

RÓWNANIA MACIERZOWE TARCZOWNICY PRYZMATYCZNEJ

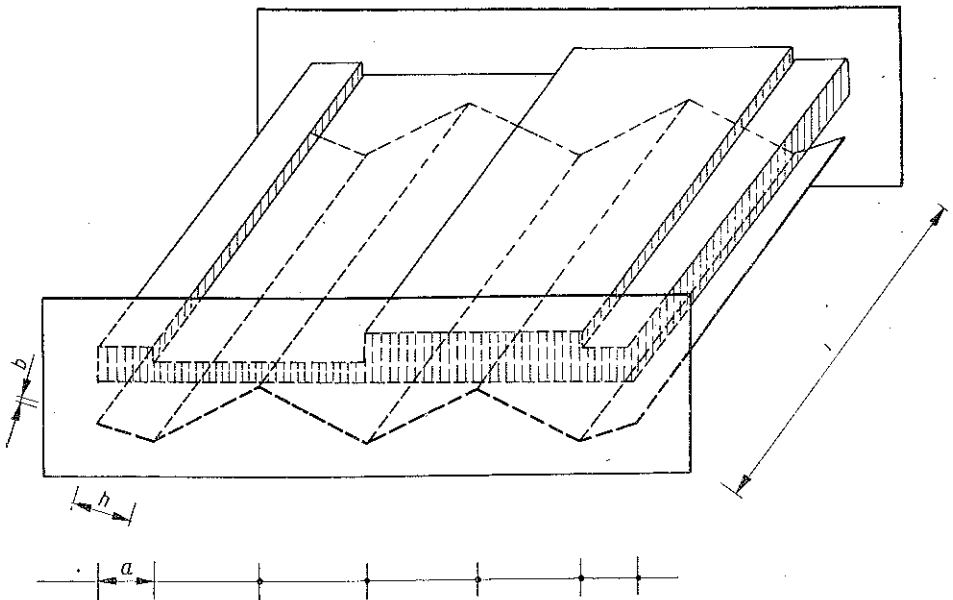
JADWIGA POPLEWSKA i KAZIMIERZ WRZEŚNIEWSKI (POZNAŃ)

ZESTAWIENIE WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- b grubość tarczy,
- h wysokość tarczy (między podłużnymi węzłami),
- a poziomy rzut wysokości h ,
- l podłużna rozpiętość tarczownicy,
- n liczba tarcz,
- q liczba kombinacji obciążenia,
- E moduł sprężystości podłużnej,
- C_s współczynnik naprężenia,
- C_D współczynnik odkształcenia,
- I^t moment bezwładności tarczy,
- I^p moment bezwładności paska płyty,
- R jednokolumnowa macierz pionowych sił węzłowych R_i przenoszonych przez złożony układ tarczowo-płytowy,
- R^t jednokolumnowa macierz pionowych sił węzłowych R_i^t przenoszonych przez układ tarczowy,
- R^p jednokolumnowa macierz pionowych sił węzłowych R_i^p przenoszonych przez układ płytowy,
- P jednokolumnowa macierz sił tarczowych P_i wywołanych działaniem obciążenia R^t ,
- B macierz transformacji sił R^t ,
- T siła styczna działająca wzdłuż krawędzi tarczy (na jednostkę długości krawędzi),
- N siła styczna działająca wzdłuż krawędzi tarczy,
- M^0 moment tarczowy odpowiadający działaniu tylko obciążenia P ,
- M^T moment tarczowy odpowiadający działaniu tylko sił T ,
- M^t wypadkowy moment tarczowy,
- θ kąt obrotu węzła,
- ψ kąt obrotu tarczy,
- S^t macierz naprężeń układu tarczowego,
- F^t macierz odkształceń układu tarczowego,
- K^t macierz sztywności układu tarczowego,
- S^p macierz momentów układu płytowego,
- K^p macierz sztywności układu płytowego,
- F macierz odkształceń układu złożonego,
- K macierz sztywności układu złożonego,
- m poprzeczny moment płytowy na brzegu tarczy,
- δ pionowe przemieszczenie krawędzi,
- σ podłużne naprężenie normalne na brzegu tarczy.

Rozwój teorii tarczownic datuje się od r. 1930. Pierwsze prace H. CRAEMERA [1] i G. EHLERSA [2] dotyczyły teorii błonowej, nie uwzględniały bowiem wpływu nierównomiernego przemieszczenia krawędzi na wielkość sił przekrojowych. Łata następne przyniosły znaczną liczbę prac uściślających teorię tarczownic. W r. 1965 G. POWELL [3] dokonał ogólnego podsumowania i usystematyzował opracowane metody obliczania tarczownic, dzieląc je na ścisłe i przybliżone.

W pracy niniejszej przedstawia się jedną z metod bezpośrednich, należącą do grupy metod przybliżonych. Równania teorii tarczownic przyzmatycznych podane zostaną w zapisie macierzowym. Podobne sformułowanie znajdujemy u SCORDELISA [4] z tym zastrzeżeniem, że w przedstawionej poniżej pracy rozpatrywany będzie przypadek ogólniejszy, mianowicie zakłada się, że poszczególne elementy tarczownicy są wykonane z różnych materiałów (E zmienne) oraz wprowadza się współczynniki C_S i C_D dla naprężenia i odkształcenia w postaci funkcji x , co pozwala na bezpośrednie określenie wartości naprężeń i odkształceń w dowolnym przekroju. Do wyznaczenia jednostkowych sił tarczowych występujących w macierzy transformacyjnej B wykorzystano zależności geometryczne konstrukcji, podczas gdy Scordelis



Rys. 1

posługuje się w tym przypadku zasadą prac wirtualnych. W pracy niniejszej zastosowano również odmienny od przyjętego przez Scordelisa sposób znakowania naprężeń, mianowicie ogólnie stosowany w teorii belkowej.

Rozpatrywana będzie tarczownica przedstawiona na rys. 1, jednoprzęsłowa, swobodnie podparta na poprzecznych przeponach, wielofalowa, na którą działa obciążenie zmieniające się (we wszystkich płaskich elementach tarczownicy) w kierunku podłużnym wg tej samej funkcji. Jednakowa funkcja obciążenia we wszystkich

elementach jest konieczna ze względu na zastosowanie w niniejszej pracy rachunku macierzowego. Omawiane rozwiązanie może mieć również zastosowanie w przypadku obciążenia zmieniającego się w poszczególnych elementach wg różnych funkcji. Wówczas działające obciążenie zastępujemy równoważnym w taki sposób, aby w poszczególnych elementach była zachowana jednakowa zmienność obciążenia w kierunku podłużnym (niektóre elementy mogą być nieobciążone); kolejne przypadki rozpatrujemy oddzielnie, a wyniki ostateczne otrzymujemy korzystając z zasady superpozycji.

1. WPROWADZENIE

W grupie metod przybliżonych jako matematyczny model obliczania konstrukcji tarczownicowych przyjmuje się układ płyt opartych sprężystie wzdłuż krawędzi na idealnym układzie tarczowym.

Praca takiego modelu analizowana jest przy następujących założeniach:

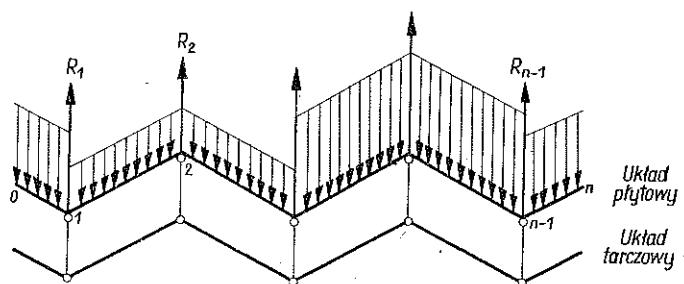
1. Materiał jest jednorodny, izotropowy oraz liniowo-sprężysty.
2. Do modelu odnosi się zasada superpozycji.
3. Przemieszczenia są małe w stosunku do grubości tarczownicy.
4. Konstrukcja jest całkowicie monolityczna; krawędzie tarczownic, tj. podłużne węzły, traktuje się jako sztywne (nie ma żadnego względnego obrotu ani równoległego przesuwu dwóch sąsiadujących elementów wzdłuż ich wspólnej krawędzi).
5. Przepony są nieskończenie sztywne we własnych płaszczyznach i nieskończenie wiotkie w płaszczyznach do nich prostopadłych.
6. Gdy wszystkie tarcze są stosunkowo długie w porównaniu z ich szerokością ($l/h \geq 3$) oraz szerokie w porównaniu z grubością ($h/b \geq 5$), przyjmuje się dodatkowo, że dla tarczy spełnione są następujące założenia: a) zginanie tarczy odbywa się w kierunku podłużnym; podłużne naprężenia normalne mogą być określone według teorii belkowej; tak więc zmiana naprężeń normalnych jest liniowa na przekroju tarczy; b) poprzeczne naprężenia normalne można pominąć; c) naprężenia styczne mają znikomy wpływ na odkształcenia konstrukcji; w równaniach równowagi uwzględnia się tylko naprężenia styczne krawędziowe.

Natomiast dla płyt spełnione są następujące założenia: d) zginanie płyty jest zasadniczo jednokierunkowe — w kierunku poprzecznym, efekt zginania podłużnego można pominąć; e) ze względu na mały wpływ na pracę konstrukcji pomija się naprężenia styczne.

7. Ze względu na ciągłość konstrukcji (punkty a, b i c) i jej równowagę (punkty d, e i f) w zespole układu tarczowego i płytowego muszą być spełnione następujące warunki. Są sobie równe: a) kąty obrotu przekrojów na krawędziach przecięcia się dwóch sąsiadujących elementów układu płytowego; b) przemieszczenia tych samych krawędzi układu tarczowego i płytowego; c) podłużne odkształcenia na krawędziach stykających się elementów układu tarczowego. Są sobie równe co do wartości bezwzględnej, ale mają różne zwroty: d) reakcje układu płytowego i obciążenia działające na układ tarczowy; e) siły ścinające, działające wzdłuż wspólnej krawędzi sąsiadujących ze sobą elementów składowych układu tarczowego;

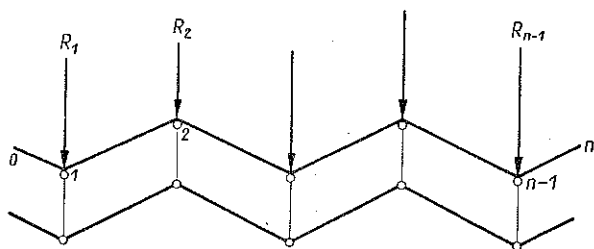
f) momenty poprzeczne działające wzdłuż wspólnej krawędzi sąsiadujących elementów układu płytowego.

Analiza tarczownicy przeprowadzona jest w dwóch etapach. W pierwszym etapie układ płytowy traktowany jest jako płyta ciągła oparta na niepodpartych podporach, co równoznaczne jest z wprowadzeniem na krawędziach 1, 2, ..., $n-1$ sił zewnętrznych podtrzymujących, równych reakjom płyty ciągłej obciążonej ciężarem własnym



Rys. 2

użytkowym (rys. 2). Pod wpływem takiego obciążenia R w układzie płytowym powstają momenty zginające m^t , natomiast układ tarczowy (ze względu na działanie sił zewnętrznych R_1, R_2, \dots, R_{n-1} , które łącznie z obciążeniem zewnętrznym q tworzą układ sił będący w równowadze) pozostaje nienaprzężony.



Rys. 3

W rzeczywistości siły podtrzymujące nie istnieją. Działanie tych sił trzeba zlikwidować więc siłami przeciwnie skierowanymi, działającymi na tarczownicę wzdłuż krawędzi (rys. 3). Badanie zachowania się tarczownicy pod działaniem tych sił stanowi drugi etap rozważań.

Ze względu na sprężyste połączenie układów płytowego i tarczowego zachodzi pełna ich współpraca przy przeniesieniu sił krawędziowych R_1, R_2, \dots, R_{n-1} . Układ płytowy przejmuje pewną ich część $R_1^p, R_2^p, \dots, R_{n-1}^p$; pozostała część przejęta jest całkowicie przez układ tarczowy $R_1^t, R_2^t, \dots, R_{n-1}^t$, co można napisać w następujący sposób:

$$(1.1) \quad R_i = R_i^p + R_i^t, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Równania (1.1) mogą być przedstawione w formie macierzowej rozwiniętej

$$(1.2) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^p \\ \mathbf{R}_2^p \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{n-1}^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^t \\ \mathbf{R}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{n-1}^t \end{bmatrix}$$

lub również (oznaczając przez R , R^p i R^t macierze, których elementami są wektory)

$$(1.3) \quad R = R^p + R^t.$$

Układy sił R^p i R^t muszą działać na poszczególne krawędzie zgodnie z warunkami ciągłości i równowagi. Ponieważ wyłącznie układ tarczowy ma zdolność przekazywania sił na przepony, będące elementami podporowymi całej tarczownicy, przeto musi być spełniona zależność

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_i^t = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i,$$

co z kolei wskazuje, że układ sił R^p musi być układem samorzównoważonym:

$$(1.5) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}_i^p = 0.$$

Spełnienie warunków (1.1), (1.4) i (1.5), jak również wspomnianych już poprzednio warunków równowagi i ciągłości, jest punktem wyjścia do ułożenia modelu matematycznego problemu, modelu utworzonego ze sprężystości połączonych układów: tarczowego i płytowego.

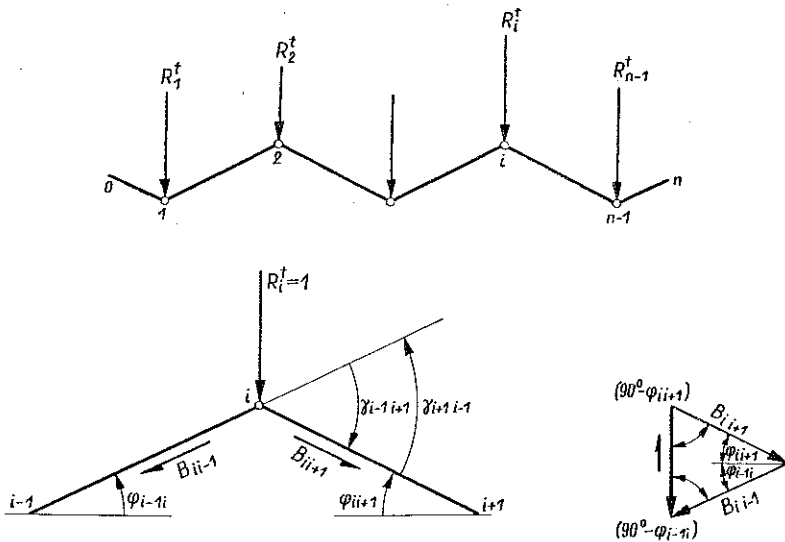
Zasadnicze równania będą wyprowadzone w postaci macierzowej oddzielnie dla każdego układu; następnie macierze te zostaną wykorzystane do modelu tarczowo-płtowego zgodnie z wymienionymi wyżej warunkami. Wynikiem rozważań będą macierze określające podłużne naprężenia normalne, pionowe przemieszczenia krawędzi oraz momenty poprzeczne.

Wykonując w dalszej części pracy działania na macierzach, korzystać będziemy z twierdzeń rachunku macierzowego. Nie będziemy przy tym wykazywali, że odpowiednie założenia, na których opierają się przekształcenia, są spełnione (np. dotyczące wymiarów, istnienia macierzy odwrotnej i in.). Sprawdzenie to pozostawiamy Czytelnikowi.

2. UKŁAD TARCZOWY

Konstrukcja tarczowa nie ma sztywności na zginanie w płaszczyźnie do niej prostopadłej. Ze względu na to — zginanie w tej płaszczyźnie nie wywołuje w konstrukcji naprężeń. Wygodnie jest więc traktować konstrukcję tarczową jako mającą przeguby wzdłuż krawędzi. Analiza układu tarczowego, poddanego działaniu sił R^t , obejmuje zatem obliczenie tylko podłużnych naprężeń normalnych σ oraz pionowych przemieszczeń krawędzi δ .

Najpierw wyznaczmy podłużne naprężenia normalne występujące na krawędziach tarcz w wyniku działania obciążenia R^t . W myśl założenia tarcze przenoszą tylko obciążenia w swoich płaszczyznach, wobec tego siły R^t rozkładamy na obciążenia



Rys. 4

żenia tarczowe P , działające w płaszczyznach środkowych poszczególnych tarcz. Dla dalszego toku obliczeń wygodniej będzie uważać dane obciążenia R^t jako układ sił jednostkowych. Składowe B_{ii-1} , B_{ii+1} (rys. 4) tych jednostkowych sił, równoległe do poszczególnych tarcz, określone są wzorami

$$(2.1) \quad B_{ii-1} = \frac{\cos \varphi_{i-1, i}}{\sin \gamma_{i-1, i+1}}, \quad B_{ii+1} = \frac{\cos \varphi_{i, i+1}}{\sin \gamma_{i+1, i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Przyjęte w powyższych wzorach oznaczenia ilustruje rys. 4. Obciążenia tarczowe B działające w kierunkach 0, 1, 2, ..., n uważa się za dodatnie. Takie założenie dodatniego kierunku obciążeń tarczowych jest równoznaczne z przyjęciem za dodatnie kątów lewoskrętnych.

Znając składowe jednostkowych sił tarczowych, macierz obciążenia tarczowego P wyznaczmy wg wzoru

$$(2.2) \quad P = BR^t,$$

w którym B oznacza macierz (o wymiarach $n \times (n-1)$) transformacji sił R^t i jest zbudowana w następujący sposób:

$$(2.3) \quad B = \begin{bmatrix} B_{10} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{21} & 0 & 0 \\ 0 & B_{23} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_{n-2, n-1} & B_{n-1, n-2} \\ 0 & 0 & 0 & B_{n-1, n} \end{bmatrix}.$$

W dalszej analizie konstrukcji tarczownicowej rozważamy dowolny płaski element $(i, i+1)$ wycięty z układu wzdłuż krawędzi (rys. 5). Tarcza $(i, i+1)$ swobodnie podparta na przeponach, obciążona jest siłami tarczowymi o wielkości P_{ii+1} oraz (odniesionymi do jednostki długości) podłużnymi siłami stycznymi $T_{ii+1}(x)$ i $T_{i+1i}(x)$ (działającymi w fikcyjnych «przegubach» położonych wzdłuż krawędzi). Konieczność wprowadzenia układu sił T wynika z warunków ciągłości. W ogólnym przypadku naprężenia $\sigma_{ii-1}^P, \sigma_{ii+1}^P$ na krawędzi i wywołane obciążeniem P_{i-1i} oraz P_{ii+1} mają różne, ściśle określone wartości. Zachowanie ciągłości konstrukcji wymaga, aby odkształcenia ε były identyczne, tzn.

$$(2.4) \quad \varepsilon_{ii-1} = \varepsilon_{ii+1}, \quad i=1, 2, \dots, n-1,$$

czyli wywołujące je naprężenia nie mogą być dowolne. Trzeba więc wprowadzić siły styczne, działające wzdłuż krawędzi, które wywołają naprężenia $\sigma_{ii-1}^T, \sigma_{ii+1}^T$ takiej wartości, aby był spełniony warunek:

$$(2.5) \quad \frac{\sigma_{ii-1}^P + \sigma_{ii-1}^T}{E_{ii-1}} = \frac{\sigma_{ii+1}^P + \sigma_{ii+1}^T}{E_{ii+1}}, \quad i=1, 2, \dots, n-1.$$

Wartości sił stycznych $T_{ii+1}(x)$ określono za pomocą wzorów

$$(2.6) \quad T_{ii+1}(x) = \tau_{ii+1}(x) b_{ii+1}, \quad i=0, 1, \dots, n-1,$$

gdzie $\tau_{ii+1}(x)$ oznacza naprężenia styczne występujące na krawędzi (i) tarczy $(i, i+1)$ oraz b_{ii+1} grubość tarczy $(i, i+1)$. W dowolnym przekroju $\alpha-\alpha$ tarczy $(i, i+1)$ siły $T_{ii+1}(x), T_{i+1i}(x)$ są zrównoważone następującymi siłami $N_{ii+1}(x), N_{i+1i}(x)$ normalnymi do przekroju tarczy (dla $x \leq l/2$):

$$(2.7) \quad N_{ii+1}(x) = \int_0^x T_{ii+1}(x) dx$$

oraz momentem zginającym

$$(2.8) \quad M_{ii+1}^T(x) = \frac{h_{ii+1}}{2} (N_{ii+1}(x) + N_{i+1i}(x)), \quad i=0, 1, \dots, n-1,$$

gdzie h_{ii+1} oznacza wysokość tarczy $(i, i+1)$. Moment zginający $M_{ii+1}^0(x)$ od obciążenia tarczowego P_{ii+1} w przekroju $\alpha-\alpha$ wynosi:

$$(2.9) \quad M_{ii+1}^0(x) = C_S(x) P_{ii+1}, \quad i=0, 1, \dots, n-1,$$

gdzie $C_S(x)$ oznacza współczynnik, który jest zależny od rozmieszczenia obciążenia oraz od położenia przekroju $\alpha-\alpha$.

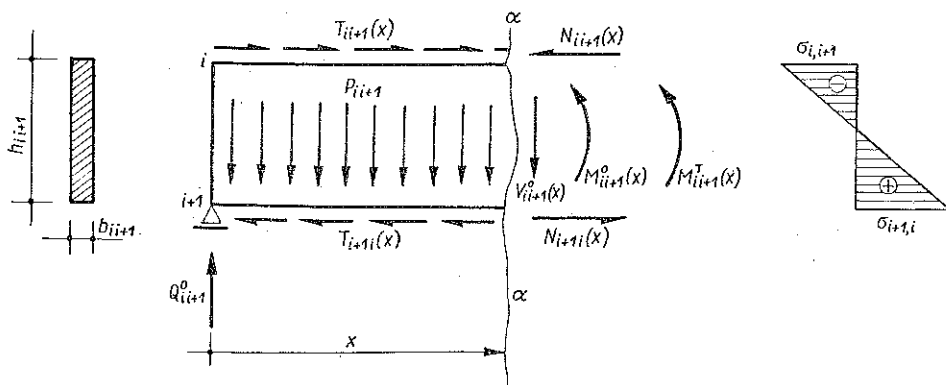
Wypadkowy moment tarczowy $M_{ii+1}^I(x)$ można więc określić w sposób następujący:

$$(2.10) \quad M_{ii+1}^I(x) = C_S(x) P_{ii+1} + \frac{h_{ii+1}}{2} (N_{ii+1}(x) + N_{i+1i}(x)).$$

Naprężenia występujące na krawędziach tarczy $(i, i+1)$ określone są wg elementarnej teorii belkowej wzorami

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{ii+1} &= -\frac{M_{ii+1}^r(x)}{W_{ii+1}} + \frac{N_{i+1i}(x) - N_{ii+1}(x)}{A_{ii+1}}, \\ \sigma_{i+1i} &= \frac{M_{ii+1}^r(x)}{W_{ii+1}} + \frac{N_{i+1i}(x) - N_{ii+1}(x)}{A_{ii+1}}, \quad i=0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Jako dodatnie uważa się naprężenia rozciągające, jako ujemne — ściskające.



Rys. 5

Podstawiając do równań (2.11)

$$W_{ii+1} = \frac{b_{ii+1} h_{ii+1}^2}{6}, \quad A_{ii+1} = b_{ii+1} h_{ii+1}$$

oraz biorąc pod uwagę wzór (2.10) otrzymamy

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{ii+1} &= C_S(x) \left[-\frac{6}{(bh^2)_{ii+1}} P_{ii+1} - \frac{4}{(bh)_{ii+1}} \frac{N_{ii+1}(x)}{C_S(x)} - \frac{2}{(bh)_{ii+1}} \frac{N_{i+1i}(x)}{C_S} \right], \\ \sigma_{i+1i} &= C_S(x) \left[\frac{6}{(bh^2)_{ii+1}} P_{ii+1} + \frac{2}{(bh)_{ii+1}} \frac{N_{ii+1}(x)}{C_S(x)} + \frac{4}{(bh)_{ii+1}} \frac{N_{i+1i}(x)}{C_S} \right]. \end{aligned}$$

Macierzowy zapis równań (2.12) dla dowolnej tarczy przedstawia się następująco:

$$(2.13) \quad \sigma = C_S(x) \left[S_0 P + S_N \frac{N(x)}{C_S(x)} \right],$$

gdzie S_0 i S_N stanowią macierze będące funkcjami szerokości b i wysokości h poszczególnych tarcz.

Macierz S_0 o wymiarach $2n \times n$ utworzona jest ze współczynników poprzedzających wielkości P we wzorach (2.12):

$$(2.14) \quad S_0 = \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{-6}{(bh^2)_{01}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{(bh^2)_{01}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6}{(bh^2)_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{(bh^2)_{12}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{-6}{(bh^2)_{n-1n}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{(bh^2)_{n-1n}} & 0 \end{array} \right]$$

Elementy macierzy S_N stanowią współczynniki poprzedzające wielkości $N(x)/C_S(x)$ w tych wzorach:

$$S_N = \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{-4}{(bh)_{01}} & \frac{-2}{(bh)_{01}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{(bh)_{01}} & \frac{4}{(bh)_{01}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{(bh)_{12}} & \frac{-2}{(bh)_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{(bh)_{12}} & \frac{4}{(bh)_{12}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{(bh)_{n-1n}} & \frac{-2}{(bh)_{n-1n}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{(bh)_{n-1n}} & \frac{4}{(bh)_{n-1n}} \end{array} \right]$$

Ponieważ warunek równowagi wymaga, aby w dowolnym przekroju poprzecznym układu tarczowego siły N , działające wzdłuż wspólnej krawędzi sąsiadujących elementów, były równe co do wartości bezwzględnej, a przeciwne co do zwrotu, przeto

$$(2.15) \quad \begin{aligned} N_{01}(x) &= 0, \\ N_{i i-1}(x) &= N_{i i+1}(x) = N_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ N_{n n-1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

i macierz S_N można zredukować do wymiarów $2n \times (n-1)$:

$$(2.16) \quad S_N = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{-2}{(bh)_{01}} & 0 & 0 \\ \frac{4}{(bh)_{01}} & 0 & 0 \\ \frac{-4}{(bh)_{12}} & \frac{-2}{(bh)_{12}} & 0 \\ \frac{2}{(bh)_{12}} & \frac{4}{(bh)_{12}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{-4}{(bh)_{n-1n}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{(bh)_{n-1n}} \end{array} \right].$$

Podstawmy do wzoru (2.13) wyrażenie (2.2):

$$(2.17) \quad \sigma = C_S(x) \left[S_0 B R^t + S_N \frac{N(x)}{C_S(x)} \right].$$

Jedyną nieznaną wielkością w równaniu (2.17) jest $N(x)$. Wielkość tę wyznaczymy z warunku przyjmowania wartości zera przez algebraiczną sumę podłużnych odkształceń każdej wewnętrznej krawędzi układu tarczowego zgodnie ze wzorem (2.4):

$$(2.18) \quad \varepsilon_{i i+1} - \varepsilon_{i i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Macierz podłużnych odkształceń krawędzi określa wzór

$$(2.19) \quad \varepsilon = \frac{1}{E} \sigma,$$

gdzie $1/E$ stanowi następującą macierz (o wymiarach $2n \times 2n$) dla tarczownicy składającej się z n tarcz:

$$(2.20) \quad \frac{1}{E} = \left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{1}{E_{01}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_{01}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_{12}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_{n-1n}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{E_{n-1n}} \end{array} \right].$$

Po wykorzystaniu wzoru (2.17), z równania (2.19) otrzymujemy

$$(2.21) \quad \varepsilon = C_S(x) \left[\frac{1}{E} S_0 B R^t + \frac{1}{E} S_N \frac{N(x)}{C_S(x)} \right].$$

Spełnienie warunku (2.18) uzyskujemy w wyniku obliczenia różnicy odpowiednich wierszy macierzy (2.21) lub w wyniku jej pomnożenia przez następującą macierz pomocniczą $P - c_1$ o wymiarach $(n-1) \times 2n$ (dla tarczownicy mającej n tarcz i $n-1$ wewnętrznych krawędzi):

$$(2.22) \quad P - c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

czyli

$$(2.23) \quad P - c_1 \varepsilon = 0.$$

Wprowadzając do równania (2.23)

$$(2.24) \quad P - c_1 \frac{1}{E} S_0 B = D_0, \quad P - c_1 \frac{1}{E} S_N = D_N,$$

otrzymujemy

$$(2.25) \quad D_0 R^t + D_N \frac{N(x)}{C_S(x)} = 0, \quad \frac{N(x)}{C_S(x)} = -D_N^{-1} D_0 R^t.$$

Podstawiając $N(x)/C_S(x)$ do równania (2.17) otrzymuje się końcowe związki pomiędzy podłużnymi naprężeniami normalnymi, występującymi na krawędziach poszczególnych tarcz, a zewnętrznymi obciążeniami krawędziowymi:

$$(2.26) \quad \sigma = C_S(x) [S_0 B - S_N D_N^{-1} D_0] R^t,$$

gdzie wyrażenie $S^t = S_0 B - S_N D_N^{-1} D_0$ nazywać będziemy macierzą naprężeń układu tarczowego. Jest ona funkcją zależną tylko od wymiarów i kształtu przekroju poprzecznego tarczownicy oraz od rodzaju materiału. Po wprowadzeniu tego oznaczenia znajdziemy

$$(2.27) \quad \sigma = C_S(x) S^t R^t.$$

W przypadku równych modułów sprężystości wszystkich płaskich elementów tarczownicy wielkości $N(x)$ wygodniej jest wyznaczyć z warunku (wynikającego z równania (2.5)):

$$(2.28) \quad \sigma_{ii+1} - \sigma_{ii-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

to znaczy

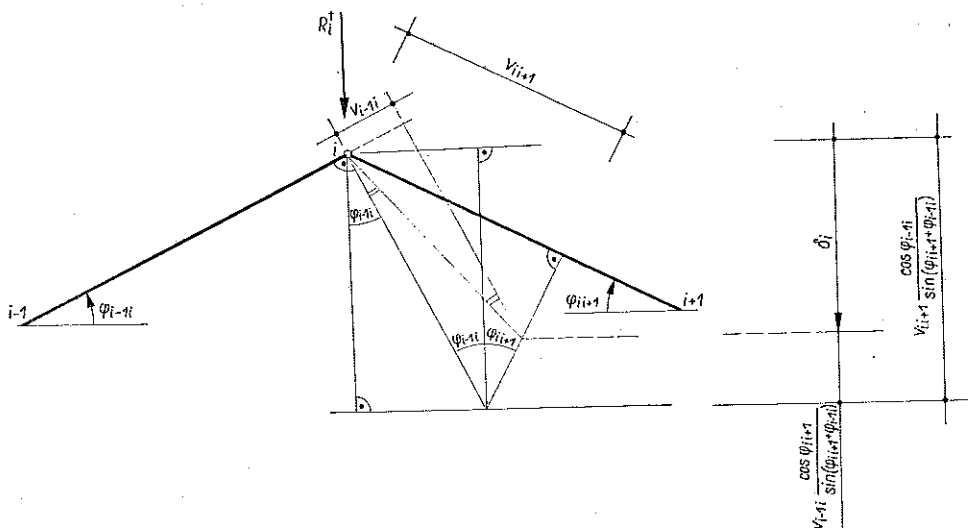
$$(2.29) \quad P - c_1 \sigma = 0,$$

w którym

$$(2.30) \quad D_0 = P - c_1 S_0 B, \quad D_N = P - c_1 S_N.$$

Przedmiotem dalszych rozważań jest wyznaczenie pionowych przemieszczeń δ krawędzi układu tarczowego obciążonego siłami R^t .

Pionowe przemieszczenie δ dowolnej wewnętrznej krawędzi może być wyrażone za pomocą przemieszczeń tarczowych v dwóch sąsiadujących tarcz (rys. 6). Prze-



Rys. 6

mieszczenia v są równoległe do tarcz i będą rozpatrywane jako dodatnie, gdy wywołane zostaną w kierunku 0, 1, ..., n :

$$(2.31) \quad \delta_i = \frac{\cos \varphi_{i-1i}}{\sin(\varphi_{ii+1} + \varphi_{i-1i})} v_{ii+1} - \frac{\cos \varphi_{ii+1}}{\sin(\varphi_{ii+1} + \varphi_{i-1i})} v_{i-1i}.$$

Wykorzystując wzory (2.1) oraz uwzględniając znaki przy wielkościach B_{ii+1} i B_{i-1i} otrzymamy

$$(2.32) \quad \delta_i = B_{ii+1} v_{ii+1} + B_{i-1i} v_{i-1i}.$$

Równanie powyższe odnosi się do każdej wewnętrznej krawędzi. Układ wszystkich równań w postaci macierzowej przedstawia się następująco:

$$(2.33) \quad \delta = Gv,$$

gdzie G oznacza macierz transformacji przemieszczeń i równa jest transponowanej macierzy B transformacji sił R^t :

$$(2.34) \quad G = B^T.$$

Przemieszczenie tarczowe $v_{ii+1}(x)$ (rys. 7) w danej odległości x od podpory (pomijając odkształcenia postaciowe) można wyznaczyć z zależności różniczkowej:

$$(2.35) \quad \frac{d^2 v_{ii+1}}{dx^2} = \frac{M_{ii+1}^t(x)}{E_{ii+1} I_{ii+1}^t}.$$

Po dwukrotnym scałkowaniu otrzymujemy

$$(2.36) \quad v_{i+1}(x) = C_v(x) \frac{M'_{i+1}(x)}{E_{i+1} I'_{i+1}},$$

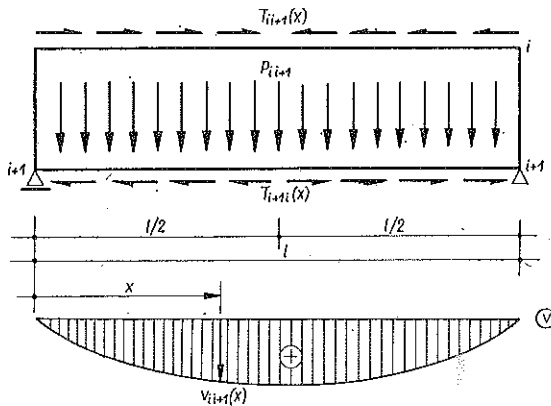
gdzie $C_v(x)$ oznacza współczynnik przemieszczenia tarczy, który jest zależny od rozmieszczenia obciążenia oraz od odległości x rozważanego przekroju od podpory,

$$I'_{i+1} = \frac{b_{i+1} h_{i+1}^3}{12}$$

i oznacza moment bezwładności tarczy $i, i+1$. Po wykorzystaniu powyższego wzoru oraz wzoru (2.10), z równania (2.36) otrzymujemy

$$(2.37) \quad v_{i+1}(x) = C_D(x) \left[\frac{12}{(bh^3E)_{i+1}} P_{i+1} + \frac{6}{(bh^2E)_{i+1}} \frac{N_{i+1}(x)}{C_S(x)} + \frac{6}{(bh^2E)_{i+1}} \frac{N_{i+1}(x)}{C_S(x)} \right],$$

gdzie $C_D(x) = C_v(x) C_S(x)$ oznacza współczynnik odkształcenia tarczy.



Rys. 7

Macierzowa postać równania (2.37) jest następująca:

$$(2.38) \quad v = C_D(x) \left[F_0 P + F_N \frac{N(x)}{C_S(x)} \right],$$

gdzie F_0 i F_N są macierzami zależnymi od wymiarów oraz modułu sprężystości Younga E każdej tarczy. Macierz F_0 o wymiarach $n \times n$ utworzona jest ze współczynników przy obciążeniu P (wzór 2.37):

$$(2.39) \quad F_0 = \begin{bmatrix} \frac{12}{(bh^3E)_{01}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{(bh^3E)_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{(bh^3E)_{23}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{12}{(bh^3E)_{n-1n}} \end{bmatrix}$$

Współczynniki poprzedzające wielkości $N(x)/C_S(x)$ tworzą macierz F_N o wymiarach $n \times (n-1)$ następującej postaci:

$$(2.40) \quad F_N = \begin{bmatrix} \frac{6}{(bh^2E)_{01}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{(bh^2E)_{12}} & \frac{6}{(bh^2E)_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{(bh^2E)_{23}} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{6}{(bh^2E)_{n-2 \ n-1}} & \frac{6}{(bh^2E)_{n-2 \ n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{(bh^2E)_{n-1 \ n}} \end{bmatrix}.$$

Po podstawieniu prawych stron wzorów (2.2) i (2.25)₂ do równania (2.38) otrzymano

$$(2.41) \quad v = C_D(x) [F_0 B - F_N D_N^{-1} D_0] R^t.$$

Kończącą postać zależności pomiędzy pionowymi przemieszczeniami krawędziowymi a obciążeniami przenoszonymi przez układ tarczowy można teraz zapisać w następujący sposób:

$$(2.42) \quad \delta = Gv = C_D(x) G [F_0 B - F_N D_N^{-1} D_0] R^t,$$

gdzie wyrażenie $G [F_0 B - F_N D_N^{-1} D_0] = F^t$ oznacza macierz odkształceń układu tarczowego i zależy tylko od wymiarów i kształtu przekroju poprzecznego tarczownicy oraz od rodzaju materiału. Tak więc

$$(2.43) \quad \delta = C_D(x) F^t R^t.$$

Stąd

$$(2.44) \quad R^t = C_D^{-1}(x) K^t \delta,$$

gdzie $K^t = (F^t)^{-1}$ stanowi macierz sztywności układu tarczowego.

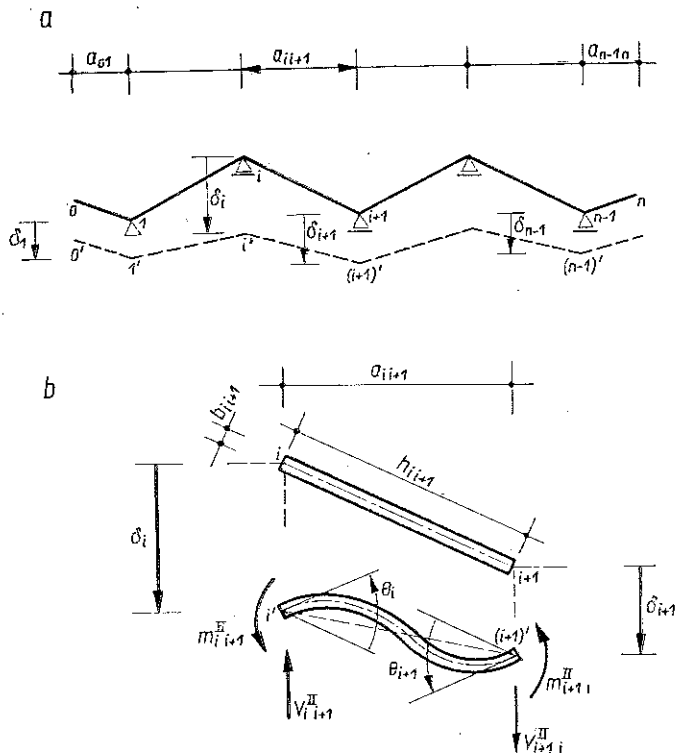
Podstawiając wyrażenie (2.44) do równania (2.27) podłużne naprężenia normalne σ występujące na krawędziach tarczy możemy wyrazić bezpośrednio za pomocą krawędziowych przemieszczeń pionowych δ :

$$(2.45) \quad \sigma = C_S(x) S^t K^t \delta.$$

3. UKŁAD PŁYTOWY

W układzie tarczowym, obciążonym siłami R^t , wyznaczono pionowe przemieszczenia krawędzi (2.43). Zachowanie ciągłości całego układu tarczownicy wymaga, aby w układzie płytowym w wyniku obciążenia R^p nastąpiło takie samo odkształcenie jak w układzie tarczowym. Dlatego też określone, na podstawie analizy układu tarczowego, przemieszczenia krawędziowe nakłada się na układ płytowy (rys. 8), w wyniku czego w układzie płytowym pojawiają się siły przekrojowe oraz reakcje podporowe. W celu wyznaczenia momentów poprzecznych i reakcji układu płytowego,

które będą stanowiły pionowe obciążenia krawędziowe R^p , rozważamy pasek płyty o jednostkowej szerokości wycięty w dowolnej odległości od przepony (rys. 8). Momenty poprzeczne w węzłach układu płytowego wyznacza się z równań odkształ-



Rys. 8

ceń kątowych (przyjmując jako dodatnie momenty lewoskrętne, jako ujemne — prawoskrętne):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} m_{ii+1}^{II} &= \left(\frac{2EI^p}{h} \right)_{ii+1} (2\theta_i + \theta_{i+1} - 3\psi_{ii+1}), \\ m_{i+1i}^{II} &= \left(\frac{2EI^p}{h} \right)_{ii+1} (\theta_i + 2\theta_{i+1} - 3\psi_{ii+1}), \end{aligned}$$

gdzie $I_{ii+1}^p = 1 \cdot b_{ii+1}^3 / 12$ oznacza moment bezwładności paska płyty, $\psi_{ii+1} = (\delta_i - \delta_{i+1}) / a_{ii+1}$ kąt obrotu tarczy, a_{ii+1} poziomy rzut h_{ii+1} , θ_i, θ_{i+1} kąty obrotu węzłów $i, i+1$ oraz

$$(3.2) \quad \begin{aligned} m_{ii+1}^{II} &= \left(\frac{b^3 E}{3h} \right)_{ii+1} \theta_i + \left(\frac{b^3 E}{6h} \right)_{ii+1} \theta_{i+1} - \left(\frac{b^3 E}{2ha} \right)_{ii+1} \delta_i + \left(\frac{b^3 E}{2ha} \right)_{ii+1} \delta_{i+1}, \\ m_{i+1i}^{II} &= \left(\frac{b^3 E}{6h} \right)_{ii+1} \theta_i + \left(\frac{b^3 E}{3h} \right)_{ii+1} \theta_{i+1} - \left(\frac{b^3 E}{2ha} \right)_{ii+1} \delta_i + \left(\frac{b^3 E}{2ha} \right)_{ii+1} \delta_{i+1}. \end{aligned}$$

Równania (3.2) sformułowane w sposób macierzowy mają postać:

$$(3.3) \quad m^{II} = K_\theta \theta + K_\delta \delta,$$

gdzie K_θ i K_δ są macierzami zależnymi od wymiarów paska płyty oraz modułu sprężystości E i charakteryzują poprzeczny moment płytowy powstający na brzegu tarczy w wyniku obrotu krawędzi oraz w wyniku przemieszczenia tarczy. W przyjętym schemacie obliczeniowym (rys. 8a) momenty węzłowe w skrajnych płaskich elementach tarczownicy są równe zero:

$$(3.4) \quad m_{01}^{\text{II}} = m_{10}^{\text{II}} = m_{n-1, n}^{\text{II}} = m_{n, n-1}^{\text{II}} = 0,$$

w związku z tym macierze K_θ i K_δ o wymiarach $2n \times (n-1)$ przedstawiają się następująco:

$$(3.5) \quad K_\theta = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{b^3 E}{3h}\right)_{12} & \left(\frac{b^3 E}{6h}\right)_{12} & 0 & 0 \\ \left(\frac{b^3 E}{6h}\right)_{12} & \left(\frac{b^3 E}{3h}\right)_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{b^3 E}{3h}\right)_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{b^3 E}{6h}\right)_{23} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \left(\frac{b^3 E}{3h}\right)_{n-2, n-1} & \left(\frac{b^3 E}{6h}\right)_{n-2, n-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{b^3 E}{3h}\right)_{n-2, n-1} & \left(\frac{b^3 E}{3h}\right)_{n-2, n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$(3.6) \quad K_\delta = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{-b^3 E}{2ha}\right)_{12} & \left(\frac{b^3 E}{2ha}\right)_{12} & 0 & 0 \\ \left(\frac{-b^3 E}{2ha}\right)_{12} & \left(\frac{b^3 E}{2ha}\right)_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-b^3 E}{2ha}\right)_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{-b^3 E}{2ha}\right)_{23} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \left(\frac{-b^3 E}{2ha}\right)_{n-2, n-1} & \left(\frac{b^3 E}{2ha}\right)_{n-2, n-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{-b^3 E}{2ha}\right)_{n-2, n-1} & \left(\frac{b^3 E}{2ha}\right)_{n-2, n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Kąty θ obrotu krawędzi można wyrazić za pomocą przemieszczeń krawędziowych δ wykorzystując fakt, że zgodnie z warunkami równowagi algebraiczna suma momentów na każdej wewnętrznej krawędzi musi równać się zeru. Spełnienie powyższego warunku uzyskamy mnożąc równanie (3.3) przez macierz pomocniczą $P - c_2$ o wymiarach $(n-1) \times 2n$:

$$(3.7) \quad P - c_2 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Otrzymamy wtedy

$$(3.8) \quad D_\theta \theta + D_\delta \delta = 0,$$

gdzie

$$(3.9) \quad D_\theta = P - c_2 K_\theta, \quad D_\delta = P - c_2 K_\delta.$$

Aby otrzymać zależność między momentami poprzecznymi na krawędziach tarcz a przemieszczeniami pionowymi tych krawędzi, należy równanie (3.8) rozwiązać ze względu na θ :

$$(3.10) \quad \theta = -D_\theta^{-1} D_\delta \delta$$

i wynik podstawić do równania (3.3):

$$(3.11) \quad m^{\text{II}} = [K_\delta - K_\theta D_\theta^{-1} D_\delta] \delta.$$

W równaniu (3.10) wyrażenie $S^p = K_\delta - K_\theta D_\theta^{-1} D_\delta$ oznacza macierz, którą będziemy nazywać macierzą momentową układu płytowego. Ostatecznie otrzymujemy więc

$$(3.12) \quad m^{\text{II}} = S^p \delta.$$

Znając poprzeczne momenty (3.12), działające na krawędziach poszczególnych tarcz, można określić obciążenia krawędziowe R^p (reakcje podpór) przenoszone przez układ płytowy:

$$(3.13) \quad R_i^p = \frac{m_{i-1i}^{\text{II}} + m_{it-1}^{\text{II}}}{a_{i-1i}} - \frac{m_{it+1}^{\text{II}} + m_{i+1i}^{\text{II}}}{a_{it+1}}.$$

Macierzowy zapis równania (3.13) jest następujący:

$$(3.14) \quad R^p = H m^{\text{II}},$$

gdzie H oznacza macierz o wymiarach $(n-1) \times 2n$, zależną od poziomych rozpiętości a poprzecznego układu płytowego:

$$(3.15) \quad H = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{01} & a_{01} & a_{12} & a_{12} & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & & a_{12} & a_{12} & a_{23} & a_{23} & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & & a_{n-2n-1} & a_{n-2n-1} \\ & & & & & & -1 & -1 \\ & & & & & & a_{n-1n} & a_{n-1n} \end{array} \right].$$

Podstawiając prawą stronę wzoru (3.12) do równania (3.14) otrzymujemy związek pomiędzy przemieszczeniami krawędziowymi a obciążeniami przenoszonymi przez układ płytowy:

$$(3.16) \quad R^p = HS^p \delta.$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$(3.17) \quad K^p = HS^p.$$

Macierz K^p nazywać będziemy macierzą sztywności układu płytowego. Z (3.16) znajdziemy

$$(3.18) \quad R^p = K^p \delta.$$

4. UKŁAD ZŁOŻONY TARCZOWO-PLYTOWY

4.1. Obciążenia harmoniczne

Jednym ze sposobów analizy układu złożonego, przedstawionego na rys. 1, jest zastąpienie danego układu pionowych sił krawędziowych R przez jego reprezentację Fouriera, tj. reprezentację harmoniczną. Krzywe R , v , m , δ dla obciążenia harmonicznego są tego samego kształtu. Przy obciążeniu harmonicznym, np. sinusoidalnym, poszczególne harmoniki analizowane są w podobny sposób, dlatego wystarczy omówić pierwszą z nich.

Odwolując się do równania (1.3) oraz do warunku równości przemieszczeń układu tarczowego i płytowego można napisać następujące równania spełnione w układzie złożonym:

$$(4.1) \quad R = K^p \delta + C_D^{-1}(x) K^t \delta,$$

w których macierze R^p i R^t są zastąpione przez odpowiednie iloczyny na podstawie wzorów (3.18) i (2.44). Mamy również

$$(4.2) \quad R = [K^p + C_D(x) K^t] \delta.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(4.3) \quad K = K^p + C_D^{-1}(x) K^t,$$

otrzymano

$$(4.4) \quad R = K \delta$$

oraz

$$(4.5) \quad \delta = FR,$$

gdzie

$$(4.6) \quad F = K^{-1}.$$

Macierz K oraz F nazywać będziemy odpowiednio macierzami sztywności i odkształceń złożonego układu poddanego obciążeniu harmonicznemu, a wielkości R i δ są macierzami maksymalnych rzędnych danej funkcji harmoniczej.

Aby więc dokonać analizy konstrukcji tarczownicy, na którą działa krawędziowe obciążenie harmoniczne R , posługujemy się równaniem (4.5) do obliczenia pionowych przemieszczeń krawędzi δ , następnie stosujemy odpowiednio równania (2.45) i (3.12) do obliczenia podłużnych naprężeń tarczowych σ i poprzecznych momentów płytowych m^H .

Algorytm obliczeń przy obciążeniu harmonicznym. W ogólnym przypadku tarczownica ma n tarcz, $(n-1)$ wewnętrznych krawędzi i jest poddana q różnym kombinacjom pionowych obciążeń krawędziowych.

W tabelicy 1 podano tok postępowania przy rozwiązywaniu tarczownicy obciążonej pierwszą harmoniką obciążenia harmonicznego.

Aby otrzymać wyniki dla drugiej, trzeciej itd. harmoniki, należy powtórzyć operacje oznaczone numerami od 37 do 44 z uwzględnieniem wartości $C_S(x)$, $C_D(x)$ i macierzy R odpowiadających poszczególnym harmonikom.

Macierze wejściowe (kroki 1-14) zależą tylko od wymiarów konstrukcji tarczownicowej oraz modułu sprężystości materiału, z którego konstrukcja jest wykonana.

Tablica 1

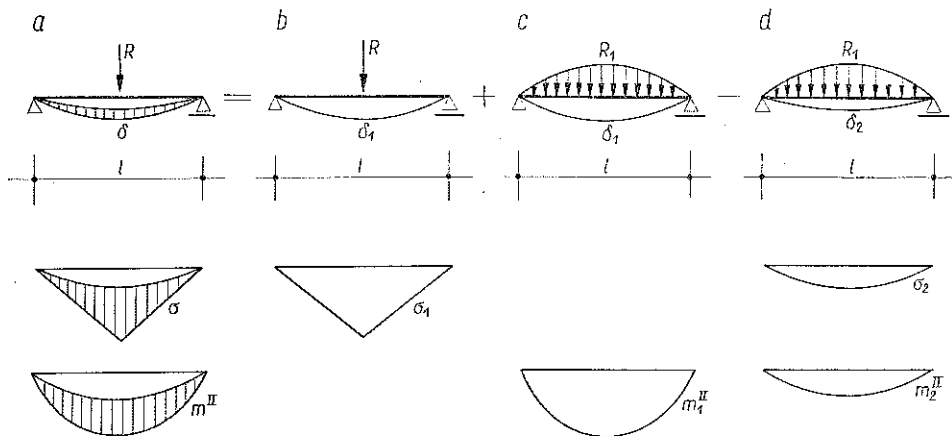
Nr kroku	Oznaczenia macierzy	Wymiary macierzy	Uwagi
1	2	3	4
1	B	$n \times (n-1)$	Dane wejściowe
2	S_0	$2n \times n$	
3	S_N	$2n \times (n-1)$	
4	$\frac{1}{E}$	$2n \times 2n$	
5	$P-c_1$	$(n-1) \times 2n$	
6	F_0	$n \times n$	
7	F_N	$n \times (n-1)$	
8	K_0	$2n \times (n-1)$	
9	K_δ	$2n \times (n-1)$	
10	$P-c_2$	$(n-1) \times 2n$	
11	H	$(n-1) \times 2n$	
12	$C_{SH}(x)$	Współczynnik naprężenia dla obciążenia harmonicznego	
13	$C_{DH}(x)$	Współczynnik odkształcenia dla obciążenia harmonicznego	
14	R	$(n-1) \times q$	
15	$S_0 B = S_0 B$	$2n \times (n-1)$	
16	$\frac{1}{E} S_0 B = \frac{1}{E} S_0 B$	$2n \times (n-1)$	
17	$\frac{1}{E} S_N = \frac{1}{E} S_N$	$2n \times (n-1)$	
18	$D_0 = P - c_1 \frac{1}{E} S_0 B$	$(n-1) \times (n-1)$	
19	$D_N = P - c_1 \frac{1}{E} S_N$	$(n-1) \times (n-1)$	

1	2	3	4
16a	$D_0 = P - c_1 S_0 B$	$(n-1) \times (n-1)$	Przy $E = \text{const}$ dla całej konstrukcji tarczownicowej zamiast kroków 16—19 wygodniej jest wprowadzić operacje 16a i 17a, po których następuje bezpośrednio krok 20
17a	$D_N = P - c_1 S_N$	$(n-1) \times (n-1)$	
20	$D_N^{-1} = (D_N)^{-1}$	$(n-1) \times (n-1)$	Macierz naprężeń układu tarczowego
21	$D_N^{-1} D_0 = D_N^{-1} D_0$	$(n-1) \times (n-1)$	
22	$S_N D_N^{-1} D_0 = S_N D_N^{-1} D_0$	$2n \times (n-1)$	
23	$S_t = S_0 B - S_N D_N^{-1} D_0$	$2n \times (n-1)$	
24	$F_0 B = F_0 B$	$n \times (n-1)$	
25	$F_N D_N^{-1} D_0 = F_N D_N^{-1} D_0$	$n \times (n-1)$	
26	$F_0 B - F_N D_N^{-1} D_0 = F_0 B -$ $- F_N D_N D_0^{-1}$	$n \times (n-1)$	
27	$G = B^T$	$(n-1) \times n$	
28	$F^t = G (F_0 B - F_N D_N^{-1} D_0)$	$(n-1) \times (n-1)$	
29	$K^t = (F^t)^{-1}$	$(n-1) \times (n-1)$	
30	$D_0 = P - c_2 K_\theta$	$(n-1) \times (n-1)$	Macierz sztywności układu tarczowego
31	$D_\delta = P - c_2 K_\delta$	$(n-1) \times (n-1)$	
32	$D_\theta^{-1} = (D_\theta)^{-1}$	$(n-1) \times (n-1)$	
33	$D_\theta^{-1} D_\delta = D_\theta^{-1} D_\delta$	$(n-1) \times (n-1)$	
34	$K_\theta D_\theta^{-1} D_\delta = K_\theta D_\theta^{-1} D_\delta$	$2n \times (n-1)$	
35	$S^p = K_\delta - K_\theta D_\theta^{-1} D_\delta$	$2n \times (n-1)$	
36	$K^p = H S^p$	$(n-1) \times (n-1)$	
37	$C_{DH}^{-1}(x) K^t = C_{DH}^{-1}(x) K^t$	$(n-1) \times (n-1)$	
38	$K = K^p + C_{DH}(x) K^t$	$(n-1) \times (n-1)$	
39	$F = K^{-1}$	$(n-1) \times (n-1)$	
40	$\delta = FR$	$(n-1) \times q$	Krawędziowe przemieszczenia pionowe
41	$m^{II} = S^p \delta$	$2n \times q$	Momenty poprzeczne z etapu drugiego
42	$C_{SH}(x) S^t = C_{SH}(x) S^t$	$2n \times (n-1)$	Podłużne naprężenia normalne
43	$C_{SH}(x) S^t C_{DH}^{-1}(x) K^t = C_{SH}(x) S^t \times$ $\times C_{DH}^{-1}(x) K^t$	$2n \times (n-1)$	
44	$\sigma = C_{SH}(x) S^t C_{DH}^{-1}(x) K^t \delta$	$2n \times q$	

4.2. Obciążenia nieharmoniczne

Omówioną poprzednio metodę (dla obciążenia harmonicznego) zasadniczo można zastosować przy dowolnym obciążeniu z tym zastrzeżeniem, że w pewnych przypadkach konieczne jest uwzględnienie większej ilości harmonik do przedstawienia obciążenia.

Dla uproszczenia rozważań, zamiast ilustracji analogicznego postępowania, jakie ma miejsce w przypadku konstrukcji tarczownicowej, weźmy pod uwagę belkę (rys. 9). Obciążenie pokazane na rys. 9 (w naszym przypadku układ skupionych pionowych sił krawędziowych) otrzymane jest przez superpozycję obciążeń pokazanych na rys. 9b, c, d. Na rys. 9b przyjęto, że całkowite obciążenie R jest przenoszone przez układ tarczowy, pracujący jako konstrukcja błonowa (bezmomentowa). Oblicza się więc tylko podłużne naprężenia normalne σ_1 i pionowe przemieszczenia krawędzi δ_1 .



Rys. 9

Krzywa przemieszczenia z rys. 9b może być określona przez pierwszą harmonikę sinusoidy. Narzucając te przemieszczenia układowi płytowemu (rys. 9c) otrzymuje się harmoniczne obciążenie R_1 i poprzeczne momenty płytowe m_1^H . Na rys. 9d harmoniczne obciążenie R_1 odniesiono do złożonego układu tarczowo-płtowego i obliczono σ_2, m_2^H i δ_2 (wg metody podanej w rozkładzie o obciążeniu harmonicznym). Końcowe wartości przedstawione na rys. 9a otrzymano w wyniku następującej superpozycji:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} R &= R + R_1 - R_1, & \sigma &= \sigma_1 - \sigma_2, \\ m^H &= m_1^H - m_2^H, & \delta &= \delta_1 - \delta_2. \end{aligned}$$

Wniosek wynikający z powyższego rozważania jest następujący: tylko krzywe odkształcenia pochodzące od danego obciążenia, a nie samo obciążenie, muszą być przedstawione w postaci harmonicznej.

Algorytm obliczeń przy obciążeniu nieharmonicznym. Kroki 1-39 są takie jak poprzednio z wyjątkiem kroków 12 i 13, gdzie wprowadzić należy dodatkowo odpowiednią stałą naprężenia $C_{SNH}(x)$ i odkształcenia $C_{DNH}(x)$.

Dla tarczownicy swobodnie podpartej stałe te wynoszą: stała harmoniczna $C_{SH}(l/2) = l^2/\pi^2$; stała nieharmoniczna dla obciążenia skupionego w połowie rozpiętości $C_{SNH}(l/2) = l/4$, dla obciążenia równomiernie rozłożonego $C_{SNH}(l/2) = l^2/8$. Dla tarczownicy swobodnie podpartej stałe powyższe wynoszą: stała harmoniczna

$C_{DH} (l/2) = l^4/\pi^4$; stała nieharmoniczna dla obciążenia skupionego w połowie rozpiętości $C_{DNH} (l/2) = l^3/48$; dla obciążenia równomiernie rozłożonego $C_{DNH} (l/2) = 5l^4/384$. Po kroku 39 powinny być wykonane następujące działania:

Tablica 2

1	2	3	4
40	$C_{SNH} (x) S^t = C_{SNH} (x) S^t$	$2n \times (n-1)$	Podłużne naprężenia, układ tarczowy
41	$\sigma_1 = C_{SNH} (x) S^t R$	$2n \times q$	
42	$C_{DNH} (x) F^t = C_{DNH} (x) F^t$	$(n-1) \times (n-1)$	Krawędziowe przemieszczenia pionowe, układ tarczowy
43	$\delta_1 = C_{DNH} (x) F^t R$	$(n-1) \times q$	
44	$R_1 = K^o \delta_1$	$(n-1) \times q$	Podłużne naprężenia normalne Krawędziowe przemieszczenia pionowe Momenty poprzeczne — etap II
45	$\delta_2 = FR_1$	$(n-1) \times q$	
46	$C_{SH} (x) S^t = C_{SH} (x) S^t$	$2n \times q$	
47	$C_{SH} (x) S^t C_{DH}^{-1} (x) K^t =$ $= C_{SH} (x) S^t C_{DH}^{-1} (x) K^t$	$2n \times (n-1)$	
48	$\sigma_2 = C_{SH} (x) S^t C_{DH}^{-1} (x) K^t \delta_2$	$2n \times q$	
49	$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$	$2n \times q$	
50	$\delta = \delta_1 - \delta_2$	$(n-1) \times q$	
51	$m^{II} = S^o \delta$	$2n \times q$	

Aby określić momenty poprzeczne, występujące w konstrukcji tarczowniczej poddanej danemu obciążeniu, wielkości m^{II} (p. 4.1) należy odpowiednio dodać do wielkości m^I uzyskanych w I etapie obliczeń.

Posługując się omówionymi metodami (obciążenie harmoniczne i obciążenie nieharmoniczne) można wyznaczyć naprężenia podłużne, momenty poprzeczne i pionowe przemieszczenia krawędzi w dowolnym przekroju. Dzięki temu, że wszystkie macierze (z wyjątkiem macierzy obciążeń) są funkcjami tylko wymiarów tarczownicy oraz modułu sprężystości materiału, zmiana przekroju wpływa jedynie na zmianę współczynników naprężenia $C_S(x)$ i odkształcenia $C_D(x)$

5. PRZYKŁAD

5.1. Wstęp

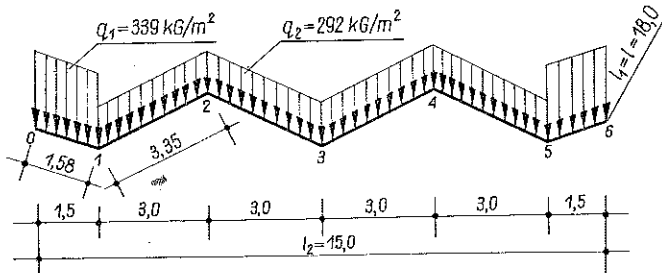
Sposób posługiwania się omówioną metodą ilustruje przykład obliczania podłużnych naprężeń normalnych, poprzecznych momentów zginających oraz pionowych przemieszczeń krawędzi. Wielkości powyższe określono dla przekroju położonego w połowie rozpiętości tarczownicy.

Przyjęto schemat konstrukcji jak na rys. 10. Jest to tarczownica jednoprzęsłowa, wielofalowa, długa (stosunek $l_1/l_2 > 1$), składająca się z 6 tarcz (01, 12, ..., 56). Taka sama tarczownica była analizowana w artykule J. PIETRZAKA i K. WRZEŚNIEWSKIEGO [5].

Dane wejściowe do obliczeń zestawiono w tablicy 3.

Tablica 3

Kra- wędz	Ele- ment	Wysokość h	Gru- bość b	Rzut poziomy a	Kąt nachyle- nia elementu do poziomu φ	$\cos \varphi$	Kąt między sąsiednimi elementami γ	$\sin \gamma$
		m	m	m	stopnie		stopnie	
0								
1	01	1,58	0,125	1,50	$-18^{\circ}25'$	0,950	$44^{\circ}59'$	0,707
	12	3,35	0,100	3,00	$26^{\circ}34'$	0,895		
2	23	3,35	0,100	3,00	$-26^{\circ}34'$	0,895	$-53^{\circ}08'$	$-0,800$
	3						$53^{\circ}08'$	0,800



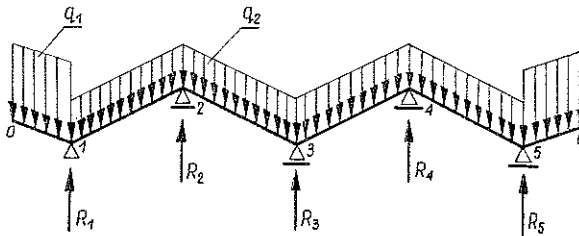
Rys. 10

Obciążenie zewnętrzne działające na m^2 powierzchni konstrukcji: $q'_1 = 322,0$ kG/m^2 , $q'_2 = 262,0$ kG/m^2 .

Obciążenie zewnętrzne działające na m^2 rzutu poziomego konstrukcji: $q_1 = 339$ kG/m^2 , $q_2 = 292$ kG/m^2 .

5.2. Etap I

Obciążenie zewnętrzne ($q_1 = 339$ kG/m^2 , $q_2 = 292$ kG/m^2) wywołuje w fikcyjnych podporach układu płytowego reakcje o wartościach (rys. 11): $R_1 = R_5 = 1018,5$ kG/m , $R_2 = R_4 = 778,7$ kG/m , $R_3 = 927,6$ kG/m



Rys. 11

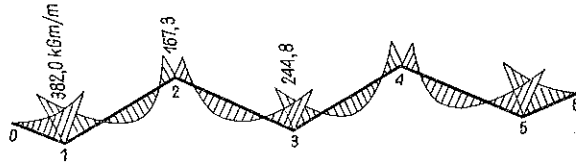
oraz momenty poprzeczne krawędziowe (rys. 12):

$$m_{10}^I = m_{12}^I = m_{34}^I = m_{56}^I = -382 \text{ kGm/m},$$

$$m_{21}^I = m_{23}^I = m_{43}^I = m_{45}^I = -167,3 \text{ kGm/m},$$

$$m_{32}^I = m_{34}^I = -244,8 \text{ kGm/m}.$$

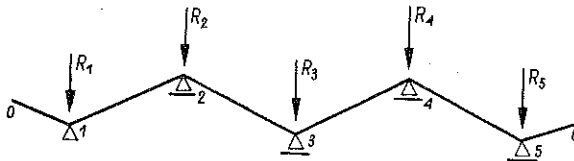
Układ tarczowy jest nieobciążony, więc podłużne naprężenia oraz pionowe przemieszczenia krawędzi równają się zeru.



Rys. 12

5.3. Etap II

Aby zredukować działanie reakcji fikcyjnych podpór, obciążamy konstrukcję siłami o przeciwnych zwrotach a tych samych wartościach (rys. 13).



Rys. 13

Macierze wejściowe do obliczeń. Macierz B wg wzoru (2.3.) oraz (2.1)

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\cos 26^{\circ}34'}{\sin 44^{\circ}59'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\cos(-18^{\circ}25')}{\sin(-44^{\circ}69')} & \frac{\cos(-26^{\circ}34')}{\sin(-53^{\circ}08')} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos 26^{\circ}34'}{\sin 53^{\circ}08'} & \frac{\cos 26^{\circ}34'}{\sin 53^{\circ}08'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\cos(-26^{\circ}34')}{\sin(-53^{\circ}08')} & \frac{\cos(-26^{\circ}34')}{\sin(-53^{\circ}08')} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cos 26^{\circ}34'}{\sin 53^{\circ}08'} & \frac{\cos 18^{\circ}25'}{\sin 44^{\circ}59'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos(-26^{\circ}34')}{\sin(-44^{\circ}59')} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,26526 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,34217 & -1,11797 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,11797 & 1,11797 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,11797 & -1,11797 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,11797 & 1,34217 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,26526 \end{bmatrix}$$

Macierz S_0 wg wzoru (2.14)

$$S_0 = \begin{bmatrix} -19,22769 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19,22769 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,34640 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,34640 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5,34640 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5,34640 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5,34640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,34640 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,34640 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5,34640 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -19,22769 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19,22769 \end{bmatrix}$$

Macierz S_N wg wzoru (2.16)

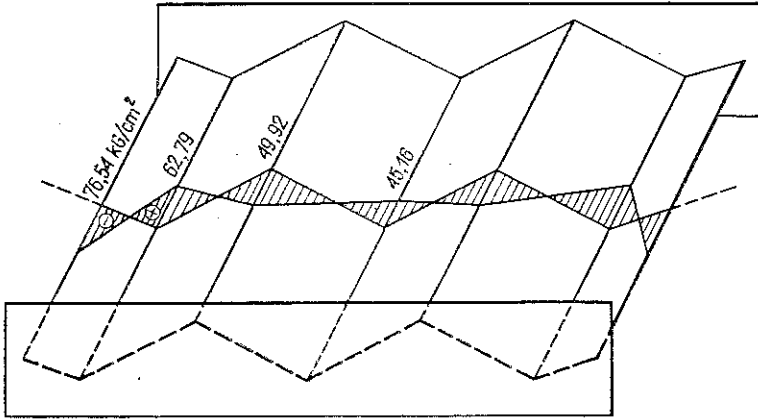
$$S_N = \begin{bmatrix} -10,12658 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20,25316 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -11,94029 & -5,97015 & 0 & 0 & 0 \\ 5,97015 & 11,94029 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11,94029 & -5,97015 & 0 & 0 \\ 0 & 5,97015 & 11,94029 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11,94029 & -5,97015 & 0 \\ 0 & 0 & 5,97015 & 11,94029 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -11,94029 & -5,97015 \\ 0 & 0 & 0 & 5,97015 & 11,94029 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -20,25316 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10,12658 \end{bmatrix}$$

Macierz $P - c_1$ wg wzoru (2.22)

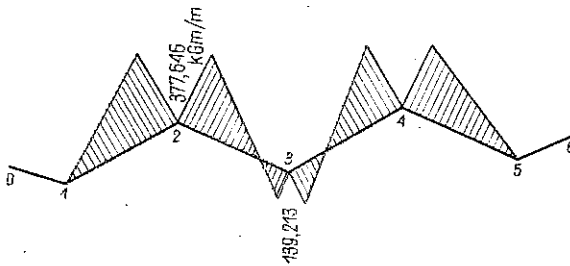
$$P - c_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierz F_0 wg wzoru (2.39)

$$F_0 = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 24,33885 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,19188 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,19188 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,19188 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3,19888 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24,3885 \end{bmatrix}$$



Rys. 14



Rys. 15

Macierz H w g wzoru (3.15)

$$H = \begin{bmatrix} 0,666667 & 0,666667 & -0,333333 & -0,333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,333333 & 0,333333 & -0,333333 & -0,333333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,333333 & 0,333333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,333333 & -0,333333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,333333 & 0,333333 & -0,333333 & -0,333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,333333 & 0,333333 & -0,666667 & -0,666667 \end{bmatrix}$$

Współczynniki naprężenia i odkształcenia dla $x=l/2$

$$C_{SH} = \frac{l^2}{\pi^2} = \frac{18,0^2}{3,14^2} = 32,86137,$$

$$C_{SNH} = \frac{l^2}{8} = \frac{18,0^2}{8} = 40,500,$$

$$C_{DH} = \frac{l^4}{\pi^4} = \frac{18,0^4}{3,14^4} = 1079,86964,$$

$$C_{DNH} = \frac{5l^4}{384} = \frac{5 \cdot 18,0^4}{384} = 1366,875.$$

Macierz obciążenia

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1018,5 \\ 778,7 \\ 927,6 \\ 778,7 \\ 1018,5 \end{bmatrix} \text{ [kG/m]}.$$

Obliczenia. Obliczenia przeprowadzono wg algorytmu podanego w p. 4.2. Wyniki obliczeń macierzy są następujące:

Podłużne naprężenia normalne w połowie rozpiętości (rys. 14):

$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \begin{bmatrix} -765377,166 \\ 627878,026 \\ 627878,026 \\ -499188,464 \\ -499188,464 \\ 451561,316 \\ 451561,316 \\ -499188,464 \\ -499188,464 \\ 627878,026 \\ 627878,026 \\ -765377,166 \end{bmatrix} \text{ [kG/m}^2\text{]} = \begin{bmatrix} -76,54 \\ 62,79 \\ 62,79 \\ -49,92 \\ -49,92 \\ 45,16 \\ 45,16 \\ -49,92 \\ -49,92 \\ 62,79 \\ 62,79 \\ -76,54 \end{bmatrix} \text{ [kG/cm}^2\text{]}.$$

Pionowe przemieszczenia krawędzi w połowie rozpiętości

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 52962000 \\ 23403100 \\ 21408800 \\ 23403100 \\ 51962000 \end{bmatrix} \text{ [m]}.$$

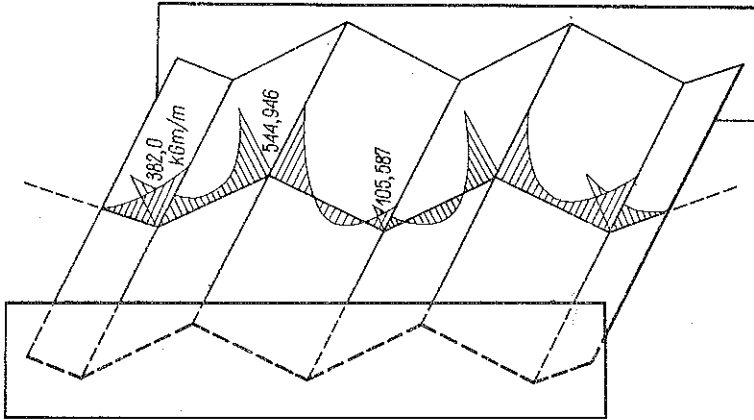
Uwaga. Współczynnik sprężystości E należy wyrazić w kG/m^2 .

Momenty poprzeczne w połowie rozpiętości, etap II (rys. 15):

$$m^{\text{II}} = S_p \delta = \begin{bmatrix} 000,000 \\ 000,000 \\ 000,000 \\ -377,646 \\ 377,646 \\ 139,213 \\ -139,213 \\ -377,646 \\ 377,646 \\ 000,000 \\ 000,000 \\ 000,000 \end{bmatrix} \text{ [kGm/m]}.$$

Momenty poprzeczne krawędziowe w połowie rozpiętości (uzgodniono różne znakowanie momentów w etapie I i II, jako dodatnie przyjęto momenty rozciągające dolne włókna):

$$m = m^I + m^{II} = \begin{matrix} 0,000 \\ -382,000 \\ -382,000 \\ -544,946 \\ -544,946 \\ -105,587 \\ -105,587 \\ -544,946 \\ -544,946 \\ -382,000 \\ -382,000 \\ 0,000 \end{matrix} \quad [\text{kGm/m}].$$



Rys. 16

Dla porównania wyników podaje się wartości podłużnych naprężeń normalnych (w kG/cm^2) uzyskanych przy obliczaniu omawianej konstrukcji tarczownicowej (publikacja [5]) różnymi metodami:

Tablica 4

Krawędzie	Metoda sił	Metoda Gaafara	Metoda szczególnych obciążeń Yitzhakięgo	Metoda bezpośrednia (przedstawiona w pracy)
0	-76,03	-76,56	-75,92	-76,54
1	62,48	62,63	62,45	62,79
2	-49,72	-49,72	-49,72	-49,92
3	44,99	45,01	44,97	45,16

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. CRAEMER, *Theorie der Faltwerke*, Beton und Eisen, 29, 1930.
2. G. EHLERS, *Die Spannungsermittlung in Flaechentragwerken*, Beton und Eisen, 29, 1930.
3. G. POWELL, *Comparison of simplified theories for folded plates*, J. Struct. Div., Proc. of the ASCE, December 1965.
4. A. C. SCORDELIS, *Matrix formulation of the folded plate equations*, J. Struct. Div., Proc. of the ASCE, October 1960.
5. J. PIETRZAK, K. WRZEŚNIEWSKI, *Charakterystyka niektórych metod obliczania tarczownic pryzmatycznych*, Arch. Inżyn. Łąd., 13, 2, 237-255, 1967.

Резюме

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СКЛАДЧАТОГО ПЕРЕКРЫТИЯ

В настоящей работе описывается непосредственный метод исчисления призматических складчатых свободно опертых перекрытий. Обсуждаемый метод, предложенный Скорделисом [4], благодаря матричной записи может иметь применение в конструктивном анализе с помощью ЦВМ. Приводится пример.

SUMMARY

MATRIX EQUATIONS OF THE FOLDED PLATE

In the paper a direct method of calculation of prismatic, simply supported folded plate structures is described. The method discussed was originally proposed by Scordelis [4], and due to matrix formulation it can be used to the structural analysis with the use of digital computers.

A numerical example is given in the paper.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 lutego 1971 r.
