

WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ WZDŁUŻ OSI SYMETRII  
W ZAGADNIENIU IZOMETRYCZNYM  
NA PODSTAWIE  
ELASTOOPTYCZNEGO OBRAZU IZOCHROM

RYSZARD WOJNAR (WARSZAWA)

1. Wyznaczenie stanu naprężenia w dwuwymiarowym ośrodku sprężystym na podstawie obrazu elastooptycznego samych izochrom wymaga numerycznego rozwiązania układu dwu równań różniczkowych cząstkowych [1 i 2]. W szczególności w celu określenia naprężenia w danym punkcie  $P$  ośrodka należy rozwiązać te równania przynajmniej na całej powierzchni krzywoliniowego trójkąta, którego dwa boki są identyczne z nawzajem ortogonalnymi charakterystykami układu przecinającymi się w punkcie  $P$ , a bok trzeci pokrywa się z brzegiem obszaru.

Jeśli badany ośrodek posiada oś symetrii, to dla znalezienia naprężenia na tej osi nie ma potrzeby rozwiązywania zagadnienia powierzchniowego, lecz wystarczy rozwiązanie zwyczajnego równania różniczkowego [3] <sup>(1)</sup> z nieznaną funkcją  $\beta$ :

$$(1) \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\beta^2}{m} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} \right),$$

przy czym oś  $x$  prostokątnego układu współrzędnych  $xy$  pokrywa się z osią symetrii, funkcja  $m(x, y)$  jest wyznaczona na podstawie obrazu izochrom za pomocą różnicy naprężeń głównych

$$m = \sigma_1 - \sigma_2,$$

oraz

$$\beta = \partial \tau_{xy} / \partial y.$$

Proste wyprowadzenie tego równania zamieszczone jest w dodatku 2.

Zatem szukana składowa naprężenia zostaje wyznaczona przez scałkowanie różniczkowego równania równowagi:

$$(2) \quad \sigma_x = \sigma_{x_0} - \int_{x_0}^x \beta dx.$$

Numeryczne rozwiązanie równania (1) ze względu na jego nieliniowość i małą dokładność znajdujących graficznie lub numerycznie drugich pochodnych cząstkowych funkcji  $m$  jest trudne i może prowadzić do nieprawidłowej postaci funkcji  $\beta$ .

<sup>(1)</sup> Metoda podana wcześniej w [4] jest na ogół nieodpowiednia, gdyż korzysta z przybliżonego założenia (patrz dodatek 1).

2. Poniżej wykażę, że można uniknąć rozwiązywania równania (1), gdy trajektorie naprężeń głównych  $\xi(x, y) = \text{const}$ ,  $\eta(x, y) = \text{const}$  odpowiadające naprężeniom głównym  $\sigma_1(x, y)$ ,  $\sigma_2(x, y)$  stanowią w całym rozważanym obszarze izometryczną siatkę krzywych, tzn. gdy zachodzi tożsamość

$$(3) \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \equiv h^2.$$

Jeśli ma miejsce tożsamość (3), a oś  $x$  układu współrzędnych jest osią symetrii, to naprężenie panujące na brzegu swobodnym daje się przedstawić w postaci [5]

$$(4) \quad \sigma_1 = \frac{C}{A(x^2 + y^2) + Bx + D}$$

lub po odpowiednim przekształceniu układu współrzędnych

$$(5) \quad \sigma_1 = \frac{c}{ar^2 + b}, \quad r^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2, \quad \tilde{x} = \tilde{x}(x, y), \quad \tilde{y} = \tilde{y}(x, y).$$

Współczynniki  $A, B, C, D, a$  i  $b$  są pewnymi stałymi.

Ponadto z rozwiązania, które podał THEOCARIS [6], wynika obowiązujący w całym obszarze warunek na różnicę naprężeń głównych:

$$(6) \quad m = -[A(x^2 + y^2) + Bx + D] h^2.$$

Stąd

$$(7) \quad \frac{m}{h^2} = -[A(x^2 + y^2) + Bx + D]$$

oraz

$$(8) \quad h^2 = \frac{-m}{A(x^2 + y^2) + Bx + D}.$$

Jednocześnie przedstawimy równania Lamégo-Maxwella w postaci [6]

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial \xi} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{h} \frac{\partial h}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial \eta} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0,$$

lub po podstawieniu

$$2p = \sigma_1 + \sigma_2$$

w postaci

$$(9) \quad \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} h^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{m}{h^2} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{m}{h^2} \right).$$

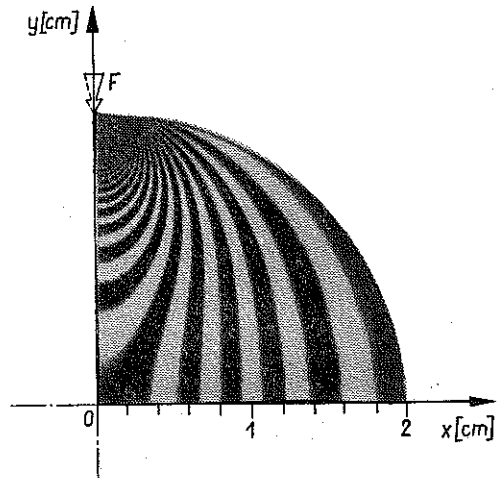
Na osi symetrii  $\xi = x$  mamy  $y = 0$ . Zatem po scałkowaniu pierwszego z równań (9) z uwzględnieniem (7) i (8) otrzymujemy

$$(10) \quad p = p_0 - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x \frac{m}{Ax^2 + Bx + D} \frac{\partial}{\partial x} (Ax^2 + Bx + D) dx = \\ = p_0 - \frac{1}{2} \int_{x_0}^x m \frac{2Ax + B}{Ax^2 + Bx + D} dx.$$

Stałą  $p_0$  znajdujemy na podstawie wartości naprężenia brzegowego znanej z obrazu izochrom; na brzegu swobodnym, ze względu na znikanie naprężenia głównego prostopadłego do brzegu,  $\sigma_2 = 0$ , różnica naprężeń brzegowych równa się tożsamościowo ich sumie oraz pozostałemu naprężeniu brzegowemu:  $m = 2p = \sigma_1$ .

Również współczynniki  $A$ ,  $B$  i  $D$  wyznaczamy dopasowując do doświadczalnego przebiegu naprężenia brzegowego przebieg postulowany w równaniu (4). Na potrzebę takiego porównania obu przebiegów zwrócił uwagę już NEUBER [5]. Ponieważ zgodnie z pracą [6] spełnienie przez naprężenia brzegowe równości (4) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym izometrii trajektorii naprężeń głównych, przeto możliwość dobrania takich  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ , po wstawieniu których (4) opisywałyby naprężenia brzegowe w danym problemie, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym stosowalności proponowanej metody.

3. Dla przykładu znajdziemy na podstawie obrazu izochrom w tarczy kołowej ściskanej wzdłuż średnicy — naprężenia na osi symetrii prostopadłej do kierunku działania siły zewnętrznej. Izochromy całkowitego rzędu w takiej tarczy pokazuje rys. 1 (wg FROCHTA [7]). Promień tarczy  $R = 2$  cm, jej grubość  $t = 0,5$  cm, siła ściskająca  $F = 123,5$  kG, elastooptyczna stała modelowa  $K = 31,2$  kG/cm.



Rys. 1

Z rys. 1 widać, że na brzegu spełnione są warunki  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ . Dlatego na podstawie (6) mamy na brzegu

$$(11) \quad A(x^2 + y^2) + Bx + D = 0.$$

Ze względu na symetrię problemu nie tylko względem osi  $x$  lecz również względem osi  $y$  spełniony jest również warunek  $B = 0$  i z równania (11) znajdujemy  $D = -AR^2$ . Zatem na osi symetrii  $y = 0$  mamy

$$Ax^2 + D = -A(R^2 - x^2).$$

Po skorzystaniu z tej równości otrzymujemy zgodnie z (10)

$$p = p_0 + \int_{x_0}^x \frac{mx}{R^2 - x^2} dx.$$

Całkowanie numeryczne przeprowadzamy metodą trapezów z krokiem  $\Delta x = (1/5)$  cm, posuwając się wzdłuż promienia od środka koła ku jego obwodowi:

$$p_i = p_0 + \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{i-1} + \frac{1}{2} f_i \right),$$

gdzie

$$f_i = \frac{m_i x_i}{R^2 - x_i^2}$$

Wyniki całkowania uwidocznione są w tabelicy 1. Celem wyznaczenia wartości granicznej funkcji podcałkowej w punkcie  $x=R=2$  cm przeprowadziliśmy graficznie jej ekstrapolację (rys. 2). Stałą całkowania  $p_0$  wyznacza znany z obrazu izochrom warunek brzegowy

$$[p(x)]_{x=R} = 0,$$

to znaczy

$$p_0 = -\frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_9 + \frac{1}{2} f_{10} \right),$$

skąd

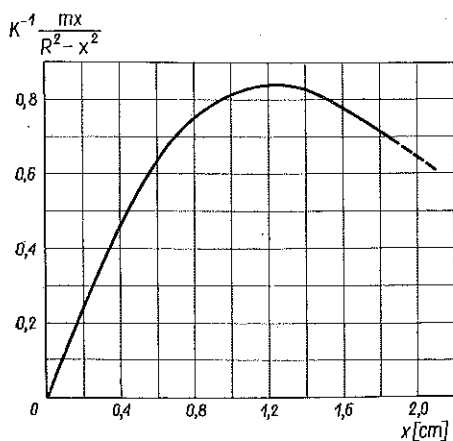
$$K^{-1} p_0 = -\frac{1}{5} \cdot 6,3869 = -1,277.$$

Na rys. 3 porównaliśmy uzyskane w powyższy sposób rozwiązanie (linia ciągła) z rozwiązaniem teoretycznym

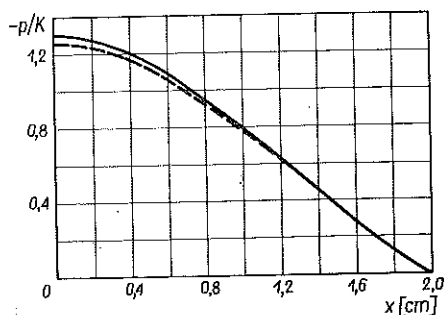
$$p = \frac{-F}{\pi t R} \frac{R^2 - x^2}{R^2 + x^2}$$

(linia przerywana). Różnice obu rozwiązań nie przekraczają 2%, co świadczy o przydatności zaproponowanej metody.

4. Widzimy więc, że dla zagadnień z izometrycznymi trajektoriami naprężeń głównych możliwe jest znaczne uproszczenie procedury wyznaczania naprężeń na



Rys. 2



Rys. 3

osi symetrii. Funkcja podcałkowa w równaniu (10) będąca odpowiednikiem funkcji  $\beta$  w równaniu (2) może być znaleziona za pomocą elementarnych działań algebraicznych. Podana metoda powinna w szczególności znaleźć zastosowanie do opracowywania badań elastooptycznych niezbyt głębokich korbów (por. pracę [5]).

Tablica 1

$i$	$x_i$ [cm]	$m_i/K$	$f_i/K = \frac{m_i x_i}{R^2 - x_i^2} K^{-1}$ $R=2$	$5(p_i - p_0)/K$	$p_i/K$
0	0	5,2	0	0	-1,277
1	0,2	4,9	0,2474	0,1237	-1,253
2	0,4	4,5	0,4689	0,4818	-1,181
3	0,6	3,8	0,6262	1,0294	-1,072
4	0,8	3,2	0,7619	1,7235	-0,933
5	1,0	2,4	0,7999	2,5044	-0,777
6	1,2	1,8	0,8438	3,3262	-0,612
7	1,4	1,2	0,8236	4,1599	-0,445
8	1,6	0,7	0,7778	4,9606	-0,285
9	1,8	0,3	0,7105	5,7047	-0,136
10	1,9	0,14	0,6821		
	2,0	0	0,65 *	6,3869	0

(\*) Wartość z ekstrapolacji

## DODATEK 1

Oznaczmy kąt utworzony przez normalną  $n$  do izochromy z osią  $x$  przez  $\theta$ . Kąt utworzony przez styczną do trajektorii naprężeń głównych  $\xi$  z tą osią wynosi  $\varphi$  (rys. 4).

CHRISTODOULIDES wykazał, że pochodna funkcji  $\varphi$  wzdłuż łuku izochromy  $s$  jest identyczna z pochodną wzdłuż trajektorii naprężeń głównych  $\eta$ :

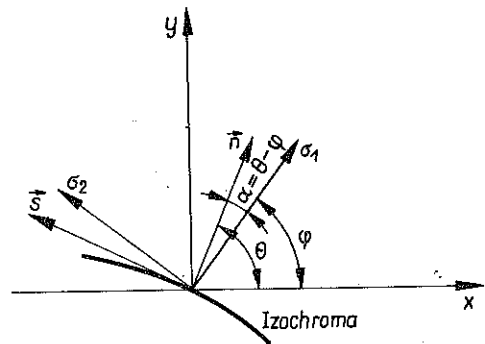
$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

W dalszym wywodzie skorzystał jednak z nieprawdziwego na ogół wzoru

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

wskutek czego wynikł mylny wniosek, że w każdym punkcie osi symetrii trajektorie naprężeń głównych ma tę samą krzywiznę, co izochroma przechodząca

przez ten punkt. Stwierdzenie to było podstawą zaproponowanej przez niego metody. Tymczasem (por. rys. 4)



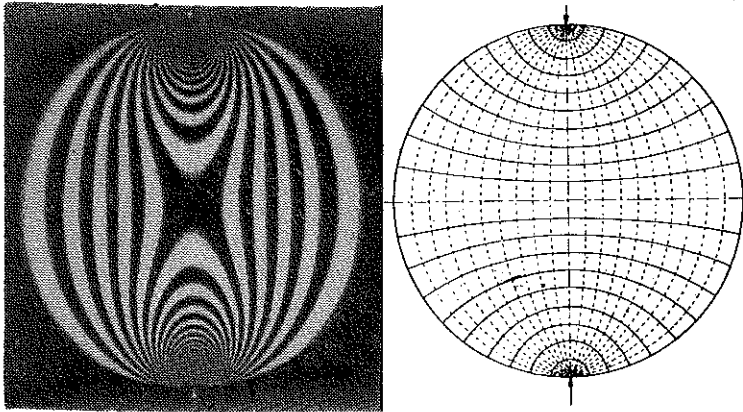
Rys. 4

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial s},$$

to znaczy

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{1}{\rho_{tr}},$$

gdzie  $\rho$  jest promieniem krzywizny izochromy, a  $\rho_{tr}$  promieniem krzywizny trajektorii naprężeń głównych. Na osi symetrii  $\alpha=0$ , ale na ogół  $\partial \alpha / \partial s \neq 0$ ; dlatego promień krzywizny izochromy jest inny niż trajektorii naprężeń głównych. Na poda-



Rys. 5

nym przykładowo rys. 5 (wg [7 i 8]) widzimy, że jedynie na obwodzie tarczy izochromy i trajektorie mają tę samą krzywiznę. Na poziomej osi symetrii nie ma nawet zgodności znaków krzywizny izochromy i trajektorii.

## DODATEK 2

Wyrazimy warunek ciągłości odkształceń

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

w wygodnej dla elastoptyki postaci przez funkcję  $m$  opisującą różnicę naprężeń głównych i funkcję  $\varphi$  podającą kierunek utworzony przez większe z naprężeń głównych z osią  $x$ . Zgodnie z prawem Hooke'a wyrażonym za pomocą związków Mohra

$$\varepsilon_{(\nu)} = \frac{1}{E} \left[ (1-\nu)p \pm \frac{1+\nu}{2} m \cos 2\varphi \right], \quad \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} m \sin 2\varphi$$

otrzymujemy

$$(12) \quad \frac{1-\nu}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{m}{2} \cos 2\varphi \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( m \sin 2\varphi \right).$$

Z drugiej strony, jak wiadomo, można przedstawić warunek ciągłości odkształceń korzystając z prawa Hooke'a i różniczkowych równań równowagi w postaci—

$$(13) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p = -\frac{1+\nu}{2} \left( \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} \right),$$

przy czym  $g_x$  i  $g_y$  oznaczają siły masowe.

Jeżeli prawa strona (13) wynosi zero, co ma w szczególności miejsce przy siłach masowych niezależnych od położenia, to otrzymujemy z porównania (12) i (13)

$$(14) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{m}{2} \cos 2\varphi \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( m \sin 2\varphi \right) = 0.$$

Po wykonaniu w (14) różniczkowań otrzymujemy dla osi symetrii, na której  $\varphi=0$ , równanie Dobrowskiego (1), a na osi symetrii na której  $\varphi=\pi/2$ , równanie

$$(15) \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\beta^2}{m} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) m.$$

Równanie (15) przechodzi w równanie (1) po zmianie znaku przed  $m$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. SZCZEPIŃSKI, *Method of characteristics in computations of the experimental stress analysis*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **12**, 619, 1964.
2. R. WOJNAR, *Bezpośrednie wyznaczenie składowych naprężenia metodą charakterystyk na podstawie samych izochrom*, Rozpr. Inżyn., **18**, 607, 1970.
3. И. П. Добровольский, *Определение напряжений методом фотоупругости на картине полос*, Вестн. Моск. ун-та, 5, сер. I, 1960.
4. S. P. CHRISTODOULIDES, *A photoelastic method of two-dimensional separation of stresses along a line of symmetry by using the isochromatic fringes only*, Brit. J. Appl. Phys., **7**, 190, 1956.
5. H. NEUBER, *Die Randbedingungen der Hauptspannungs-Stromlinien*, ZAMM, **15**, 374, 1935.
6. P. S. THEOCARIS, *Direct determination of stresses in plane elasticity problems based on the properties of isostatics*. Transactions of the ASME, J. Appl. Mech., **26E**, 227, 1959.
7. M. M. FROCHT, *Photoelasticity*, **2**, New York 1948.
8. J. T. PINDERA, *Zarys elastooptyki*, Warszawa 1953.

#### Резюме

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВДОЛЬ ОСИ СИММЕТРИИ НА ОСНОВЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННО-ОПТИЧЕСКОЙ КАРТИНЫ САМЫХ ИЗОХРОМ В ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Анализ напряженного состояния на основе образа самих изохром, представляет трудоемкую задачу, даже вдоль оси симметрии, для которой известны направления главных напряжений. В этом последнем случае требуется, в общем, решать нелинейное дифференциальное уравнения типа Риккати.

Оказывается однако, что можно определить напряжения относительно простым способом вдоль оси симметрии в задачах с изометрическими траекториями главных напряжений. Для установления существует ли изометрия траектории применяется тест предложенный уже Нейбором, состоящий на сравнении краевых напряжений известной картины изохром с некоторой функцией пропорциональной к обратности квадратной формы. Предложенный метод анализа картины изохром добавочно обоснован примером.

## SUMMARY

## DETERMINATION OF STRESSES ALONG THE AXIS OF SYMMETRY IN THE ISOMETRIC CASE ON THE BASIS OF ISOCHROMES ONLY

Analysis of the state of stress on the sole basis of fringe pattern image is a very time-consuming procedure, even in the case when the axis of symmetry is only concerned along which the directions of principal stresses are known. In that case it is usually necessary to solve a nonlinear differential equation of the Riccati type.

It is shown, however, that the stresses along the axis of symmetry can be determined relatively simply in the case of problems characterized by isometric principal stress trajectories. In order to find out whether the trajectories are isometric, we apply the test which has been proposed already by Neuber; it consists in equating the boundary stresses to a certain function inversely proportional to the quadratic form.

The method of isochrome image analysis is illustrated by an example.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 kwietnia 1971 r.*

---