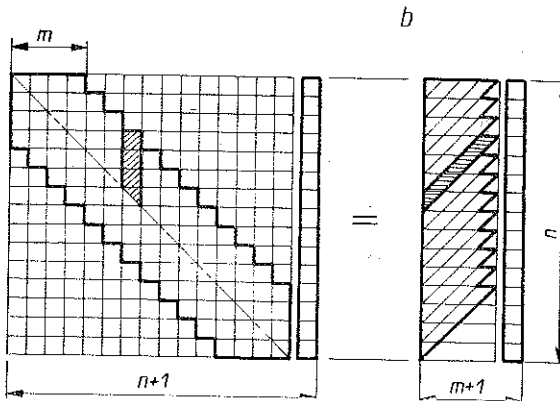
Numery końców pr.		Wartości sił	Numery końców pr.		Wartości sił	Numery końców pr.		Wartości sił
7	1	-2,52032 P	7	9	-4,65845 P	7	14	-4,65839 P
8	2	2,75744 P	8	10	4,78610 P	8	15	4,78601 P
9	17	-4,65844 P	12	14	-2,52037 P	4	9	-2,52032 P
10	18	4,78598 P	13	15	2,75764 P	5	10	2,75753 P
14	22	-4,65846 P	17	19	-2,52031 P	17	24	-4,65843 P
15	23	4,78610 P	18	20	2,75745 P	18	25	4,78602 P
24	30	-2,52036 P	22	24	-4,65835 P	22	27	-2,52050 P
25	31	2,75744 P	23	25	4,78606 P	23	28	2,75746 P
9	3	-1,88508 P	1	3	2,63124 P	7	3	-1,88504 P
10	3	1,88504 P	2	3	-2,87888 P	8	3	1,88507 P
4	11	2,63123 P	4	3	2,63125 P	1	6	2,63131 P
5	11	-2,87886 P	5	3	-2,87884 P	2	6	-2,87885 P
19	11	2,63128 P	7	6	-1,88507 P	12	6	2,63130 P
20	11	-2,87896 P	8	6	1,88503 P	13	6	-2,87886 P
14	6	-1,88502 P	9	11	-1,88510 P	17	11	-1,88504 P
15	6	1,88504 P	10	11	1,88498 P	18	11	1,88507 P
7	16	0,347182 P	14	16	0,347222 P	9	16	0,347210 P
8	16	-0,232887 P	15	16	-0,232737 P	10	16	-0,232840 P
24	16	0,347212 P	17	16	0,347218 P	22	16	0,347193 P
25	16	-0,232838 P	18	16	-0,232826 P	23	16	-0,232880 P
12	21	2,63128 P	22	21	-1,88500 P	14	21	-1,88506 P
13	21	-2,87863 P	23	21	1,88507 P	15	21	1,88495 P
27	21	2,63134 P	24	26	-1,88499 P	19	26	2,63127 P
28	21	-2,87881 P	25	26	1,88509 P	20	26	-2,87874 P
17	26	-1,88509 P	27	29	2,63133 P	30	26	2,63128 P
18	26	1,88498 P	28	29	-2,87883 P	31	26	-2,87885 P
22	29	-1,88504 P	30	29	2,63134 P	24	29	-1,88508 P
23	29	1,88510 P	31	29	-2,87881 P	25	29	1,88505 P
1	2	-2,51218 P	12	13	-2,51220 P	22	23	-0,016500 P
4	5	-2,51217 P	14	15	-0,0163333P	24	25	-0,0163333 P
7	8	-0,016500 P	17	18	-0,016500 P	27	28	-2,51222 P
9	10	-0,016500 P	19	20	-2,51218 P	30	31	-2,51222 P

Następnie usuwamy z tej macierzy wiersze, które odpowiadają numerom wyeliminowanych kolumn. Ostatecznie nasz układ równań będzie miał ponownie po lewej stronie macierz kwadratową, pasmową i symetryczną, lecz o wymiarze mniejszym o liczbę więzów podporowych. Dalsze postępowanie jest podobne do zasto-

Tablica 2

Numery końców pr.		Wartości sił	Numery końców pr.		Wartości sił	Numery końców pr.		Wartości sił
4	8	-1,50001 P	3	4	-1,50000 P	6	3	-1,50001 P
6	10	-1,50001 P	10	11	-1,50001 P	8	11	-1,50002 P
4	1	-1,30437 P	3	2	-1,30437 P	3	1	-1,30437 P
8	12	-1,30436 P	4	5	-1,30438 P	6	9	-1,30437 P
3	7	0,372671 P	6	7	0,372667 P	4	7	0,372663 P
11	7	0,372660 P	8	7	0,372665 P	10	7	0,372647 P
6	2	-1,30437 P	10	9	-1,30437 P	8	5	-1,30438 P
10	13	-1,30436 P	11	12	-1,30438 P	11	13	-1,30437 P
9	2	1,01037 P	2	1	1,01037 P	1	5	1,01037 P
7	1	1,01037 P	7	5	1,01036 P	2	7	1,01037 P
12	5	1,01036 P	9	7	1,01036 P	7	12	1,01037 P
13	7	1,01037 P	13	12	1,01036 P	9	13	1,01037 P

sowanego w pracy [4]. Utworzenie macierzy transformowanej zgodnie z rys. 10b zostało wykonane na maszynie cyfrowej. Podobnie, po rozwiązaniu układu równań przy pomocy procedury DET GAUSS PASMOWY S, obliczenia sił w prętach także wykonano maszynowo.



Rys. 10

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. GUTKOWSKI, *Geometry of continuous media with a given discrete structure*, Arch. Mech. Stos., **21**, 6, 1969.
2. W. GUTKOWSKI, J. OBRĘBSKI, *Ruszt o sześciokątnej siatce prętów*, Rozpr. Inżyn., **19**, 3, 1971.
3. P. JASTRZĘBSKI, R. SOLECKI, J. SZYMKIEWICZ, *Kratownice — obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1970.
4. J. B. OBRĘBSKI, *Zastosowanie maszyn cyfrowych do rozwiązywania rusztów o regularnej sześciokątnej siatce prętów*, Mech. Teoret. Stos., **10**, 1, 1972.
5. Z. S. MAKOWSKI, *Räumliche Tragwerke aus Stahl*, Düsseldorf 1963.

## Резюме

## АНАЛИЗ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПЛОСКИХ ДВУХСЛОЙНЫХ ФЕРМ

В работе дается статический анализ плоских двухслойных ферм, заключающих в горизонтальной проекции форму гексагональной стержневой системы с ей предназначением к числовым расчетом. Эти фермы, в узлах, подвержены действию произвольно направленных сосредоточенных сил. Формулы приведенные в работе могут быть основанием для решения этого типа конструкций, с произвольным распределением опорных точек и произвольной нагрузкой принятой согласно с предположениями. Рассуждения обоснованы примерами числовых расчетов.

## SUMMARY

## ANALYSIS OF A CERTAIN CLASS OF PLANE, DOUBLE LAYER TRUSSES

In the paper presented is the static analysis of plane, double-layer trusses with a horizontal projection revealing a hexagonal pattern; the analysis is aimed at numerical calculations. The nodes of the truss are subject to arbitrarily directed concentrated forces. The formulae derived in the paper may serve as a basis for the solution of arbitrarily loaded and supported structures of the type described.

Given are numerical examples.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 czerwca 1971 r.*

---