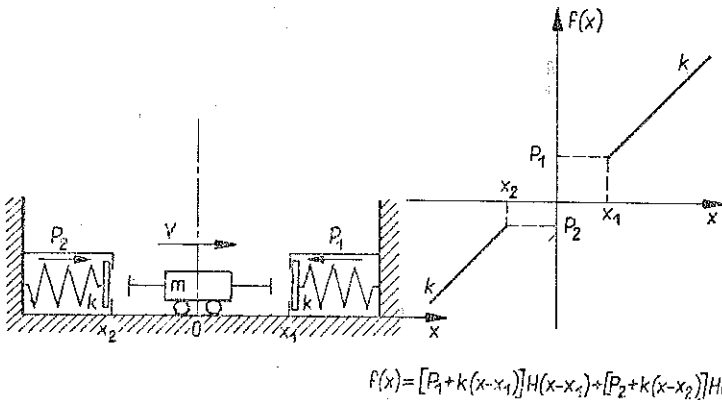


DRGANIA SWOBODNE UKŁADU Z UOGÓLNIONĄ CHARAKTERYSTYKĄ ODCINKOWO CIĄGLĄ

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

Przy analizie dynamiki maszyn i urządzeń z elementami sprężystymi o charakterystyce liniowej odcinkowo ciągłej stosuje się różnego typu metody linearyzacji [1 i 2]. Otrzymane tą drogą częstości własne układu i charakterystyki częstościowe nie są dokładne i co więcej nie odzwierciedlają podstawowej własności tych układów, jaką jest wieloznaczność ruchu i możliwość wystąpienia silnych przebiegów podharmonicznych. Okazuje się, że zapisując uogólnioną charakterystykę sprężystą układu za pomocą dystrybucji i stosując rachunek operatorowy można uzyskać ścisłe rozwiązanie zagadnienia drgań w układzie. Co więcej, rozwiązanie to odzwierciedla wszystkie cechy układów o charakterystyce odcinków ciągłych. W niniejszej pracy zbadano drgania swobodne takiego układu analizując szczegółowo poszczególne warianty uogólnionej charakterystyki sprężystej.



Rys. 1

1. Rozważmy ruch w układzie, którego model i charakterystykę sprężystą podano na rys. 1. Przy przyjęciu oznaczeń $\omega^2 = k/m$, $\alpha_1 = P_1/m$, $\alpha_2 = P_2/m$, równanie ruchu układu ma postać

$$\ddot{x} + \omega^2(x - x_1)H(x - x_1) + \omega^2(x - x_2)H(x_2 - x) = -\alpha_1 H(x - x_1) - \alpha_2 H(x_2 - x),$$

(1)

$$H(y) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } y \leq 0, \\ 1, & \text{jeżeli } y > 0. \end{cases}$$

Różniczkując dwukrotnie względem czasu i korzystając z własności dystrybucji [3] $y\delta(y)=0$, mamy

$$(2) \quad \ddot{x} + \omega^2 \ddot{x} H(x-x_1) + \omega^2 \dot{x} |\dot{x}| \delta(x-x_1) + \omega^2 \ddot{x} H(x_2-x) - \omega^2 \dot{x} |\dot{x}| \delta(x_2-x) = \\ = -\alpha_1 |\dot{x}|^2 \dot{\delta}(x-x_1) - \alpha_2 |\dot{x}|^2 \dot{\delta}(x_2-x),$$

gdzie $\delta(y)$ jest funkcją Dirac'a, a $\dot{\delta}(y)$ jej pochodną. Ponieważ w równaniach wyjściowych (1) lub (2) nie ma żadnej funkcji dysypacji, to odbywający się w układzie ruch będzie okresowy. W celu jego określenia przyjmijmy, że obserwację ruchu rozpoczynamy od współrzędnej x_2 , czyli $x(0)=x_2$ oraz $\dot{x}(0)=V>0$.

W dalszym ciągu odcinek luzu w układzie masa m przebywa ze stałą prędkością $V>0$ w czasie t_0 , czyli $\dot{x}_{t_0}=V$. Czas kontaktu ze sprężystym ogranicznikiem z prawej strony oznaczmy przez τ_1 , a z ogranicznikiem lewostronnym przez τ_2 . Tak więc okres ruchu T będzie wynosił $T=2t_0+\tau_1+\tau_2$. Jak łatwo zauważyć z wyżej określonego ruchu warunki początkowe dla wyższych pochodnych są następujące $\ddot{x}(0)=\ddot{x}(0)=0$.

Rozwiązując równanie (2) za pomocą okresowej transformacji Laplace'a wprowadźmy konwencję zamiany argumentów okresowych dystrybucji [4]:

$$(3) \quad H(x-x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} [H(t-t_0-nT) - H(t-t_0-nT-\tau_1)], \\ H(x_2-x) = \sum_{n=0}^{\infty} [H(t-2t_0-nT-\tau_1) - H(t-2t_0-nT-\tau_1-\tau_2)],$$

przy czym, jak wynika z powyższego,

$$|\dot{x}| \delta(x_2-x) = - \sum_{n=0}^{\infty} [\delta(t-2t_0-nT-\tau_1) - \delta(t-2t_0-nT-\tau_1-\tau_2)].$$

Po wykonaniu operacji zamiany argumentów równanie ruchu (2) będzie miało postać

$$(4) \quad \ddot{x} + \omega^2 \ddot{x} \sum_{n=0}^{\infty} [H(t-t_0-nT) - H(t-t_0-nT-\tau_1)] + \omega^2 \dot{x} \sum_{n=0}^{\infty} [\delta(t-t_0-nT) - \\ - \delta(t-t_0-nT-\tau_1)] + \omega^2 \ddot{x} \sum_{n=0}^{\infty} [H(t-2t_0-nT-\tau_1) - H(t-2t_0-nT-\tau_1-\tau_2)] + \\ + \omega^2 \dot{x} \sum_{n=0}^{\infty} [\delta(t-2t_0-nT-\tau_1) - \delta(t-2t_0-nT-\tau_1-\tau_2)] = \\ = -\alpha_1 \sum_{n=0}^{\infty} [\dot{\delta}(t-t_0-nT) - \dot{\delta}(t-t_0-nT-\tau_1)] - \\ - \alpha_2 \sum_{n=0}^{\infty} [\dot{\delta}(t-2t_0-nT-\tau_1) - \dot{\delta}(t-2t_0-nT-\tau_1-\tau_2)].$$

Okresowa transformata tego równania przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & s^4 \bar{x} - s^3 x(0) - s^2 \dot{x}(0) - s \ddot{x}(0) - \ddot{x}(0) + \\
 & + \omega^2 \frac{\alpha_T \{ \ddot{x} [H(t-t_0) - H(t-t_0-\tau_1) + H(t-2t_0-\tau_1) - H(t-2t_0-\tau_1-\tau_2)] \}}{1 - e^{-sT}} + \\
 & + \omega^2 \frac{V e^{-st_0} - \dot{x}_{t_0+\tau_1} e^{-s(t_0+\tau_1)} + \dot{x}_{2t_0+\tau_1} e^{-s(2t_0+\tau_1)} - \dot{x}_{2t_0+\tau_1+\tau_2} e^{-s(2t_0+\tau_1+\tau_2)}}{1 - e^{-sT}} = \\
 & = -\alpha_1 \frac{se^{-st_0} - se^{-s(t_0+\tau_1)}}{1 - e^{-sT}} - \alpha_2 \frac{se^{-s(2t_0+\tau_1)} - se^{-s(2t_0+\tau_1+\tau_2)}}{1 - e^{-sT}}.
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że transformata iloczynu przyspieszenia i funkcji Heaviside'a wynosi

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \alpha_T \{ \ddot{x} [H(t-t_0) - H(t-t_0-\tau_1) + H(t-2t_0-\tau_1) - H(t-2t_0-\tau_1-\tau_2)] \} = \\
 & = \alpha_T \{ \ddot{x} \} = s^2 \bar{x} - sx(0) - \dot{x}(0),
 \end{aligned}$$

gdyż ruch układu jest taki, że $\ddot{x}(t) = 0$ dla $0 \leq t \leq t_0$ i $t_0 + \tau_1 \leq t \leq 2t_0 + \tau_1$.

Uwzględniając powyższe, warunki początkowe ruchu oraz okresowość prędkości ruchu, tzn. $\dot{x}(2t_0 + \tau_1 + \tau_2) = \dot{x}_{2t_0 + \tau_1 + \tau_2} = \dot{x}(0) = V$, wyliczymy z (5) transformatę poszukiwanego przemieszczenia układu:

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \bar{x} = & \frac{[s^3 x_2 + s\omega^2 x_2 + s^2 V + \omega^2 V][1 - e^{-sT}]}{s^2(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-sT})} - \\
 & - \omega^2 \frac{V e^{-st_0} - \dot{x}_{t_0+\tau_1} e^{-s(t_0+\tau_1)} + \dot{x}_{2t_0+\tau_1} e^{-s(2t_0+\tau_1)} - V e^{-s(2t_0+\tau_1+\tau_2)}}{s^2(s^2 + \omega^2)(1 - e^{-sT})} - \\
 & - \frac{\alpha_1}{s(s^2 + \omega^2)} \frac{e^{-st_0} - e^{-s(t_0+\tau_1)}}{1 - e^{-sT}} - \frac{\alpha_2}{s(s^2 + \omega^2)} \frac{e^{-s(2t_0+\tau_1)} - e^{-s(2t_0+\tau_1+\tau_2)}}{1 - e^{-sT}} = \frac{\Phi(s)}{1 - e^{-sT}}.
 \end{aligned}$$

Jak wiadomo [3], $\Phi(s)$ jest T -okresową transformatą poszukiwanego przemieszczenia, a po odwróceniu funkcja pierwotna $\Phi(t)$ musi spełniać następujące związki: $\Phi(t) = x(t)$, $t < T$ oraz $\Phi(t) = 0$ dla $t > T$. Rozkładając transformatę $\Phi(s)$ na ułamki proste i odwracając ją, otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \Phi(t) = & x_2 [1 - H(t-T)] - \frac{\alpha_1}{\omega^2} [H(t-t_0) - H(t-t_0-\tau_1)] - \\
 & - \frac{\alpha_2}{\omega^2} [H(t-2t_0-\tau_1) - H(t-2t_0-\tau_1-\tau_2)] + V [t - (t-T)H(t-T)] - \\
 & - V(t-t_0)H(t-t_0) + \dot{x}_{t_0+\tau_1}(t-t_0-\tau_1)H(t-t_0-\tau_1) - \\
 & - \dot{x}_{2t_0+\tau_1}(t-2t_0-\tau_1)H(t-2t_0-\tau_1) + V(t-T)H(t-T) + \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-t_0)H(t-t_0) - \\
 & - \frac{\dot{x}_{t_0+\tau_1}}{\omega} \sin \omega(t-t_0-\tau_1)H(t-t_0-\tau_1) + \frac{\dot{x}_{2t_0+\tau_1}}{\omega} \sin \omega(t-2t_0-\tau_1)H(t-2t_0-\tau_1) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{V}{\omega} \sin \omega(t-T) H(t-T) + \frac{\alpha_1}{\omega^2} \{ \cos \omega(t-t_0) H(t-t_0) - \\
 & - \cos \omega(t-t_0-\tau_1) H(t-t_0-\tau_1) \} + \frac{\alpha_2}{\omega^2} \{ \cos \omega(t-2t_0-\tau_1) H(t-2t_0-\tau_1) - \\
 & - \cos \omega(t-T) H(t-T) \}.
 \end{aligned}$$

Korzystając w dalszym ciągu ze związku $\Phi(t)=0$, $t>T$, otrzymamy warunki okresowości, jakie muszą spełniać parametry kinematyczne i strukturalne układu:

$$(9) \quad \dot{x}_{t_0+\tau_1} = \dot{x}_{2t_0+\tau_1} = -V, \quad V = \frac{\alpha_1}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\omega\tau_1}{2}, \quad V = -\frac{\alpha_2}{\omega} \operatorname{tg} \frac{\omega\tau_2}{2}.$$

Warto nadmienić, że przy wyprowadzeniu powyższych związków wykorzystano niezależność czasu t_0 od τ_1 i τ_2 .

Obliczyliśmy już niewiadome parametry ruchu, możemy wobec tego napisać prawo ruchu masy w przedziale czasu $0 \leq t \leq T$. Uwzględniając w (8) pierwszy związek (9) mamy

$$\begin{aligned}
 (10) \quad x(t) = & x_2 + Vt - V(t-t_0) H(t-t_0) - V(t-t_0-\tau_1) H(t-t_0-\tau_1) + \\
 & + V(t-2t_0-\tau_1) H(t-2t_0-\tau_1) + \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-t_0) H(t-t_0) + \\
 & + \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-t_0-\tau_1) H(t-t_0-\tau_1) - \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-2t_0-\tau_1) H(t-2t_0-\tau_1) - \\
 & - \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t-t_0)] H(t-t_0) + \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t-t_0-\tau_1)] H(t-t_0-\tau_1) - \\
 & - \frac{\alpha_2}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t-2t_0-\tau_1)] H(t-2t_0-\tau_1),
 \end{aligned}$$

gdzie $0 \leq t \leq T$.

Z opisu ruchu wiadomo, że masa przebywa luz $x_1 - x_2$ w czasie t_0 z prędkością V , wobec tego $t_0 = (x_1 - x_2)/V$. Posługując się dalej warunkami okresowości (9) możemy obliczyć czasy τ_1 i τ_2 :

$$(11) \quad \tau_1 = \frac{2}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega V}{\alpha_1}, \quad \tau_2 = \frac{2}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{-\omega V}{\alpha_2}, \quad \tau_2 > 0.$$

Ponieważ okres drgań $T = 2t_0 + \tau_1 + \tau_2$, to częstość drgań swobodnych wyniesie

$$(12) \quad \Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi\omega}{\frac{\omega(x_1-x_2)}{V} + \operatorname{arctg} \frac{\omega V}{\alpha_1} + \operatorname{arctg} \frac{-\omega V}{\alpha_2}}.$$

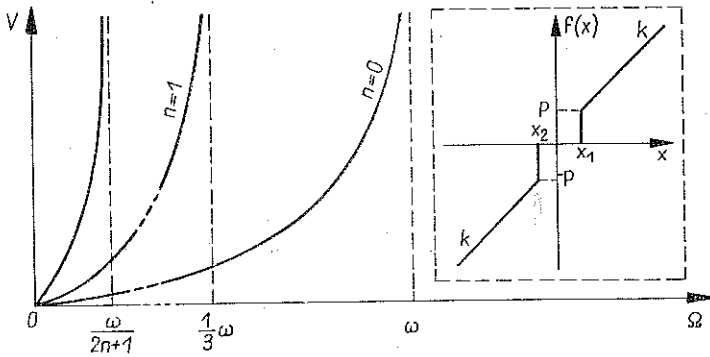
Jak widać z powyższego rezultatu częstość drgań swobodnych jest funkcją wielowartościową prędkości ruchu V , co świadczy o możliwości występowania przebiegów podharmonicznych przy drganiach wymuszonych układu.

Biorąc za podstawę związki (10)–(12) przeanalizujemy szczegółowo możliwe warianty uogólnionej charakterystyki układu.

2. Weźmy pod uwagę charakterystykę z naciągiem symetrycznym, gdy $P_2 = -P_1$, tzn. gdy $\alpha_2 = -\alpha_1 = -\alpha$. Wtedy częstość drgań swobodnych układu wyrazi się za pomocą zależności

$$(13) \quad \Omega = \frac{\pi\omega}{\frac{\omega(x_1 - x_2)}{V} + 2\arctg \frac{\omega V}{\alpha}}$$

Jak łatwo zauważyć z powyższego częstość drgań Ω dąży do zera, gdy prędkość ruchu dąży również do zera ($\Omega \rightarrow 0$, gdy $V \rightarrow 0$). Natomiast gdy $V \rightarrow \infty$, to $\Omega \rightarrow \omega/(2n+1)$, $n=0, 1, 2, \dots$, przy czym łatwo się domyślić, że drgania swobodne mogą istnieć tylko na krzywej szkieletowej $n=0$. Na rys. 2 pokazano wykres krzywych szkieletowych analizowanego układu symetrycznego jako funkcji prędkości ruchu V .



Rys. 2

Jak wynika z rysunku asymptotami krzywych szkieletowych są nieparzyste podwielokrotności częstości ω .

Istotne dla znajomości ruchu w układzie prawo ruchu masy można uzyskać prosto z zależności (10) przyjmując $\alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha$.

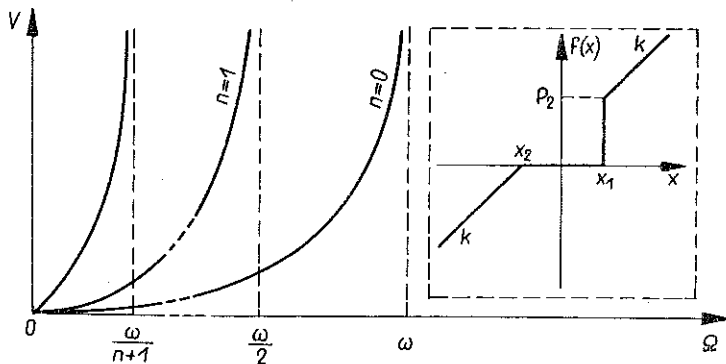
3. Z kolei rozpatrzmy charakterystykę niesymetryczną z luzem i jednostronnym naciągiem ($\alpha_2 = 0$). Dokonując we wzorze (12) przejścia granicznego $\alpha_2 \rightarrow 0^-$, otrzymamy poprawny w rozpatrywanym przypadku wzór na częstość drgań:

$$(14) \quad \Omega = \frac{\pi\omega}{\frac{\omega(x_1 - x_2)}{V} + \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\omega V}{\alpha_1}}$$

Z analizy tego wzoru wynika, że dla $V \rightarrow 0$ granica $\Omega \rightarrow 0$, a gdy $V \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \omega/(n+1)$, $n=0, 1, \dots$. Tak więc asymptoty krzywych szkieletowych są kolejnymi podwielo-

krotnościami częstości ω . Otrzymane wyżej rezultaty przedstawia graficznie rysunek 3. Prawo ruchu masy w układzie uzyskamy z zależności (10) przyjmując $\alpha_2=0$. Po przekształceniach ma ono postać

$$(15) \quad x(t) = x_2 + Vt + \left\{ -V(t-t_0) + \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-t_0) - \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t-t_0)] \right\} H(t-t_0) + \left\{ -V(t-t_0-\tau_1) + \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-t_0-\tau_1) + \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t-t_0-\tau_1)] \right\} H(t-t_0-\tau_1) + \left\{ V(t-2t_0-\tau_1) - \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-2t_0-\tau_1) \right\} H(t-2t_0-\tau_1), \quad 0 \leq t \leq T.$$



Rys. 3

4. Następnym możliwym wariantem uogólnionej charakterystyki sprężystej układu jest przypadek jednostronnego bardzo dużego naciągu ($P_1 \rightarrow \infty$) przy jednoczesnym zerowym naciągu z drugiej strony ($\alpha_2=0$). Wykonując we wzorze (14) przejście graniczne $\alpha_1 \rightarrow \infty$, otrzymamy

$$(16) \quad \Omega = \frac{2\pi\omega}{(2n+1)\pi + \frac{2\omega(x_1-x_2)}{V}},$$

stąd wynika, że jeśli $V \rightarrow 0$, to $\Omega \rightarrow 0$ oraz jeśli $V \rightarrow \infty$, to $\Omega \rightarrow 2\omega/(2n+1)$. Warto tu zwrócić uwagę na fakt, że asymptoty krzywych szkieletowych są takie same, jak przy drganiach uderzeniowych jednostronnych układu o jednym stopniu swobody [5]. Krzywe szkieletowe układu dla tego przypadku przedstawiono na rys. 4.

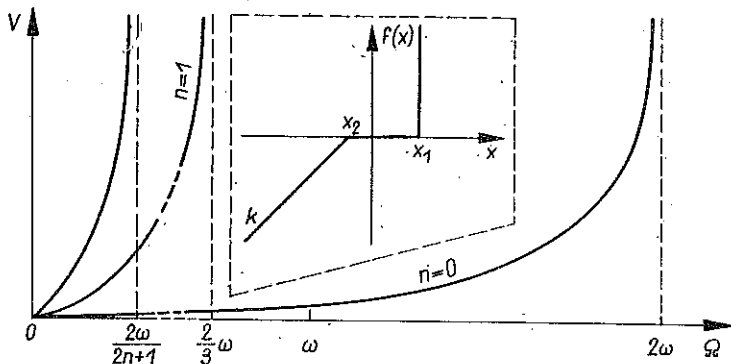
Prawo ruchu masy uzyskamy z (15), przedtem jednak zauważmy, że dla $t=t_0$ i $t > t_0 + \tau_1$ mamy

$$(17) \quad \left\{ \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-t_0) - \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t-t_0)] \right\} H(t-t_0) + \left\{ \frac{V}{\omega} \sin \omega(t-t_0-\tau_1) + \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t-t_0-\tau_1)] \right\} H(t-t_0-\tau_1) = 0.$$

Aby wykazać powyższe dla $t > t_0 + \tau_1$, należy się posłużyć warunkiem okresowości (9).

Ponieważ $P_1 \rightarrow \infty$, to $\alpha_1 \rightarrow \infty$ oraz $\tau_1 \rightarrow 0$; wynika stąd, że wyrażenie powyższe w granicy przyjmuje wartość zero dla wszystkich t z przedziału $0 \leq t \leq T$. Wobec tego prawo ruchu masy przedstawia się następująco:

$$(18) \quad x(t) = x_2 + Vt - 2V(t-t_0)H(t-t_0) + V \left\{ (t-2t_0) - \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-2t_0) \right\} H(t-2t_0).$$



Rys. 4

Łatwo sprawdzić, że po odbiciu od ogranicznika przy x_1 prędkość masy zmienia znak na przeciwny tak jak przy zderzeniu. Biorąc jeszcze pod uwagę te same asymptoty krzywych szkieletowych można powiedzieć, że tym sposobem uzyskaliśmy możliwość nowego opisu zjawisk drgań z uderzeniami bez strat w układzie.

5. Przejdźmy do analizy innego wariantu uogólnionej charakterystyki, mianowicie do układu bez naciągu i z luzem, tzn. gdy $P_1 = P_2 = 0$. Dokonując w ogólnym wzorze (12) przejścia granicznego $\alpha_1 \rightarrow 0^+$, $\alpha_2 \rightarrow 0^-$, otrzymamy

$$(19) \quad \Omega = \frac{\pi\omega}{\frac{\omega(x_1 - x_2)}{V} + (2n+1)\pi}, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

O charakterze krzywych szkieletowych można się przekonać wykonując przejścia graniczne; jeśli $V \rightarrow 0$, to $\Omega \rightarrow 0$ oraz jeśli $V \rightarrow \infty$, to $\Omega \rightarrow \omega/(2n+1)$. Tak więc asymptoty krzywych szkieletowych są takie same, jak w przypadku naciągu symetrycznego, lecz charakter zmienności krzywych jest inny. Wykres tych krzywych przedstawia rys. 5.

Prawo ruchu masy w układzie uzyskamy z ogólnej zależności (10), przyjmując $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ i biorąc pod uwagę, że w tym przypadku $\tau_1 = \tau_2 = \pi/\omega$. Wtedy

$$(20) \quad x(t) = x_2 + Vt + V \left\{ \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t_0) - (t-t_0) \right\} H(t-t_0) +$$

$$+ V \left\{ \frac{1}{\omega} \sin \omega \left(t - t_0 - \frac{\pi}{\omega} \right) - \left(t - t_0 - \frac{\pi}{\omega} \right) \right\} H \left(t - t_0 - \frac{\pi}{\omega} \right) + \\ + V \left\{ \left(t - 2t_0 - \frac{\pi}{\omega} \right) - \frac{1}{\omega} \sin \omega \left(t - 2t_0 - \frac{\pi}{\omega} \right) \right\} H \left(t - 2t_0 - \frac{\pi}{\omega} \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

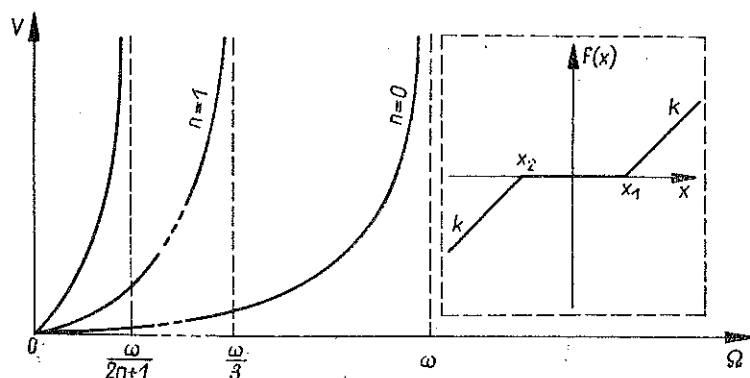
Zauważmy, że prędkość V można zastąpić amplitudą ruchu, gdyż

$$A = x \left(t_0 + \frac{\pi}{2\omega} \right) = -x \left(2t_0 + \frac{3}{2} \frac{\pi}{\omega} \right).$$

Uwzględniając to, znajdziemy $V = \omega(A - x_1)$, skąd po przekształceniach częstość drgań wyniesie

$$(21) \quad \Omega = \frac{\pi\omega}{(2n+1)\pi + \frac{2}{\beta-1}}, \quad \beta = \frac{A}{x_1} > 1.$$

Wyprowadzony wyżej wzór na częstość drgań dla $n=0$ jest identyczny z podanym w pracy [6]. Tutaj jest on znacznie ogólniejszy, gdyż uwzględnia możliwość wystą-



Rys. 5

pienia przebiegów podharmonicznych przy drganiach wymuszonych. Wykresy krzywych szkieletowych wg zależności (21) są analogiczne do wykresów na rys. 5 z tym zastrzeżeniem, że początek krzywych na osi amplitud znajduje się w punkcie $A = x_1$.

6. Przejdźmy do rozpatrzenia charakterystyki bez luzu ($x_1 = x_2$) i z naciągami ($P_1; P_2 \neq 0$). Ponieważ $x_1 = x_2$, przeto czas przebycia luzu $t_0 = 0$. Uwzględniając to we wzorze na częstość drgań i prawo ruchu masy, będziemy mieli

$$(22) \quad \Omega = \frac{\pi\omega}{\arctg \frac{\omega V}{\alpha_1} + \arctg \frac{-\omega V}{\alpha_2}}, \\ x(t) = x_2 + \frac{V}{\omega} \sin \omega t - \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega t] + \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t - \tau_1)] H(t - \tau_1) - \\ - \frac{\alpha_2}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t - \tau_1)] H(t - \tau_1), \quad 0 \leq t \leq T.$$

W szczególnym przypadku naciągu symetrycznego mamy $\alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha$, stąd

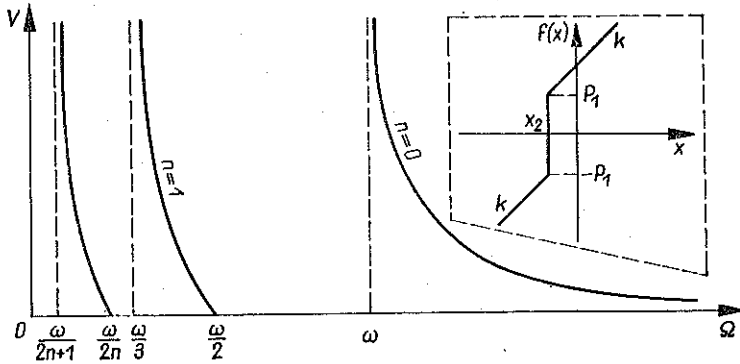
$$\Omega = \frac{\pi\omega}{2 \arctg \frac{\omega V}{\alpha}}$$

(23)

$$x(t) = x_2 + \frac{V}{\omega} \sin \omega t - \frac{\alpha}{\omega^2} [1 - \cos \omega t] + \frac{2\alpha}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t - \tau)] H(t - \tau),$$

$$0 \leq t \leq T.$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli $V \rightarrow 0$, to $\Omega \rightarrow \omega/2n$, a gdy $V \rightarrow \infty$, to $\Omega \rightarrow \omega/(2n+1)$. Wobec tego wykres krzywych szkieletowych przypadku symetrycznego będzie miał postać przedstawioną na rys. 6.



Rys. 6

W przypadku szczególnym charakterystyki $x_1 = x_2 = 0$ można łatwo wprowadzić do rozważań amplitudę drgań $A = x(\tau/2)$. Wykorzystując jeszcze warunek okresowości (11), po przekształceniach da się uzyskać inną postać wzoru na częstość drgań:

(24)

$$\Omega = \frac{\pi\omega}{\pi - 2 \arcsin \frac{\alpha}{\alpha + \omega^2 A}}$$

wzór ten dla $n=0$ jest równoważny wzorowi (23), a identyczny jest ze wzorem podanym w pracy [6].

7. Następnym wariantem charakterystyki bez luzu jest bardzo ważny z punktu widzenia drgań z uderzeniami w układzie. Niech $x_1 = x_2, P_1 \rightarrow \infty, P_2 \neq 0$. Wtedy (ponieważ $\tau_1 \rightarrow 0$) częstość drgań w układzie wyniesie

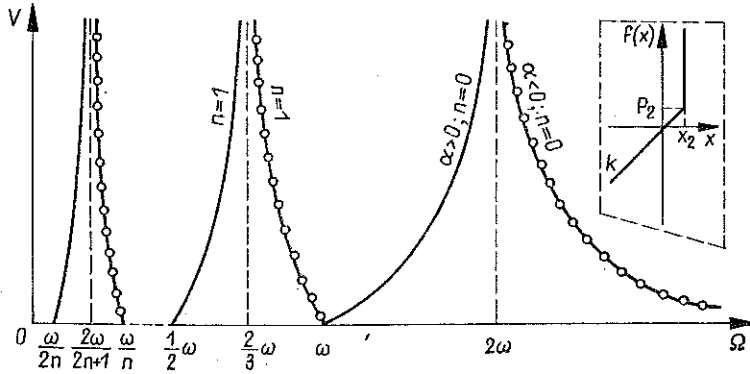
(25)

$$\Omega = \frac{\pi\omega}{\arctg \frac{-\omega V}{\alpha_2}}$$

Ponieważ w rozważanym przypadku w układzie nie ma luzu, to naciąg P_2 możemy zastąpić przemieszczeniem statycznym x_2 ($\alpha_2 = P_2/m = P_2 \omega^2/k = \omega^2 x_2$). Pamiętając, że $\text{arc tg } x = \text{arc ctg } (1/x)$, z zależności (25) uzyskamy

$$(26) \quad \Omega = \frac{\pi\omega}{\text{arc ctg} \frac{-\omega x_2}{V}},$$

a więc formułę identyczną ze wzorem na częstość drgań z uderzeniami jednostronnymi w układzie [5]. Identyczne są również krzywe szkieletowe przedstawione na rys. 7.



Rys. 7

Prawo ruchu masy w układzie otrzymamy przez przekształcenie przypadku poprzedniego. Zauważmy przy tym, że dwa ostatnie wyrazy we wzorze (22), przy wykorzystaniu warunku okresowości (9), można doprowadzić do postaci

$$(27) \quad \frac{-\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega t] + \frac{\alpha_1}{\omega^2} [1 - \cos \omega(t - \tau_1)] = -\frac{2V}{\omega} \sin \omega \left(t - \frac{\tau_1}{2} \right) \cos \frac{\omega \tau_1}{2},$$

przy czym wyrażenie to dąży do $-(2V/\omega) \sin \omega t$, gdy $\tau_1 \rightarrow 0$. Wobec tego prawo ruchu masy będzie następujące:

$$x(t) = x_2 - \frac{V}{\omega} \sin \omega t - \frac{\alpha_2}{\omega^2} [1 - \cos \omega t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

Podstawiając jak poprzednio $\alpha_2 = \omega^2 x_2$, otrzymamy

$$(28) \quad x(t) = x_2 \cos \omega t - \frac{V}{\omega} \sin \omega t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Wróćmy obecnie do warunku okresowości (9). Podstawiając w nim $\alpha_2 = \omega^2 x_2$ i pamiętając, że dla tego przypadku $T = \tau_2$, otrzymamy

$$(29) \quad x_2 = -\frac{V}{\omega} \text{ctg} \frac{\omega T}{2}.$$

Wykorzystując otrzymany związek we wzorze (28) dostaniemy następującą postać prawa ruchu masy w układzie:

$$(30) \quad x(t) = \frac{-V}{\omega \sin \frac{\omega T}{2}} \cos \omega \left(t - \frac{T}{2} \right),$$

identyczną z prawem ruchu masy przy drganiach uderzeniowych jednostronnych [7]. Tak więc można powiedzieć, że wprowadzając nieskończony naciąg ($P_1 \rightarrow \infty$) uzyskaliśmy możliwość nowego opisu drgań uderzeniowych w układzie.

8. Na zakończenie warto pokazać, że uogólnioną charakterystykę rozpatrywaną w pracy da się sprowadzić do liniowej ciągłej przyjmując $x_1 = x_2 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Wtedy

$$(31) \quad \tau_1 = \tau_2 = \frac{\pi}{\omega}, \quad \Omega = \frac{\pi\omega}{\pi} = \omega,$$

prawo zaś ruchu

$$(32) \quad x(t) = \frac{V}{\omega} \sin \omega t.$$

9. Reasumując całość rozważań pracy można powiedzieć, że wykorzystując teorię dystrybucji i okresową transformację Laplace'a uzyskano możliwość rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych w układzie o charakterystyce odcinkowo ciągłej. Rozpatrując poszczególne warianty tej charakterystyki otrzymano zależności na częstość drgań i prawo ruchu masy w układzie. Analizując zaś układ z bardzo dużym naciągiem wykazano, że jest on równoważny układowi wibrouderzeniowemu, przez co uzyskano nowy sposób analizy drgań z uderzeniami.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. И. И. Вульфсон, М. З. Коловский, *Нелинейные задачи динамики машин*, Машиностроение, Ленинград 1968.
2. М. З. Коловский, *Нелинейная теория виброзащитных систем*, Наука, Москва 1966.
3. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
4. J. MIKUSIŃSKI, R. SIKORSKI, *Elementarna teoria dystrybucji*, Małe Monografie, PWN, Warszawa 1964.
5. Cz. SEMPEL, *Linearyzacja sił sprężystych w układzie wibrouderzeniowym*, Rozpr. Inżyn., 17, 3, 1969.
6. *Прочность, устойчивость, колебания*, 3, Справочник, под редакцией И. А. Биргера, Я. Г. Пановко, Машиностроение, Москва 1969.
7. Cz. SEMPEL, *Okresowe drgania z uderzeniami w dyskretnych układach mechanicznych*, Wyd. Polit. Poznańskiej, Seria Rozprawy, nr 44, Poznań 1970.

Резюме

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОБЩЕННОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В работе решается вопрос свободных колебаний обобщенной системы с зазором и натягом, применяя теорию обобщенных функций а также операторное исчисление.

В результате подсчета определяются формулы для частоты колебаний и начала движения системы. Анализируя случай системы с большим натягом обнаружено при этом новый путь исследования ударных колебаний в системе.

SUMMARY

FREE VIBRATIONS OF A SYSTEM WITH GENERALIZED DISCONTINUOUS ELASTIC
FORCE CHARACTERISTICS

In this paper the problem of free vibrations of a system is solved by means of the theory of distributions and the Laplace transforms method. The frequencies of vibration and the characteristics of motion are determined in the case of various types of force characteristics. In addition, a new method is developed of the impact vibration analysis based upon the preliminary constraining method.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ
POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 czerwca 1971 r.
