

OKREŚLENIE GRANICY STOSOWALNOŚCI MODELU CIĄGŁEGO PRZY OBLICZANIU DYSKRETNEJ, BIEGUNOWEJ TARCZY SIATKOWEJ

WIESŁAWA ŁANECKA-MAKARUK (WARSZAWA)

WSTĘP

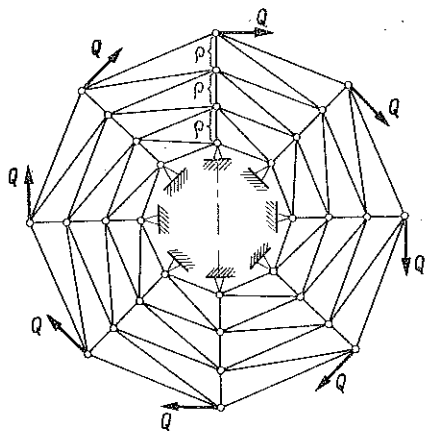
Dyskretne konstrukcje siatkowe znajdują coraz szersze zastosowanie w różnych dziedzinach współczesnej techniki. Konstrukcjami takimi są: przestrzenne kratownice nośne, tarcze i powłoki siatkowe, ruszta, płyty perforowane itp. Cechą charakterystyczną jest ich dyskretna, nieciągła struktura siatkowa, wymagająca odmiennego potraktowania zjawisk w nich zachodzących niż w mechanice ośrodków ciągłych. Dotychczas nie było jednolitej metody obliczeń układów dyskretnych, a istniejące opracowania cechowała mnogość stosowanych metod. Mechanika ośrodków ciągłych dzięki temu, że zastosowany w niej aparat matematyczny (rachunek różniczkowy i tensorowy) uprzywilejował przestrzeń ciągłą, jest nauką bardzo rozwiniętą i dysponuje rozwiniętym aparatem matematycznym. Dzięki tym zaletom również zagadnienia ciał i zjawisk dyskretnych starano się rozwiązać na podstawie modelu ośrodka ciągłego. Przykładem takiego udanego zastosowania modelu ośrodka ciągłego z mikrostrukturą do badania gęstych rusztów i układów prętowych jest monografia Cz. WOŹNIAKA [2], gdzie rozwiązano cały szereg siatek typu tarcz, płyt i rusztów.

Stosowanie metod mechaniki ośrodków ciągłych do układów dyskretnych wymaga jednak określenia granic stosowalności tych metod i oceny dokładności uzyskanych wyników. Autorzy stosujący model ciągły do obliczania ośrodków dyskretnych stwierdzają jedynie, że może on być stosowany w przypadku siatek dostatecznie gęstych, nie podają jednak żadnych kryteriów pozwalających stwierdzić, czy rozpatrywana siatka jest dostatecznie gęsta. Jest rzeczą oczywistą, że określenie kryteriów stosowalności metod ciągłych jest możliwe tylko przez rozpatrywanie ośrodków dyskretnych.

Zbadanie tych zagadnień stało się możliwe dopiero dzięki wprowadzeniu ogólniejszego modelu, mianowicie modelu ośrodka nieciągłego, dyskretnego, i opracowaniu przez H. FRĄCKIEWICZA mechaniki ośrodków siatkowych [1]. Dzięki zastosowaniu pewnego uogólnionego rachunku tensorowego stało się możliwe jednolite pod względem metodologicznym przedstawienie geometrii, warunków równowagi i związków fizycznych zbiorów dyskretnych.

Praca niniejsza jest częścią szerszego opracowania, którego celem jest określenie granicy stosowalności modelu ciągłego oraz określenie błędów, jakie popełnia się stosując mechanikę ośrodków ciągłych do określonych, dyskretnych siatek sprę-

zystych. Zbadano w niej zagadnienia stosowalności modelu ciągłego dla pewnego przypadku biegunowej tarczy siatkowej, rys. 1. Stosując ogólną teorię mechaniki dyskretnych ośrodków siatkowych [1] opisano geometrię, warunki równowagi i związki fizyczne płaskiej biegunowej siatki.



Rys. 1

Przejście od ośrodka dyskretnego do ciągłego zrealizowano zagęszczając materiał w siatce, nie zwiększając przy tym ogólnej ilości materiału, lecz powiększając ilość oczek siatki dwukrotnie w kierunku promieniowym i obwodowym dla każdego kolejnego stopnia zagęszczenia siatki N . W wyniku takiego zagęszczenia materiału uzyskano zmienny przekrój siatki jako funkcję promienia, co odpowiada zmiennej sztywności siatki. Rozwiązując otrzymane układy równań metodą numeryczną dla każdego kolejnego stopnia zagęszczenia materiału N określono stan napięć i przemieszczeń takiej

siatki. W wyniku otrzymano przebieg sił oraz przemieszczenia wszystkich jej węzłów jako funkcję zagęszczenia materiału N . Otrzymane wykresy mają charakter asymptotyczny, co pozwala na określenie granicznego zagęszczenia, powyżej którego poszczególne wielkości nie zmieniają się lub zmieniają się bardzo nieznacznie, czyli dalsze zagęszczenie materiału w siatce nie wpływa na wyniki, a więc można stosować do ich obliczeń metody mechaniki ośrodków ciągłych. Ponadto dla każdego dowolnego zagęszczenia siatki można odczytać błąd, jaki popełniamy stosując zasady mechaniki ośrodków ciągłych do układów dyskretnych.

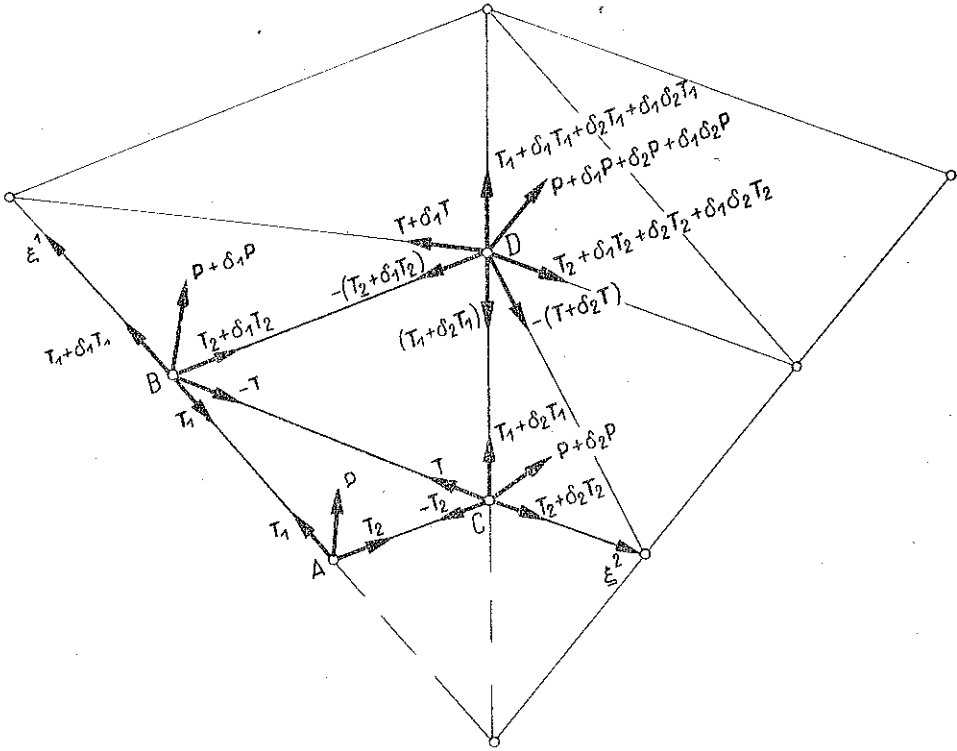
1. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Opierając się na opisie dyskretnego ośrodka sprężystego oraz na opisie stanu napięcia, odkształcenia i związków fizycznych w takim ośrodku wprowadzonym przez H. FRĄCKIEWICZA [1] napiszemy równania równowagi, równania przemieszczeń i związki fizyczne dla siatki przedstawionej na rys. 1.

1.1. Równania równowagi siatki

Rozpatrując równowagę siatki przyjmujemy, że poszczególne jej węzły połączone są wzdłuż linii parametrycznych ξ^1 i ξ^2 łącznikami. W każdym typowym węźle siatki zbiega się sześć łączników. Siły mogą być przyłożone tylko w węzłach siatki. Równania równowagi piszemy dla układu nieodkształconego. Siły wewnętrzne $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}$ oraz siłę zewnętrzną \mathbf{P} określamy w punktach o współrzędnych ξ^1, ξ^2 . Siły te zwiększają się o przyrosty wzdłuż linii parametrycznych (rys. 2). Wektorowe równanie równowagi punktu D ma następującą postać:

$$(1.1) \quad \delta_1 \mathbf{T}_1 + \delta_2 \delta_1 \mathbf{T}_1 + \delta_2 \mathbf{T}_2 + \delta_2 \delta_1 \mathbf{T}_2 + \delta_1 \mathbf{T} - \delta_2 \mathbf{T} + (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) \mathbf{P} = 0.$$



Rys. 2

Wektory sił wyrażamy przez składowe obiektu podstawowego:

$$(1.2) \quad \mathbf{T}_i = \tau_i^s \mathbf{e}_s, \quad \mathbf{T} = \tau \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{P} = p^s \mathbf{e}_s.$$

Wektor \mathbf{e}_0 wyraża się za pomocą wektorów bazy podstawowej \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 (rys. 3):

$$(1.3) \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 \Delta \xi^1 - \mathbf{e}_2 \Delta \xi^2.$$

Wyrażając wektor \mathbf{T} również przez składowe kowariantne mamy

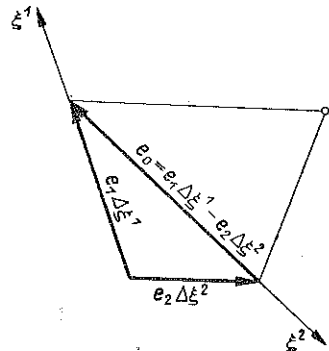
$$(1.4) \quad \mathbf{T} = t^s \mathbf{e}_s = t^1 \mathbf{e}_1 + t^2 \mathbf{e}_2,$$

skąd

$$(1.5) \quad t^1 = \tau \Delta \xi^1, \quad t^2 = -\tau \Delta \xi^2.$$

Wyrażając przyrosty sił w pochodnych kowariantnych i przechodząc do równań skalarnych, otrzymujemy układ dwóch skalarnych równań równowagi z pochodnymi kowariantnymi, które w postaci ogólnej możemy napisać następująco:

$$(1.6) \quad \Delta \xi^K \nabla_K (1 + \Delta \xi^L \nabla_L) \tau_K^{\hat{s}} + (\Delta \xi^1 \nabla_1 - \Delta \xi^2 \nabla_2) t^{\hat{s}} + (1 + \Delta \xi^1 \nabla_1) (1 + \Delta \xi^2 \nabla_2) p^{\hat{s}} = 0,$$



Rys. 3

gdzie

$$K, L=1, 2, \text{ przy czym } K \neq L.$$

Zapis powyższy oznacza, że równanie (1.6) reprezentuje dwa równania równowagi rzutów sił (dla kolejnych wartości $S=1, 2$).

Przechodząc od pochodnych kowariantnych do zwykłych operatorów różnicowych [1], otrzymamy układ dwóch następujących równań równowagi w postaci rozwiniętej:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} A_{11}^1 \tau_1^1 + A_{22}^1 \tau_2^2 + B^1 \tau &= -C_{11}^1 p^1 - C_{12}^1 p^2, \\ A_{11}^2 \tau_1^1 + A_{22}^2 \tau_2^2 + B^2 \tau &= -C_{11}^2 p_1 - C_{12}^2 p^2, \end{aligned}$$

gdzie symbole $\hat{A}_{KK}^S, \hat{B}^S, \hat{C}_{1I}^S$ oznaczają operatory różnicowe wyrażające się przez obiekty podstawowe g_{IJ} i współczynniki koneksji Γ_{jk}^i w dwuwymiarowym układzie współrzędnych [1].

Równania (1.7) przedstawiają układ dwóch równań równowagi węzła z trzema niewiadomymi wielkościami τ_1^1, τ_2^2 i τ . Każdy z węzłów jest więc lokalnie jednokrotnie statycznie niewyznaczalny. Aby uzyskać dodatkowe równania, musimy rozpatrzyć odkształcenia siatki (związki geometryczne) i zależności fizyczne pomiędzy odkształceniami i siłami.

1.2. Związki geometryczne

Wektor przesunięcia węzłów wyrażamy za pomocą wektorów bazy podstawowej lub wzajemnej następująco:

$$(1.8) \quad \mathbf{V} = v^A \mathbf{e}_A = v_A \mathbf{e}^A.$$

Wydłużenia względne łączników wzdłuż linii parametrycznych są następujące:

$$(1.9) \quad \varepsilon_A = \frac{1}{g_{AA}} \nabla_A v_A,$$

gdzie $A=1, 2$. Wydłużenie łącznika przekątnego wyraża się przez wydłużenia łączników leżących na liniach parametrycznych:

$$(1.10) \quad \varepsilon = \frac{\nabla_1 v_1 \Delta \xi^1 \Delta \xi^1 - (\nabla_1 v_2 + \nabla_2 v_1) \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 + \nabla_2 v_2 \Delta \xi^2 \Delta \xi^2}{g_A},$$

gdzie

$$(1.11) \quad g_A = g_{11} \Delta \xi^1 \Delta \xi^1 - 2g_{12} \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 + g_{22} \Delta \xi^2 \Delta \xi^2.$$

1.3. Związki fizyczne

Wyrażając wielkości fizyczne sił w łącznikach jako iloczyny sztywności d i wydłużenia ε znajdziemy

$$(1.12) \quad T_A^A = d_A \varepsilon_A, \quad T = d\varepsilon.$$

Zależności pomiędzy wielkościami τ_A^A i τ , a wielkościami sił fizycznych są następujące:

$$(1.13) \quad \tau_A^A = \frac{T_A^A}{\sqrt{g_{AA}}}, \quad \tau = \frac{T}{\sqrt{g_A}}.$$

Uwzględniając (1.12) i (1.13) wielkości τ_A^A i τ wyrażamy przez przemieszczenia v_A :

$$(1.14) \quad \tau_A^A = \frac{d_A}{g_{AA} \sqrt{g_{AA}}} \nabla_A v_A,$$

$$\tau = \frac{d}{g_A \sqrt{g_A}} [\nabla_1 v_1 \Delta \xi^1 \Delta \xi^1 - (\nabla_1 v_2 + \nabla_2 v_1) \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 + \nabla_2 v_2 \Delta \xi^2 \Delta \xi^2].$$

Wstawiając te zależności do układu równań (1.7) otrzymujemy układ równań równowagi w przemieszczeniach, przy czym dla każdego węzła siatki otrzymujemy dwa równania i dwie niewiadome v_1 i v_2 . Mając obliczone funkcje v_1 i v_2 można z zależności (1.14) wyliczyć siły w poszczególnych prętach siatki. Ze względu na bardzo skomplikowaną budowę tych równań w przypadku ogólnym podstawień takich nie robimy. Zagadnienie powyższe rozwiążemy dla osiowo-symetrycznej, biegunowej tarczy siatkowej z węzłami przegubowymi i prętami przekątnymi jak na rys. 1.

W wyprowadzonych powyżej równaniach równowagi (1.7) prawa strona będzie równa zeru, gdyż ograniczymy nasze rozważania do przypadku, gdy nie ma sił zewnętrznych przyłożonych do każdego węzła siatki. W każdym węźle siatki spełniony jest układ równań (1.7) i związki fizyczne (1.14). Zadanie jest osiowo-symetryczne, gdyż wielkości geometryczne siatki, jej sztywności, siły i przemieszczenia są funkcją tylko współrzędnej ξ^1 .

Podstawiając wyprowadzone w pracy [1] współczynniki obiektu podstawowego g_{ij} i wzajemnego g^{jk} , współczynniki koneksji bazy podstawowej Γ_{jk}^i i bazy wzajemnej Δ_{jk}^i , które opisują wielkości geometryczne rozpatrywanej siatki, do wyrażeń na współczynniki \hat{A}_{KK}^s , \hat{B}_{1t}^s i \hat{C}_{1t}^s w równaniach równowagi (1.7) i do związków fizycznych oraz przyjmując $\Delta \xi^1 = 1$ i $\Delta \xi^2 = 1$, otrzymamy po przekształceniach następujący układ równań:

$$(1.15) \quad \tau_{(\xi^1+1)} = \frac{\xi^1}{2+\xi^1} \tau_{(\xi^1)},$$

$$v_{1(\xi^1+2)} - 2 \left(1 + \frac{a}{1+\xi^1} \right) v_{1(\xi^1+1)} + v_{1(\xi^1)} - 2b \left(\frac{1}{2+\xi^1} + 2c\xi^1 \right) \tau_{(\xi^1)} = 0,$$

$$\tau_{1(\xi^1)} = \frac{1}{b} [v_{1(\xi^1+1)} - v_{1(\xi^1)}],$$

$$\tau_{2(\xi^1)} = \frac{d_2}{2\rho^3 \sqrt{c} (\xi^1)^2} v_{1(\xi^1)},$$

$$-\frac{\xi^1}{\xi^1+1} v_{2(\xi^1+1)} + \frac{\xi^1+1}{\xi^1} v_{2(\xi^1)} + v_{1(\xi^1+1)} + [4(1+\xi^1)c - 1] v_{1(\xi^1)} =$$

$$= \frac{\rho^3}{d} [1 + 4\xi^1(1+\xi^1)c]^{3/2} \tau_{(\xi^1)},$$

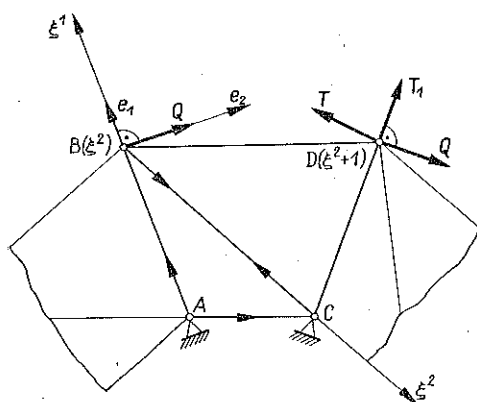
gdzie

$$(1.16) \quad a = \frac{d_2}{d_1} \sin t, \quad b = \frac{\rho^3}{d_1}, \quad c = \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Z równań tych możemy kolejno wyznaczyć wielkości τ , v_1 , τ_1^1 , τ_2^2 i v_2 w każdym węźle siatki dla danych warunków brzegowych.

1.4. Warunki brzegowe

W warunkach brzegowych mieści się rodzaj obciążenia siatki i sposób jej utwierdzenia. W pracy niniejszej rozwiązano zagadnienie dla tarczy siatkowej (rys. 4) obciążonej siłami Q prostopadłymi do prętów promieniowych, przyłożonymi w zewnętrznych węzłach siatki i podpartej przegubowo w węzłach wewnętrznych. Rozpatrzono jeden segment takiej siatki, gdyż pozostałe są identycznie obciążone i utwierdzone. Siłę Q w węźle zewnętrznym rozłożono na dwie składowe T i T_1 (kierunek przekątny i promieniowy) i potraktowano ją jako oddziaływanie nieistniejącego węzła z zewnątrz. Dzięki temu również węzły zewnętrzne można traktować jak wszystkie typowe węzły i stosować do nich równania (1.15).



Rys. 4

Zgodnie z pracą [1] otrzymujemy następujące zależności na τ_1^1 i τ w zewnętrznym węźle siatki w punkcie przyłożenia siły Q :

$$(1.17) \quad \tau = - \frac{Q}{\rho (\xi^1 + 1) \sin t},$$

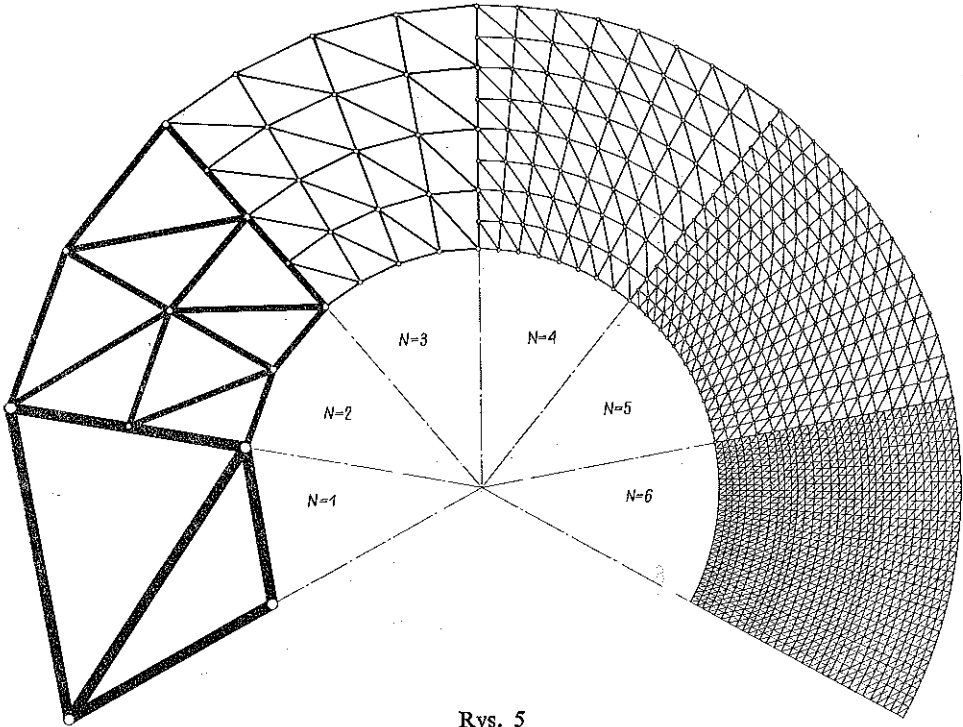
$$\tau_1^1 = \frac{Q}{\rho \sin t} \left[\frac{1}{1 + \xi^1} - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \right].$$

2. WPŁYW ZAGĘSZCZENIA MATERIAŁU W TARCZY SIATKOWEJ NA STAN NAPIĘĆ I PRZEMIESZCZEŃ

W tej części pracy zbadano wpływ zagęszczenia materiału w siatce biegunowej, rozpatrywanej w części pierwszej, na jej stan napięcia i przemieszczeń. Wprowadzono pojęcie stopnia zagęszczenia materiału w siatce N . Zagęszczenie materiału w siatce realizowano nie zwiększając ogólnej ilości materiału, lecz powiększając ilość oczek siatki dwukrotnie w kierunku promieniowym i ośwobodowym dla każdego stopnia zagęszczenia N . Przyjęto przy tym, że ilość materiału przed i po podziale

w prętach jest stała: promieniowych $\Sigma F_1 l_1 = \text{const}$, w obwodowych $\Sigma F_2 l_2 = \text{const}$ i w prętach przekątnych $\Sigma F_0 l_0 = \text{const}$.

Wielkościami geometrycznymi siatki są ρ i t . Dla stanu wyjściowego zagęszczenia siatki przyjmujemy $N=1$. Następnie dla $N=2$ każde oczko siatki wyjściowej dzielimy na dwa w kierunku promieniowym i na dwa w kierunku obwodowym, przez co z każdego oczka otrzymujemy nowe cztery i materiał jest rozłożony równomiernie. Dla $N=3$ znów każde nowe oczko siatki dzielimy na cztery i tak kolejno



Rys. 5

coraz bardziej zagęszczamy materiał w siatce aż do $N=6$. Przez taki podział i zagęszczanie materiału uzyskujemy zmianę przekrojów, co odpowiada zmianie sztywności wzdłuż współrzędnej promieniowej ξ^1 . Wymiary oczek siatki przy kolejnych podziałach siatki pokazano na rys. 5.

2.1. Zmiana przekrojów prętów w zależności od stopnia zagęszczania materiału N

Ogólna zasada przy zagęszczaniu materiału w siatce została tak zdefiniowana, aby cały materiał w poszczególnych rodzajach łączników pozostawał stały $\Sigma F_i l_i = \text{const}$. Rozpatrzmy więc jak zmieniają się przekroje poszczególnych prętów siatki w miarę zagęszczania materiału w sposób opisany wyżej.

Długości prętów określają wzory

$$(2.1) \quad l_{ii} = \sqrt{g_{ii}} \Delta \xi^i.$$

Dla każdego stopnia zagęszczenia N zmieniają się wartości ρ , ξ^1 i t w sposób następujący:

$$(2.2) \quad \rho_{N+1} = \frac{\rho_N}{2}, \quad \xi_{N+1}^1 = 2\xi_N^1, \quad t_{N+1} = \frac{t_N}{2}.$$

Długości prętów siatki zmieniają się przy zmianie stopnia zagęszczenia N jak pokazano na rys. 6.

Zmiana przekrojów prętów promieniowych (wzdłuż współrzędnej ξ^1). Długość prętów wynosi

$$(2.3) \quad l_{11} = \sqrt{g_{11}} A \xi^1.$$

Przyjmując zależności

$$(2.4) \quad \Sigma F_1^N l_1^N = \Sigma F_1^{N+1} l_1^{N+1}$$

i uwzględniając, że z każdego pręta promieniowego o długości l_1^N po podziale otrzymamy cztery pręty promieniowe o długości l_1^{N+1} i o jednakowych przekrojach

$$(2.5) \quad F_1^N l_1^N = 4F_1^{N+1} l_1^{N+1},$$

oraz uwzględniając zależności na współczynniki g_{ii} [1], otrzymamy

$$(2.6) \quad F_1^{N+1} = \frac{F_1^N}{2}.$$

Ze wzoru (2.6) widać, że pola przekrojów prętów promieniowych dla kolejnego stopnia zagęszczenia materiału $N+1$ równe są połowie przekrojów F_1 dla stopnia N i nie zależą od współrzędnej ξ^1 .

Zmiana przekrojów prętów obwodowych. Mamy

$$(2.7) \quad l_{22} = \sqrt{g_{22}} A \xi^2, \\ \Sigma F_2^N l_2^N = \Sigma F_2^{N+1} l_2^{N+1}.$$

Uwzględniając [1], że

$$(2.8) \quad l_{22} = \rho \xi^1 \sqrt{2(1 - \cos t)},$$

znajdziemy

$$(2.9) \quad l_2^N = \rho^N \xi^1 \sqrt{2(1 - \cos t_N)}, \\ \bar{l}_2^{N+1} = \rho^{N+1} \xi_{N+1}^1 \sqrt{2(1 - \cos t_{N+1})}, \\ \bar{l}_2^{N+1} = \rho^{N+1} (\xi_{N+1}^1 + 1) \sqrt{2(1 - \cos t_{N+1})}, \\ F_2^N l_2^N = F_2^{N+1} 2(\bar{l}_2^{N+1} + \bar{l}_2^{N+1}).$$

Po wykorzystaniu powyższych wzorów i po przekształceniach otrzymujemy następującą formułę na przekroje prętów obwodowych dla każdego N :

$$(2.10) \quad F_{2(\xi^1)}^{N+1} = F_{2(\xi^1/2)}^N \frac{\sin t_{N+1}}{\sqrt{2(1 - \cos t_{N+1})}} \frac{\xi^1}{(2\xi^1 + 1)}.$$

Wprowadzając oznaczenie

$$(2.11) \quad p^{N+1} = \frac{\sin t_{N+1}}{\sqrt{2(1 - \cos t_{N+1})}},$$

otrzymamy wzór na F_2^{N+1}

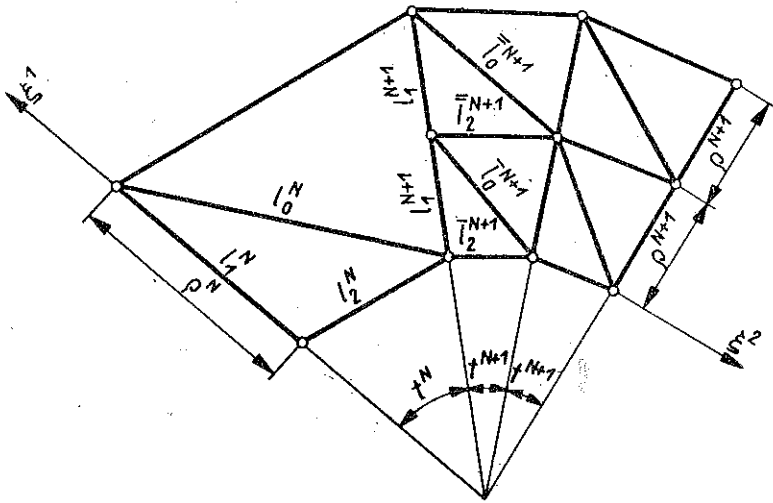
$$(2.12) \quad [F_2^{N+1}]_{(\xi^1)} = [F_2^N]_{(\xi^{1/2})} p \frac{\xi^1}{2\xi^1 + 1}$$

przy czym

$$(2.13) \quad [F_2^{N+1}]_{\xi^1 = 2n-1} = [F_2^{N+1}]_{\xi^1 = 2n}.$$

Zmiana przekrojów prętów przekątnych. W tym przypadku

$$(2.14) \quad l_0 = \sqrt{g_A} = \rho \sqrt{1 + 2\xi^1(1 - \cos t) + 2(\xi^1)^2(1 - \cos t)}.$$



Rys. 6

Uwzględniając wzory

$$(2.15) \quad \Sigma F_0^N l_0^N = \Sigma F_0^{N+1} l_0^{N+1}$$

oraz wzór na g_{ii} [1] i (2.2), na podstawie rys. 6 mamy

$$(2.16) \quad \Sigma F_0^N l_0^N = \Sigma F_0^{N+1} 2(l_0^{N+1} + \bar{l}_0^{N+1}).$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$(2.17) \quad [F_0^{N+1}]_{(\xi^1)} = \frac{\sqrt{1 + \xi^1 \left(1 + \frac{\xi^1}{2}\right) (1 - \cos 2t)}}{\sqrt{1 + 2\xi^1(1 + \xi^1)(1 - \cos t)} + \sqrt{1 + 4(\xi^1 + 1) \left(1 + \frac{\xi^1}{2}\right) (1 - \cos t)}} [F_0^N]_{(\xi^{1/2})}$$

Zastosujemy oznaczenie

$$(2.18) \quad s = \sin t, \quad r = 1 - \cos t, \quad p = \frac{s}{\sqrt{2r}},$$

ostatecznie wzór (2.17) będzie miał postać

$$(2.19) \quad [F_0^{N+1}]_{(\xi^1)} = [F_0^N]_{(\xi^1, 2)} \frac{\sqrt{1 + 2s\xi^1 \left(1 + \frac{\xi^1}{2}\right)}}{\sqrt{1 + 2r\xi^1(1 + \xi^1)} + \sqrt{1 + 4r(\xi^1 + 1) \left(\frac{\xi^1}{2} + 1\right)}}.$$

Z wprowadzonych wzorów na przekroje (2.6), (2.12) i (2.19) widać, że przekroje prętów obwodowych i przekątnych są funkcjami współrzędnej ξ^1 i wielkości ich zależą od położenia węzła w siatce. Jedynie przekroje prętów promieniowych nie zależą od współrzędnej ξ^1 .

Uzyskane wzory opisują zmianę przekrojów siatki, co jest równoważne zmianie sztywności siatki wzdłuż współrzędnej ξ^1 .

2.2. Równania równowagi i równania przemieszczeń przy uwzględnieniu zmiennych sztywności siatki

Uwzględniając zmianę sztywności siatki spowodowaną zmianą przekrojów poszczególnych rodzajów prętów równania równowagi i równania przemieszczeń przyjmują następującą postać:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \tau_{(\xi^1)} &= \frac{\xi^1 + 2}{\xi^1} \tau_{(\xi^1 + 1)}, \\ v_{1(\xi^1 + 2)} - 2 \left[1 + k \frac{F_{2(\xi^1 + 1)}}{\xi^1 + 1} \right] v_{1(\xi^1 + 1)} + v_{1(\xi^1)} &= \frac{2}{b} \left[\frac{1}{2 + \xi^1} + 2c^2 \xi^1 \right] \tau_{(\xi^1)}, \\ \tau_{1(\xi^1)} &= b [v_{1(\xi^1 + 1)} - v_{1(\xi^1)}], \quad \tau_{2(\xi^1)} = e \frac{F_{2(\xi^1)}}{(\xi^1)^2} v_{1(\xi^1)}, \\ \frac{\xi^1}{\xi^1 + 1} v_{2(\xi^1 + 1)} - \frac{\xi^1 + 1}{\xi^1} v_{2(\xi^1)} &= v_{1(\xi^1 + 1)} + [4c^2(\xi^1 + 1) - 1] v_{1(\xi^1)} - \\ &\quad - \frac{[1 + 4\xi^1(1 + \xi^1)c^2]^{3/2}}{aF_{0(\xi^1)}} \tau_{(\xi^1)}. \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.21) \quad a = \frac{E}{\rho^3}, \quad b = \frac{EF_1}{\rho^3} = aF_1, \quad c = \sin \frac{t}{2}, \quad e = \frac{a}{2c}, \quad k = \frac{c}{F_1}.$$

2.3. Efektywne rozwiązanie problemu wyznaczenia stanu napięcia i przemieszczeń w siatce biegunowej metodą numeryczną

Otrzymany układ równań (2.21) dla wyżej rozpatrywanej siatki o zmiennych sztywnościach rozwiązano metodą numeryczną przy użyciu maszyny cyfrowej GIER, przy czym program napisany został w języku ALGOL. Wszystkie wielkości występujące w równaniach zarówno stałe jak zmienne wyrażono w zależności od stopnia zagęszczenia materiału N oraz przekrojów łączników F_1 , F_2 i F_0 siatki wyjściowej. Wartość ξ_{\min}^1 określa współrzędną ξ^1 w węźle wewnętrznym, a ξ_{\max}^1 wartość ξ^1 w węźle zewnętrznym siatki.

Pierwsze z układu równań (2.20) zawiera tylko jedną niewiadomą τ ; możemy ją wyznaczyć kolejno dla całej siatki mając określoną wartość τ w jednym węźle siatki. Drugie z układu równań (2.20) sprowadza się do układu $n-1$ równań algebraicznych z $n+1$ niewiadomymi przemieszczeniami v_1 poszczególnych węzłów. Równania te piszemy dla kolejnych węzłów siatki podstawiając za ξ^1 wartości od $\xi^1 = \xi_{\min}^1$ do $\xi^1 = (\xi_{\max}^1 - 1)$. Dodatkowe dwa równania uzyskujemy z warunków brzegowych podstawiając dla naszego zamocowania w węźle wewnętrznym $v_{1(\xi_{\min}^1)} = 0$ oraz wyrażając przemieszczenie $v_{1(\xi_{\max}^1+1)}$ ze wzoru (2.20) przez

$$(2.22) \quad v_{1(\xi_{\max}^1+1)} = \frac{\tau_{1(\xi_{\max}^1)}}{b} - v_{1(\xi_{\max}^1)}.$$

Jest to przemieszczenie fikcyjnego nieistniejącego węzła położonego za węzłem zewnętrznym siatki, określone przez przesunięcie węzła zewnętrznego $v_{1(\xi_{\max}^1)}$ i $\tau_{1(\xi_{\max}^1)}$; obliczamy je z (1.17) za pomocą obciążenia zewnętrznego. Ten układ równań rozwiązano metodą numeryczną stosując procedurę «Det Gauss». Mając wielkości v_1 obliczamy kolejno wartości sił τ_1^2 z układu równań (2.20)_{3,4} dla wszystkich węzłów siatki. Następnie podstawiając obliczone wartości na $\tau_{(\xi^1)}$ i $v_{1(\xi^1)}$ oraz podstawiając z warunków brzegowych $v_{2(\xi_{\min}^1)} = 0$, możemy z ostatniego z równań obliczyć kolejno wartości przesunięcia obwodowego v_2 poszczególnych węzłów. W równaniach (2.20)_{2,4,5} występują wartości F_2 i F_0 zależne od współrzędnej ξ^1 ; obrazują one zmienną sztywność siatki. Otóż wartości te obliczamy również metodą numeryczną dla każdego stopnia zagęszczenia N i dla każdego węzła siatki od ξ_{\min}^1 do ξ_{\max}^1 ze wzorów (2.12) i (2.19), a następnie wstawiamy do odpowiednich równań układu (2.20).

Aby uzyskać składowe fizyczne siły i przemieszczeń dla danej siatki, musimy uwzględnić następujące zależności:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} T_1 &= \tau_1 \sqrt{g_{11}} = \tau_1 \rho, & T_2 &= \tau_2 \sqrt{g_{22}} = \tau_2 \rho \sqrt{2(1 - \cos t)}, \\ T &= \tau \sqrt{g_d} = \tau \rho \sqrt{2(1 - \cos t) \xi^1 (\xi^1 + 1) + 1}, \\ V_1 &= v_1 \sqrt{g^{11}} = v_1 \frac{2}{\rho^2 (1 + \cos t)}, & V_2 &= v_2 \sqrt{g^{22}} = v_2 \frac{1}{\rho^2 \sin^2 t (\xi^1)^2}. \end{aligned}$$

2.4. Przykład

Aby zbadać wpływ zagęszczenia materiału w siatce na jej stan napięcia i przemieszczeń (oraz dla zobrazowania opisanej wyżej metody) rozwiążmy układ równań (2.20) dla siatki biegunowej z przegubowymi węzłami i prętami przekątnymi, obciążonej siłami prostopadłymi do prętów promieniowych w każdym węźle zewnętrznym (rys. 1).

Dane dla siatki wyjściowej przyjęte do obliczeń są następujące;

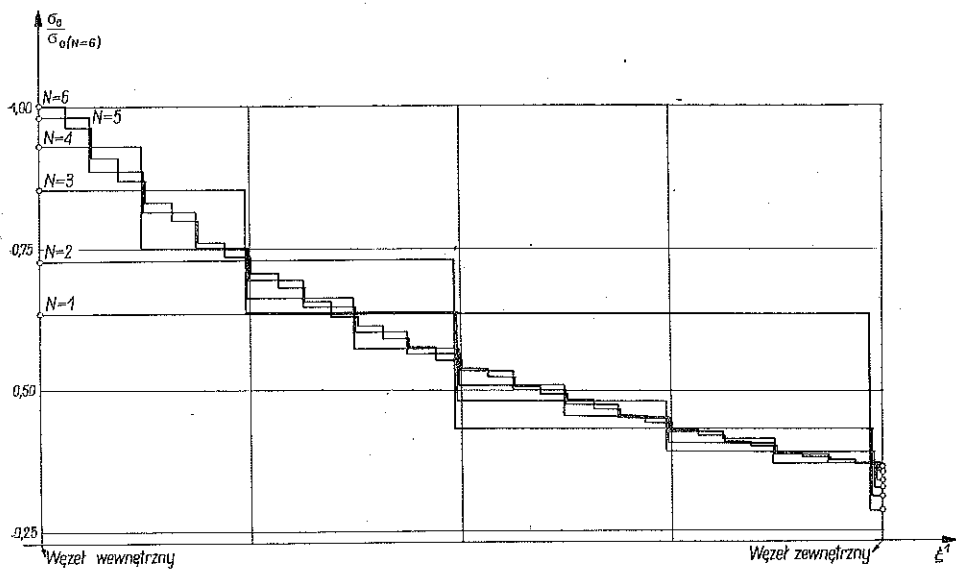
$$\frac{Q}{\rho} = 1, \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \quad \rho_w = 50 \text{ cm}, \quad \rho_z = 100 \text{ cm}.$$

Dla siatki wyjściowej (w obliczeniach określonej przez $N=1$) przyjęto $F_1 = F_2 = F_0 = 0,4 \text{ cm}^2$, $t = 40^\circ$, $\rho = 50 \text{ cm}$; dla każdego następnego stopnia zagęszczenia przyjmujemy wzory na $F_{i(N+1)}$, $t_{(N+1)}$ i $\rho_{(N+1)}$ wynikające z formuł (2.2), (2.6) i (2.19). Dla $N=1$, czyli dla siatki wyjściowej, liczba równań opisujących niewiadomą v_1 wynosi dwa. Przy każdym następnym zagęszczeniu siatki N liczba równań powiększa się dwukrotnie, i tak dla $N=2$ mamy już cztery równania z czterema niewiadomymi, a przy $N=6$ otrzymujemy już układ 32 równań z 32 niewiadomymi v_1 . Widać stąd, że nie możemy dowolnie daleko zagęszczać materiału w siatce, gdyż ograniczeni jesteśmy pamięcią maszyny liczącej. W rozpatrywanym przypadku największy uzyskany stopień zagęszczenia materiału dla $N=6$, co odpowiada kątowni $t = 1,25^\circ$ i odległościom między węzłami $\rho = 1,5625 \text{ cm}$.

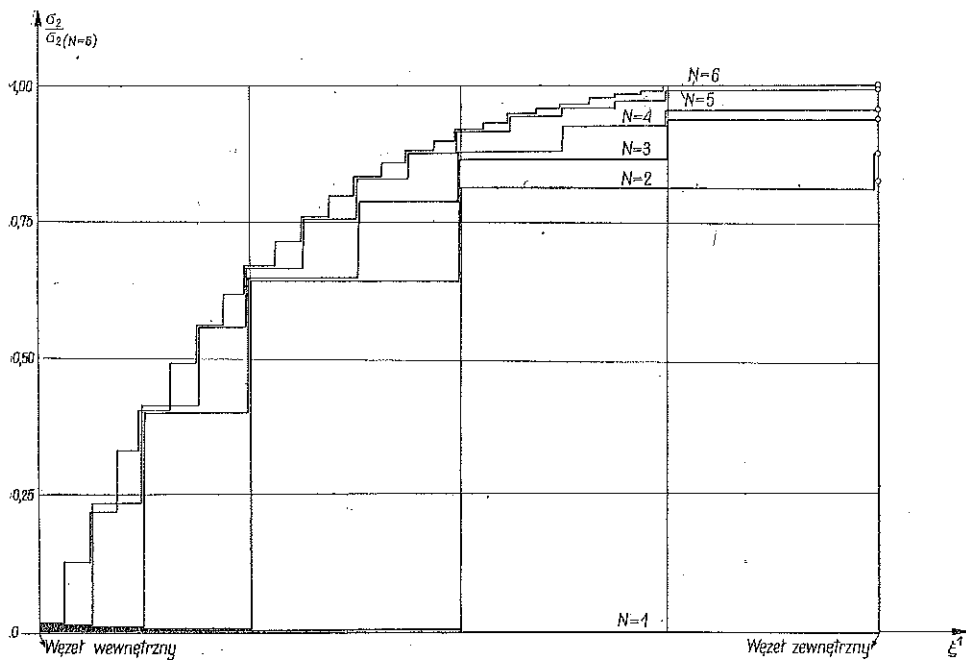
Wyniki obliczeń. W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano siły T_1 , T_2 i T we wszystkich łącznikach siatki oraz przemieszczenia V_1 i V_2 wszystkich węzłów siatki dla stopnia zagęszczenia materiału w siatce od $N=1$ do $N=6$.

Dla lepszego porównania otrzymanych wyników obliczono naprężenia panujące w poszczególnych prętach siatki i przedstawiono je na wykresach. Przebiegi naprężeń w prętach promieniowych siatki, jako funkcję współrzędnej ξ^1 , przedstawiono na wykresie na rys. 9. Naprężenia przedstawiono tu w postaci bezwymiarowej, przy czym naprężenia σ_1 w poszczególnych prętach odniesiono do σ_1 w węźle wewnętrznym dla $N=6$. Z wykresu widać, że naprężenia $\sigma_1(\xi^1)$ są funkcją malejącą od wartości $\sigma_1 = 1,0$ w węźle wewnętrznym do $\sigma_1 = 0,21$ w węźle zewnętrznym siatki. Wykres naprężenia $\sigma_2 = f(\xi^1)$ jest przedstawiony na rys. 8. Również te naprężenia przedstawiono w postaci bezwymiarowej, odnosząc każde z nich do naprężenia σ_2 w węźle zewnętrznym dla $N=6$. Naprężenia $\sigma_2(\xi^1)$ są funkcją rosnącą od wartości $\sigma_2 = 0$ w węźle wewnętrznym do $\sigma_2 = 1,0$ w węźle zewnętrznym dla $N=6$. Dla $N=1$ naprężenia te zmieniają się od $\sigma_2 = 0$ w węźle wewnętrznym do $\sigma_2 = 0,825$ w węźle zewnętrznym siatki. Wykres na rys. 7 przedstawia naprężenia w prętach przekątnych siatki, $\sigma_0 = f(\xi^1)$. Każdą wartość σ_0 odniesiono tu do σ_0 w węźle wewnętrznym dla $N=6$. Naprężenia $\sigma_0(\xi^1)$ w łącznikach przekątnych są funkcją malejącą i tak dla $N=6$ od wartości $\sigma_0 = 1$ w węźle wewnętrznym do $\sigma_0 = 0,36$ w węźle zewnętrznym.

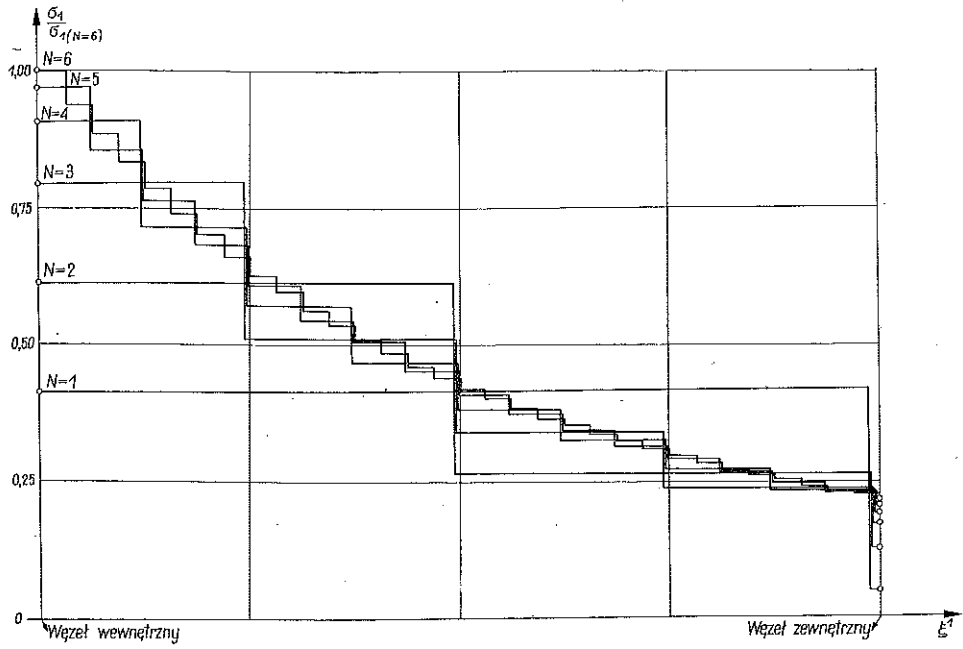
Aby uwidocznic wpływ zagęszczenia materiału na przebieg naprężeń w siatce, sporządzono wykresy naprężeń jako funkcji stopnia zagęszczenia materiału N . Wyniki przedstawiają wykresy na rys. 10. Na wykresach tych przyjęto za równe



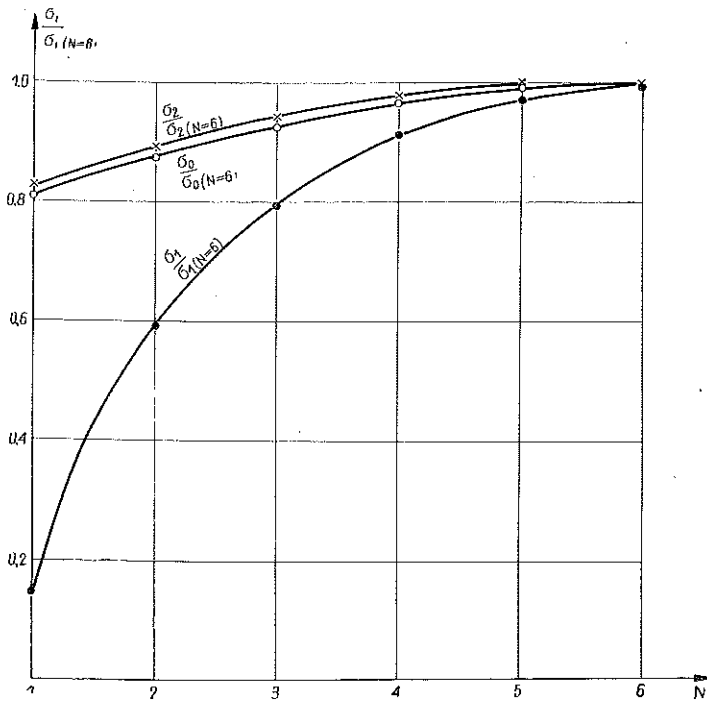
Rys. 7



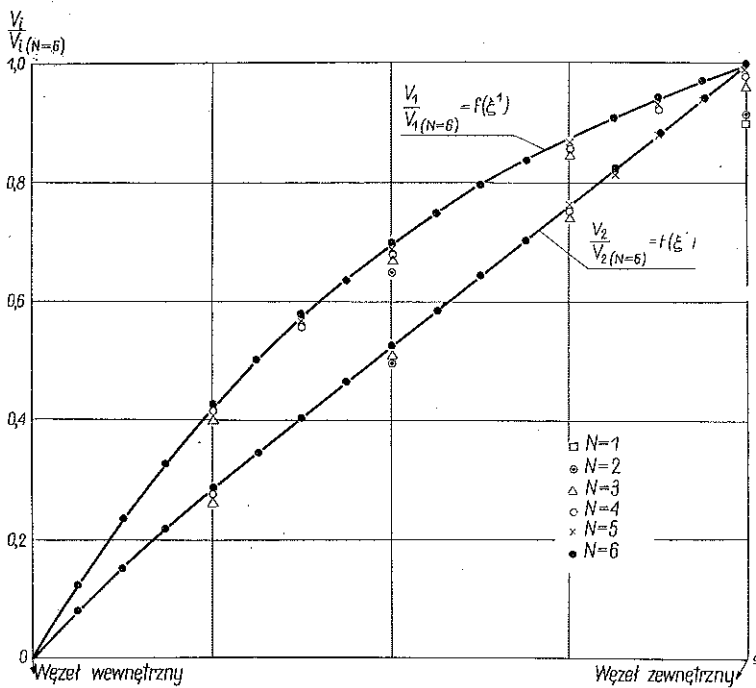
Rys. 8



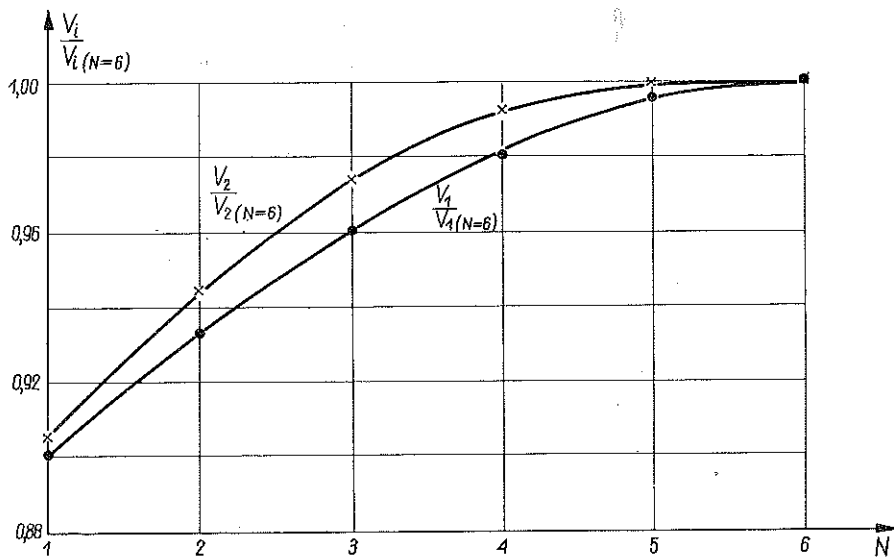
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

jedności naprężenia dla $N=6$. Otrzymane wykresy mają charakter asymptotyczny: widać z nich, że dalsze zagęszczenie materiału powyżej $N=5$ tylko nieznacznie lub wcale nie wpływa na wartość naprężeń w siatce. Tak np. mamy $\sigma_1=1,0$ dla $N=6$ oraz $\sigma_1=0,97$ dla $N=5$; $\sigma_2=1,0$ dla $N=6$ oraz $\sigma_2=0,99$ dla $N=5$; podobnie $\sigma_0=1,0$ dla $N=6$ oraz $\sigma_0=1,0$ dla $N=5$.

Wykresy na rys. 11 przedstawiają przemieszczenia V_1 w kierunku promieniowym i V_2 w kierunku obwodowym jako funkcje ξ^1 dla $N=1$ do 6. Wielkości przemieszczeń przedstawiono również w postaci bezwymiarowej i wartości ich odniesiono każdorazowo do przemieszczenia w węźle zewnętrznym dla $N=6$. Aby zobrazować bezpośrednio wpływ stopnia zagęszczenia materiału na przemieszczenia, przedstawiono wykresy V_1 i V_2 jako funkcje N (rys. 12). Również krzywe przemieszczeń mają charakter asymptotyczny; widać z nich, że zagęszczenie materiału w siatce powyżej $N=5$ tylko nieznacznie wpływa na wartość poszczególnych przemieszczeń.

Otrzymane wyniki pozwalają wysnuć wniosek, że już przy zagęszczeniu łączników w siatce $N=5$ (co odpowiada siatce o kącie $t=2,5^\circ$ i odległościom między węzłami $\rho=3,125$ cm) można traktować ją jako ośrodek ciągły i stosować do jej obliczeń metody i zależności stosowane w mechanice ośrodków ciągłych. Ponadto otrzymane wyniki pozwalają określić wielkość błędu, jaki popełniamy stosując do określonych siatek dyskretnych rachunek przyjęty w mechanice ośrodków ciągłych. I tak dla siatki określonej np. $N=2$ ($t=20^\circ$, $\rho=25$ cm) przy obliczaniu naprężeń popełniamy błąd od 15 do 40% (rys. 10), a przy obliczaniu przemieszczeń błąd 6% (rys. 12). Wnioski powyższe są poprawne dla obciążenia stałego na obwodzie; inne interesujące przypadki obciążeń będą przedmiotem dalszych rozważań.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, 1970.
2. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, 1970.
3. H. FRĄCKIEWICZ, *A plane problem of the theory of elasticity for media with a discrete lattice structure*, Arch. Mech. Stos., 19, 5, 1967.
4. H. FRĄCKIEWICZ, *Geometry of a discrete set of points*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 14, 9, 1966.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ПРИМЕНЯЕМОСТИ СПЛОШНОЙ МОДЕЛИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ДИСКРЕТНОГО, ПОЛЯРНОГО СЕТОЧНОГО ДИСКА

Исследуется вопрос применяемости сплошной модели при определении дискретного, полярного, сеточного диска, нагруженного окружными силами, перпендикулярными и радиальными стержнями. Применяя общую теорию механики дискретных сеточных сред описывается геометрию, условия равновесия и физические зависимости такой сетки. Переход от дискретной среды к сплошной осуществляется сгущивая материал в сетке, при этом не увеличивая общего количества материала, но увеличивая количества ячеек двукратно в радиальном и окружном направлении для каждой очередной степени сгущения материала. В результате получены процессы напряжений во всех стержнях сетки и перемещения всех ее узлов в функции сгущения материала.

Полученные результаты дают возможность определить предельное сгущение материала в сетке больше которого можно ее рассматривать как сплошную среду, а кроме того позволяют определить величину ошибки, которую совершаем применяя к определенным дискретным сеткам, исчисление принятое в механике сплошной среды.

SUMMARY

DETERMINATION OF THE LIMIT OF APPLICABILITY OF A CONTINUOUS MODEL TO THE CALCULATIONS OF A DISCRETE, POLAR LATTICE DISC

The paper presents the problem of applicability of a continuous model to the calculation of a discrete, polar lattice disc loaded at the periphery by forces normal to the radial rods. Using the general theory of mechanics of discrete lattice media, the equations are derived concerning the geometry, the equilibrium conditions and the physical relations of such a lattice. The transition from discrete to continuous media is achieved by increasing the material density in the lattice; the total amount of the material remains unchanged, the mesh size in the radial and circumferential direction in each consecutive stage of approximation being divided by two. The analysis yields the variation of stresses in all rods of the lattice and the displacements of its nodes as functions of the lattice density.

The results obtained enable us to determine the limit material density in the lattice above which the structure can be considered as a continuous medium; moreover, it is possible to determine the error following from the application of the continuous model analysis to definite discrete lattices.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 kwietnia 1971 r.