

SZCZELINA GRIFFITHA I WALCOWA INKLUZJA KOŁOWA W ANTYPŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

ANDRZEJ K A C Z Y Ń S K I (WARSZAWA)

1. OZNACZENIA I PODSTAWOWE RÓWNANIA

Wykaz ważniejszych oznaczeń

- a, b współrzędne wierzchołków szczeliny (wzdłuż osi x),
 c promień inkluzji,
 s $(a+b)/2$,
 u $1/\sqrt{ab}$,
 k $(b-a)^2/4ab = s^2 u^2 - 1$,
 A a/c ,
 B b/c ,
 τ wartość σ_{yz} w nieskończoności,
 τ_1 $\tau(a+b)/2\sqrt{ab} = \tau us$,
 p $\tau(b-a)^2/4ab\sqrt{ab} = \tau uk$,
 μ moduł ścinania (odkształcenia postaciowego) materiału poza inkluzją (matrycy),
 μ_i moduł ścinania inkluzji,
 α $(\mu_i - \mu)/(\mu_i + \mu)$.

Rozwiązywanie zagadnień teorii sprężystości dla antypłaskiego stanu odkształcenia jest znacznie łatwiejsze niż w przypadku płaskim ze względu na prostszy opis matematyczny.

Wektor przemieszczenia \mathbf{u} w tym stanie może być przedstawiony w przypadku statycznym w postaci

$$(1.1) \quad \mathbf{u} = [0, 0, w(x, y)],$$

jeśli oś deformacji jest skierowana wzdłuż osi z prostokątnego kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y, z) .

Z równań geometrycznych oraz z prawa Hooke'a wynika, że jedynie niezerowe składowe tensora odkształcenia ε_{xz} , ε_{yz} i naprężenia σ_{xz} , σ_{yz} są funkcjami dwóch zmiennych x i y i można je wyrazić za pomocą składowej przemieszczenia $w(x, y)$ następująco:

$$(1.2) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y}$$

oraz

$$(1.3) \quad \sigma_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y},$$

gdzie μ jest modulem ścinania. Jedyne równanie zwartości ma zatem następującą postać:

$$(1.4) \quad \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}.$$

Układ równań równowagi Lamégo sprowadza się także do jednego równania, które w przypadku braku sił masowych staje się dwuwymiarowym równaniem różniczkowym Laplace'a

$$(1.5) \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Tak więc przemieszczenie $w(x, y)$ jest płaską funkcją harmoniczną.

Korzystając z podstawowego twierdzenia teorii funkcji zmiennej zespolonej, stwierdzamy, że harmoniczna funkcja $w(x, y)$ jest częścią rzeczywistą albo urojoną pewnej funkcji analitycznej $f(z)$ zmiennej zespolonej $z = x + iy$. Przyjmijmy tutaj, że

$$(1.6) \quad w(x, y) = \mu^{-1} \operatorname{Im} [f(z)],$$

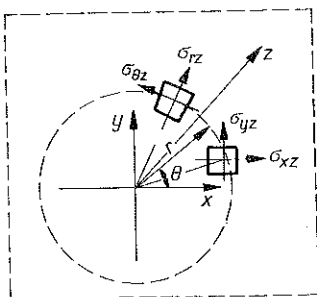
gdzie $\operatorname{Im} [f(z)]$ oznacza część urojoną pewnej funkcji analitycznej $f(z)$ zwanej dalej potencjałem zespolonym.

Biorąc pod uwagę (1.3) i warunki Cauchy'ego-Riemanna, które spełnia funkcja analityczna $f(z)$, można pokazać, że naprężenia dają się przedstawić w postaci

$$(1.7) \quad \sigma_{yz} + i\sigma_{xz} = f'(z),$$

czyli

$$(1.8) \quad \sigma_{yz} = \operatorname{Re} [F(z)], \quad \sigma_{xz} = \operatorname{Im} [F(z)],$$



Rys. 1

gdzie $F(z) = f'(z)$ jest funkcją analityczną. Tak więc przemieszczenie $w(x, y)$ oraz naprężenia $\sigma_{yz}(x, y)$ i $\sigma_{xz}(x, y)$ wyrażają się za pomocą jednego nieznanego potencjału zespolonego $f(z)$.

Przechodząc do współrzędnych cylindrycznych r, θ, z (rys. 1) otrzymujemy wzory

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{rz} &= \sigma_{xz} \cos \theta + \sigma_{yz} \sin \theta, \\ \sigma_{\theta z} &= -\sigma_{xz} \sin \theta + \sigma_{yz} \cos \theta, \end{aligned}$$

czyli

$$\sigma_{\theta z} + i\sigma_{rz} = e^{i\theta} (\sigma_{yz} + i\sigma_{xz}).$$

Związki (1.3) przyjmują postać

$$(1.10) \quad \sigma_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta},$$

składowe zaś stanu przemieszczenia (1.6) i naprężenia (1.7) wyrażają się w następujący sposób przez funkcję $f(z)$:

$$(1.11) \quad w(r, \theta) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} [f(re^{i\theta})],$$

$$(1.12) \quad \sigma_{\theta z} + i\sigma_{r z} = e^{i\theta} f'(re^{i\theta})$$

czyli

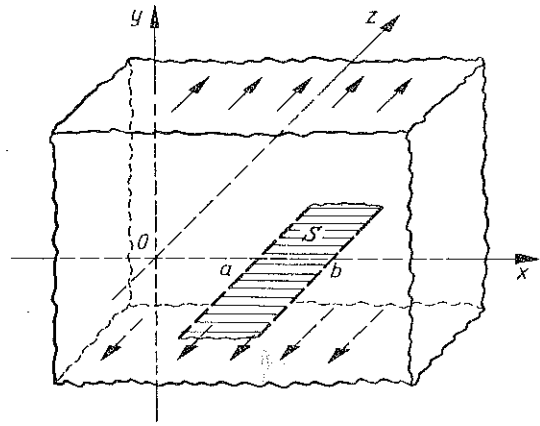
$$(1.13) \quad \sigma_{\theta z} = \operatorname{Re} [e^{i\theta} F(re^{i\theta})], \quad \sigma_{r z} = \operatorname{Im} [e^{i\theta} F(re^{i\theta})].$$

2. SZCZELINA GRIFFITHA W ANTYPŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

Rozważmy w antypłaskim stanie odkształcenia statyczne zagadnienie rozkładu naprężeń w nieskończonym, jednorodnym ośrodku sprężystym, zawierającym szczelinę typu Griffitha (rys. 2), czyli cięcie S określone w prostokątnym układzie współrzędnych x, y, z następująco:

$$a \leq x \leq b, \quad y=0, \quad -\infty < z < \infty.$$

Ze względu na to, że wszystkie wielkości opisujące stan przemieszczenia i naprężenia są niezależne od zmiennej z , rozważania nasze możemy ograniczyć do płaszczyzny xy . Wzdłuż osi x szczelina ma skończoną długość wynoszącą $b-a$, liczby zaś a i b są współrzędnymi jej wierzchołków ($0 < a < b$).



Rys. 2

Zakładamy, że w nieskończoności panuje równomierny stan naprężenia taki, że

$$(2.1) \quad \sigma_{yz}(x, y) = \tau, \quad \sigma_{xz}(x, y) = 0 \quad \text{dla} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty,$$

brzegi zaś szczeliny są wolne od naprężeń

$$(2.2) \quad \sigma_{yz}(x, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad x \in (a, b).$$

Biorąc pod uwagę nieciągłość przemieszczenia $w(x, y)$ na powierzchni S oraz powyższe warunki brzegowe, możemy stwierdzić, że potencjałem zespolonym (1.7) realizującym tak postawione zagadnienie brzegowe [1] jest funkcja

$$(2.3) \quad f(z) = \tau \sqrt{(z-a)(z-b)},$$

stąd

$$(2.4) \quad F(z) = f'(z) = \tau \frac{z-s}{\sqrt{(z-a)(z-b)}},$$

gdzie $s = (a+b)/2$.

Stosując oznaczenia zgodne z rys. 3

$$z-a=r_a e^{i\theta_a}, \quad z-b=r_b e^{i\theta_b}, \quad z-s=r_s e^{i\theta_s},$$

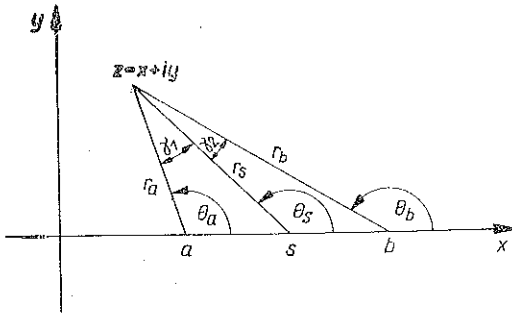
$$-\pi \leq \theta_i \leq \pi \quad \text{dla} \quad i=a, b, s$$

i korzystając z (1.8) otrzymujemy

$$(2.5) \quad \sigma_{yz}(x, y) = \tau \frac{r_s}{\sqrt{r_a r_b}} \cos \left[\theta_s - \frac{1}{2} (\theta_a + \theta_b) \right],$$

$$\sigma_{xz}(x, y) = \tau \frac{r_s}{\sqrt{r_a r_b}} \sin \left[\theta_s - \frac{1}{2} (\theta_a + \theta_b) \right].$$

Nietrudno sprawdzić, że powyższe naprężenia spełniają warunki brzegowe (2.1) i (2.2).



Rys. 3

Analizując wzory (2.5) dochodzimy do wniosków, że moduł kąta $|\theta_s - \frac{1}{2}(\theta_a + \theta_b)| = \frac{|\gamma_1 - \gamma_2|}{2}$ (rys. 3) jest bliski zera dla punktów nie leżących w pobliżu wierzchołków szczeliny, czyli niezerowe naprężenia σ_{xz} są też tam małe; na osi x zaś mamy

$$(2.6) \quad \sigma_{xz}(x, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad x < a$$

lub $x > b$

oraz

$$(2.7) \quad \sigma_{yz}(x, 0) = \tau \frac{|x-s|}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} \quad \text{dla} \quad x < a \quad \text{lub} \quad x > b,$$

czyli naprężenia $\sigma_{yz}(x, 0)$ mają dobrze znaną w teorii szczelin [2] osobliwość w punkcie $x=a$ i $x=b$. Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołkach szczeliny oznaczone odpowiednio przez K_a i K_b i zdefiniowane zgodnie z [2 i 3] wynoszą

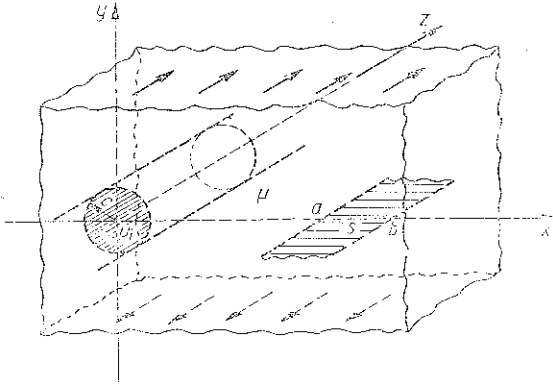
$$(2.8) \quad K_a = \lim_{x \rightarrow a^-} \sqrt{2(a-x)} \sigma_{yz}(x, 0) = \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{2(z-a)} F(z) = \tau \sqrt{\frac{b-a}{2}},$$

$$K_b = \lim_{x \rightarrow b^+} \sqrt{2(x-b)} \sigma_{yz}(x, 0) = \lim_{z \rightarrow b} \sqrt{2(z-b)} F(z) = \tau \sqrt{\frac{b-a}{2}}.$$

3. METODA ROZWIĄZYWANIA

Interesującym nas modelem (oznaczanym dalej przez M) będzie (rys. 4) nieograniczona przestrzeń sprężysta, znajdująca się w antypłaskim stanie odkształcenia pod wpływem równomiernego obciążenia $\sigma_{yz}(\infty) = \tau$ i zawierająca walcową inkluzję

kołową wykonaną z materiału o innych własnościach sprężystych o promieniu c i osi symetrii z oraz szczelinę Griffitha o wierzchołkach a i b na osi x , przy czym $0 < c < a < b$. Stałe μ_i i μ oznaczają odpowiednio moduły ścinania dla inkluzji i ośrodka sprężystego.



Rys. 4

Rozwiązanie zagadnienia odpowiadającego temu modelowi ma na celu zbadanie wpływu inkluzji na stan naprężenia wokół szczeliny. Ze względu na trudności w otrzymaniu ścisłego rozwiązania spełniającego wszystkie warunki brzegowe modelu M posłużymy się metodą przybliżoną, polegającą na kolejnym uwzględnianiu wpływu inkluzji i szczeliny, stosując przy tym uproszczone modele ośrodka zawierającego albo samą szczelinę, albo samą inkluzję. Tak więc zastosujemy metodę kolejnych przybliżeń (iteracji), która w odniesieniu do naszego modelu polega na tym, że stan naprężenia odpowiadający mu otrzymuje się z sumowania odpowiednio naprężeń pochodzących od samej szczeliny i od samej inkluzji. Jednak w celu uwzględnienia ich wzajemnego oddziaływania na siebie bierzemy pod uwagę kolejno naprężenia wynikające z rozwiązania zagadnienia ze szczeliną w obszarze zajmowanym przez inkluzję i odwrotnie. Wyznaczenie naprężeń dla M można symbolicznie przedstawić w następujący sposób:

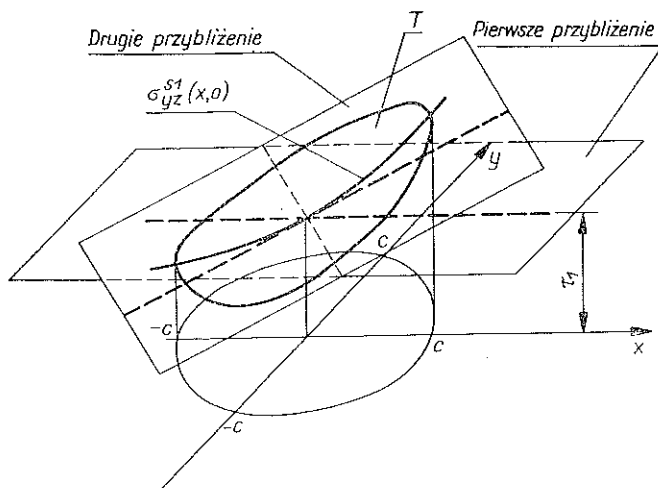
$$(3.1) \quad (M) = (M_{s1}) + (M_{i1}) + (M_{s2}) + (M_{i2}) + \dots,$$

gdzie (M_{s1}) oznacza stan naprężenia pochodzący od samej szczeliny, (M_{i1}) oznacza stan naprężenia pochodzący z oddziaływania inkluzji poddanej działaniu naprężeń (M_{s1}) , (M_{s2}) oznacza dodatkowe naprężenia pochodzące od szczeliny poddanej działaniu naprężeń (M_{i1}) , (M_{i2}) oznacza dodatkowe naprężenia od inkluzji przy uwzględnieniu stanu (M_{s2}) itd.

Nie wnikamy tutaj głęboko w problem zbieżności szeregu stanów naprężeń występujących w (3.1), jednak można stwierdzić, że zastosowana tu procedura będzie tym szybciej zbieżna, im dalej są położone od siebie szczelina i inkluzja.

Dla otrzymania przybliżonego rozwiązania ograniczymy się w (3.1) tylko do pierwszych trzech składników sumy. Ponadto obliczenia nasze będziemy przeprowadzać dla pierwszego i drugiego przybliżenia ze względu na zawiły charakter

rozwiązania (M_{s1}), pochodzącego od szczeliny w obszarze zajmowanym przez inkluzję. Otóż z rozwiązania (2.5) i (2.7) otrzymamy pewną zakrzywioną powierzchnię T naprężeń σ_{yz} dla $r \leq c$ przedstawioną orientacyjnie na rys. 5. Pierwsze przybliżenie



Rys. 5

będzie polegało na tym, że rzeczywisty stan naprężenia, wywołany przez szczelinę w obszarze zajmowanym przez inkluzję, aproksymujemy równomiernym stanem naprężenia

$$(3.2) \quad \sigma_{yz}^1(x, y) = \tau_1, \quad \sigma_{xz}^1(x, y) = 0,$$

gdzie τ_1 jest wartością naprężenia (2.7), oznaczonego tutaj przez $\sigma_{yz}^{s1}(x, 0)$ w środku symetrii inkluzji, czyli

$$(3.3) \quad \tau_1 = \sigma_{yz}^{s1}(0, 0) = \tau \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} > \tau.$$

Poszukując interpretacji geometrycznej stwierdzić należy, że pierwsze przybliżenie polega na zastąpieniu powierzchni T płaszczyzną $\sigma_{yz}^1 = \tau_1$ równoległą do płaszczyzny xy (rys. 5). Drugie przybliżenie natomiast będzie aproksymowało faktyczny stan naprężenia za pomocą stanu

$$(3.4) \quad \sigma_{yz}^2(x, y) = px + \tau_1, \quad \sigma_{xz}^2(x, y) = py,$$

gdzie

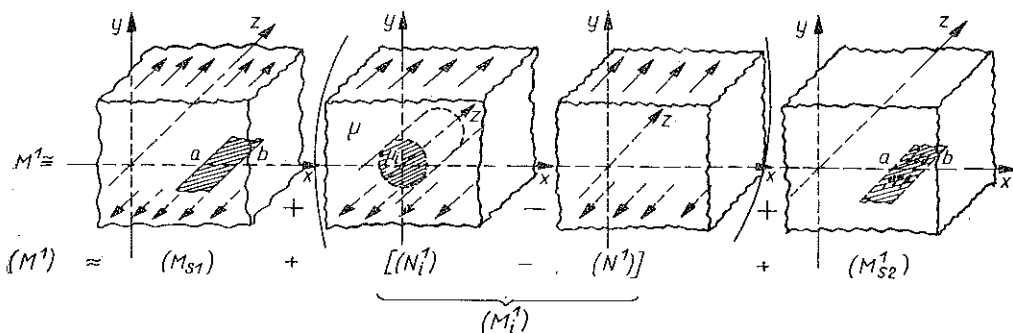
$$(3.5) \quad p = \left[\frac{d}{dx} \sigma_{yz}^{s1}(x, 0) \right]_{x=0} = \frac{\tau}{4ab} \frac{(b-a)^2}{\sqrt{ab}}.$$

Oznacza to zastąpienie powierzchni T naprężeń σ_{yz} i σ_{xz} płaszczyznami stycznymi do nich w środku symetrii inkluzji (rys. 5). Jak łatwo zauważyć, drugie przybliżenie jest uogólnieniem pierwszego oraz może okazać się konieczne dla szczeliny położonej bliżej inkluzji.

4. PIERWSZE PRZYBLIŻENIE

Zgodnie z p. 3 stan naprężenia odpowiadający modelowi M w pierwszym przybliżeniu otrzymamy przez sumowanie następujących stanów naprężeń (rys. 6):

$$(4.1) \quad (M^1) = (M_{s1}) + (M_{i1}^1) + (M_{s2}^1).$$



Rys. 6

Symbol (M_{s1}) oznacza stan naprężenia pochodzący od samej szczeliny, który realizuje potencjał zespolony (p. 2)

$$(4.2) \quad F_{s1}(z) = \frac{\tau(z-s)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}.$$

Symbol (M_{i1}^1) oznacza stan naprężenia pochodzący od oddziaływania inkluzji przy założeniu, że w obszarze zajmowanym przez inkluzję panuje równomierny stan naprężenia $\sigma_{yz} = \tau_1$ wywołany przez szczelinę.

Powstaje problem obliczenia naprężeń odpowiadających M_{i1}^1 . W tym celu rozpatrzmy dwa dodatkowe modele (rys. 6): N_i^1 oznaczający nieskończone ciało sprężyste, obciążone w nieskończoności siłami $\sigma_{yz}(\infty) = \tau_1$ i zawierające walcową inkluzję kołową oraz N^1 , oznaczający to samo ciało sprężyste obciążone w ten sam sposób, ale jednorodne (bez inkluzji). Stosując zasadę superpozycji, dla obszaru poza inkluzją mamy

$$(4.3) \quad (N_i^1) = (N^1) + (M_{i1}^1),$$

stąd

$$(4.4) \quad (M_{i1}^1) = (N_i^1) - (N^1).$$

Zajmijmy się więc znalezieniem stanu naprężenia (N_i^1) . Warunki brzegowe w nieskończoności i na krawędzi inkluzji mają następującą postać:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{yz}(\infty) &= \tau_1, & \sigma_{rz} &= \tau_1 \sin \theta \\ \sigma_{xz}(\infty) &= 0 & \text{czyli} & & \sigma_{\theta z} &= \tau_1 \cos \theta & \text{dla } r \rightarrow \infty, \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{rz}^i & \text{dla } r &= c, \\ w &= w^i & \text{dla } r &= c, \end{aligned}$$

gdzie indeks górny i odnosi się do inkluzji. Potencjały zespolone realizujące tak postawione zagadnienie brzegowe mają postać [4]:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} f(z) &= \tau_1 \left(z + \frac{\alpha c^2}{z} \right), & F(z) = f'(z) &= \tau_1 \left(1 - \frac{\alpha c^2}{z^2} \right) & \text{dla } r \geq c, \\ f^i(z) &= \tau_1 \alpha^i z, & F^i(z) = f'^i(z) &= \tau_1 \alpha^i & \text{dla } r \leq c. \end{aligned}$$

Stałe α i α^i obliczone z warunków (4.5)₃ i (4.5)₄ przy wykorzystaniu wzorów (1.10)–(1.13) wynoszą

$$(4.7) \quad \alpha = \frac{\mu_i - \mu}{\mu_i + \mu}; \quad \alpha^i = \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu},$$

przy czym $\alpha = 1$ odpowiada przypadkowi doskonale sztywnej inkluzji ($\mu/\mu_i \rightarrow 0$), a $\alpha = -1$ — przypadkowi otworu cylindrycznego (puszki walcowej) ($\mu_i/\mu \rightarrow 0$). Stan naprężenia modelu N_i^1 spełniający warunki (4.5) będzie więc określony przez funkcje

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{rz} &= \begin{cases} \tau_1 \alpha^i \sin \theta & \text{dla } r \leq c, \\ \tau_1 \left(1 + \frac{\alpha c^2}{r^2} \right) \sin \theta & \text{dla } r \geq c, \end{cases} \\ \sigma_{\theta z} &= \begin{cases} \tau_1 \alpha^i \cos \theta & \text{dla } r \leq c, \\ \tau_1 \left(1 - \frac{\alpha c^2}{r^2} \right) \cos \theta & \text{dla } r \geq c. \end{cases} \end{aligned}$$

Uwzględniając wzory (4.4), (4.6) i prosty potencjał zespolony $F(z) = \tau_1$ rozwiązujący model N^1 , otrzymamy następujący potencjał zespolony $F_i^1(z)$ realizujący model M_i^1 :

$$(4.9) \quad F_i^1(z) = -\frac{\tau_1 \alpha c^2}{z^2} \quad \text{dla } |z| > c.$$

Przejdźmy teraz do modelu M_{s2}^1 , dla którego rozwiązanie polega na obliczeniu naprężeń pochodzących od szczeliny przy uwzględnieniu oddziaływania inkluzji z M_i^1 na szczelinę. Rozważmy więc zagadnienie rozkładu naprężeń w nieograniczonym ciele sprężystym, zawierającym szczelinę Griffitha obciążoną naprężeniem $\sigma_{yz}(x, 0)$ dla $x \in (a, b)$, które jest przeciwnego znaku niż naprężenie otrzymywane z modelu M_i^1 . Warunki brzegowe będą zatem na mocy (4.9) następujące:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{yz}(x, 0) &= +\frac{\tau_1 \alpha c^2}{x^2} & \text{dla } x \in (a, b), \\ \sigma_{yz}(\infty) &= \sigma_{xz}(\infty) = 0. \end{aligned}$$

Zagadnienie powyższe rozwiązuje potencjał zespolony [4, 5]

$$(4.11) \quad F_{s2}^1(z) = \frac{\tau_1 \alpha c^2}{\pi \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)}}{t^2(t-z)} dt.$$

W celu obliczenia całki występującej w (4.11) przedstawia się ją w postaci kombinacji następujących całek:

$$(4.12) \quad I_0(z) = \int_a^b \frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}, \quad I_1 = \int_a^b \frac{dt}{t\sqrt{R(t)}}, \quad I_2 = \int_a^b \frac{dt}{t^2\sqrt{R(t)}},$$

gdzie $R(t) = (t-a)(b-t)$. Całkę $I_0(z)$ oblicza się za pomocą twierdzenia o reszkuach; wynosi ona

$$(4.13) \quad I_0(z) = -\frac{\pi}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad \text{dla} \quad z \notin \langle a, b \rangle,$$

pozostałe zaś całki wynoszą [6]

$$(4.14) \quad I_1 = \pi u, \quad I_2 = \pi s u^3,$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $u = 1/\sqrt{ab}$.

Po dość żmudnych obliczeniach otrzymujemy w końcu

$$(4.15) \quad F_{s_2}^1(z) = \frac{\tau_1 \alpha c^2}{z^2} + \frac{\tau \alpha s c^2}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(-\frac{s u^2}{z} + \frac{1}{z^2} \right).$$

Reasumując nasze rozważania, bierzemy pod uwagę (4.1), (4.2), (4.9), (4.15) i otrzymujemy końcowe wyrażenia na potencjał zespolony $F^1(z)$ realizujący pierwsze przybliżenie:

$$(4.16) \quad F^1(z) \approx F_{s_1}(z) + F_i^1(z) + F_{s_2}^1(z) = \frac{\tau(z-s)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{\tau \alpha s c^2}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left(-\frac{s u^2}{z} + \frac{1}{z^2} \right).$$

W powyższym wyrażeniu pierwszy składnik sumy odpowiada lokalnemu stanowi naprężeń pochodzących od samej szczeliny, natomiast drugi wyraz przedstawia wkład do stanu naprężenia wynikający z występowania inkluzji. Z postaci jego wnioskujemy, że wpływ inkluzji na stan naprężenia wokół szczeliny ma charakter ilościowy, a nie jakościowy.

5. DRUGIE PRZYBLIŻENIE

Podobne rozumowanie jak w p. 4 przenosi się na przypadek drugiego przybliżenia (p. 3). Mamy więc (rys. 7)

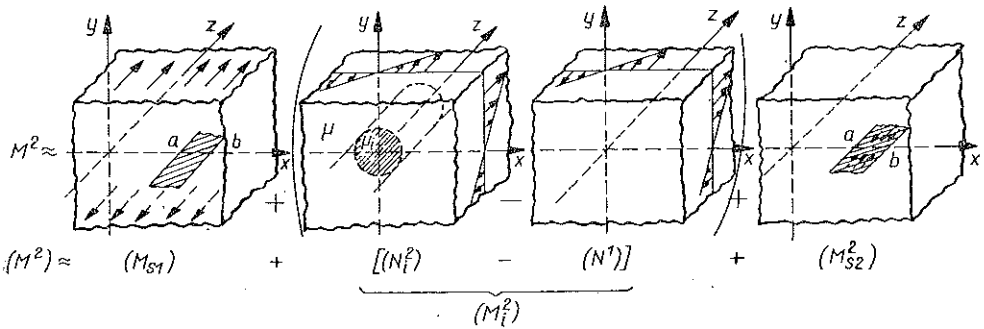
$$(5.1) \quad (M^2) \approx (M_{s_1}) + (M_i^2) + (M_{s_2}^2).$$

Dla wyznaczenia stanu naprężenia (M_i^2) , pochodzącego od oddziaływania inkluzji, konstruuje się model N_i^2 (rys. 7), który będzie teraz oznaczał nieskończone

ciało sprężyste, zawierające walcową inkluzję kołową z następującymi warunkami brzegowymi w nieskończoności i na krawędzi inkluzji zgodnie z (3.4):

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{yz}(\infty) &= px + \tau_1, \\ \sigma_{xz}(\infty) &= py, \\ \sigma_{rz} &= \sigma_{rz}^i, & \text{dla } r=c, \\ w &= w^i, & \text{dla } r=c \end{aligned}$$

oraz model N^2 oznaczający to samo ciało, ale jednorodne (bez inkluzji) i tak samo obciążone w nieskończoności.



Rys. 7

Z zasady superpozycji wnioskujemy, podobnie jak w p. 4, że

$$(5.3) \quad (M_i^2) = (N_i^2) - (N^2).$$

Potencjały zespolone rozwiązujące N_i^2 mają postać [4]:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} f(z) &= \frac{p}{2} \left(z^2 + \frac{\beta_2 c^4}{z^2} \right) + \tau_1 \left(z + \frac{\alpha_2 c^2}{z} \right), \\ F(z) = f'(z) &= p \left(z - \frac{\beta_2 c^4}{z^3} \right) + \tau_1 \left(1 - \frac{\alpha_2 c^2}{z^2} \right) \quad \text{dla } r \geq c, \\ f^i(z) &= \frac{p}{2} \beta_2^i z^2 + \tau_2 \alpha_2^i z, \quad F(z) = f^{i'}(z) = p \beta_2^i z + \tau_1 \alpha_2^i \quad \text{dla } r \leq c. \end{aligned}$$

Stałe $\alpha_2, \beta_2, \alpha_2^i$ i β_2^i , obliczone z warunków brzegowych (5.2)₃ i (5.2)₄ przy wykorzystaniu wzorów (1.10) – (1.13), wyrażają się w prosty sposób przez stałe α i α^i :

$$(5.5) \quad \alpha_2 = \beta_2 = \alpha, \quad \alpha_2^i = \beta_2^i = \alpha^i.$$

Uwzględniając związki (5.3) – (5.5) oraz potencjał zespolony $F(z) = pz + \tau_1$ realizujący model N^2 , otrzymamy następujący potencjał zespolony $F_i^2(z)$ dla modelu M_i^2 :

$$(5.6) \quad F_i^2(z) = -\frac{\alpha c^2 (\tau_1 z + p c^2)}{z^3} \quad \text{dla } |z| > c.$$

Takie same postępowanie, jak przy modelu $M_{s_2}^1$ w p. 4, prowadzi do następujących warunków brzegowych dla $M_{s_2}^2$:

$$(5.7) \quad \sigma_{yz}(x, 0) = \frac{\alpha c^2 (\tau_1 x + pc^2)}{x^3} \quad \text{dla } x \in (a, b),$$

$$\sigma_{yz}(\infty) = \sigma_{xz}(\infty) = 0$$

oraz potencjału zespolonego rozwiązującego ten model [4 i 5]

$$(5.8) \quad F_{s_2}^2(z) = \frac{\alpha c^2}{\pi \sqrt{(z-a)(z-b)}} \int_a^b \frac{\sqrt{(t-a)(b-t)} (\tau_1 t + pc^2)}{t^3 (t-z)} dt.$$

Całkę, występującą w powyższym wzorze, oblicza się podobnie jak w p. 4, przedstawiając ją w postaci kombinacji całek (4.12) i dodatkowej całki I_3 równej [6]:

$$(5.9) \quad I_3 = \int_a^b \frac{dt}{t^3 \sqrt{R(t)}} = \frac{1}{2} \pi u^3 (3k+2),$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $k = s^2 u^2 - 1$.

Ostateczny rezultat tych obliczeń ma postać

$$(5.10) \quad F_{s_2}^2(z) = \frac{\alpha c^2 (\tau_1 z + pc^2)}{z^3} + \frac{\tau \alpha c^2}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \left[\frac{-u^2 (s^2 + 0,5c^2 k^2)}{z} + \frac{s(1 - ku^2 c^2)}{z^2} + \frac{kc^2}{z^3} \right].$$

Biorąc zatem pod uwagę (5.1), (5.3), (5.6) i (5.10) otrzymamy wreszcie wyrażenie na potencjał zespolony $F^2(z)$ realizujący drugie przybliżenie

$$(5.11) \quad F^2(z) \approx F_{s_1}(z) + F_i^2(z) + F_{s_2}^2(z) = \frac{\tau(z-s)}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{\tau \alpha c^2}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{-u^2 s^2}{z} + \frac{s}{z^2} \right) + kc^2 \left(\frac{-ku^2}{2z} + \frac{su^2}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right) \right].$$

W powyższym wyrażeniu, znowu pierwszy składnik sumy odpowiada stanowi naprężeń pochodzących od samej szczeliny (p. 2), natomiast drugi wyraz przedstawia wkład do stanu naprężenia, wynikający z występowania inkluzji, przy czym wyrażenia w okrągłych nawiasach ilustrują odpowiednio zmianę naprężeń w pierwszym i drugim przybliżeniu.

6. DYSKUSJA WYNIKÓW

Dla określenia wpływu inkluzji na stan naprężenia wokół wierzchołków szczeliny zastosowano przybliżoną metodę kolejnych iteracji w pierwszym i drugim przybliżeniu. Z rozwiązań przedstawionych w p. 4 i 5 wynika bezpośrednio, że wpływ ten

ma charakter ilościowy, a więc występowanie inkluzji w ciele zawierającym szczelinę nie zmienia charakteru osobliwości naprężeń w wierzchołkach szczeliny i powoduje jedynie zmiany ilościowe naprężeń w sąsiedztwie szczeliny. Jako miarę tych zmian przyjmujemy odpowiednio stosunki współczynników intensywności naprężeń w wierzchołkach a i b szczeliny: K_a^1/K_a , K_b^1/K_b , K_a^2/K_a i K_b^2/K_b , gdzie indeks górny 1 i 2 odnosi się odpowiednio do pierwszego i drugiego przybliżenia, a K_a , K_b są określone przez (2.8). Z definicji tych współczynników (2.8) wynika, że

$$(6.1) \quad \frac{K_a^i}{K_a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{F^i(z)}{F(z)}, \quad \frac{K_b^i}{K_b} = \lim_{z \rightarrow b} \frac{F^i(z)}{F(z)}, \quad i=1 \text{ lub } 2.$$

Biorąc pod uwagę wyrażenia (2.4), (4.16) i (5.11), obliczamy granice występujące w (6.1) i otrzymujemy ostatecznie następujące rezultaty dla pierwszego przybliżenia:

$$(6.2) \quad \frac{K_a^1}{K_a} = 1 - \alpha c^2 \frac{a+b}{2a^2 b}, \quad \frac{K_b^1}{K_b} = 1 - \alpha c^2 \frac{a+b}{2ab^2}$$

oraz dla drugiego przybliżenia

$$(6.3) \quad \frac{K_a^2}{K_a} = 1 - \alpha c^2 \frac{a+b}{2a^2 b} - \alpha c^4 \frac{(a+3b)(b-a)^2}{16a^4 b^3},$$

$$\frac{K_b^2}{K_b} = 1 - \alpha c^2 \frac{a+b}{2ab^2} - \alpha c^4 \frac{(3a+b)(b-a)^2}{16a^3 b^4}.$$

Wygodnie jest wprowadzić następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(6.4) \quad \frac{a}{c} = A, \quad \frac{b}{c} = B;$$

wówczas związki (6.2) i (6.3) przyjmą postać

$$(6.5) \quad \frac{K_a^1}{K_a} = 1 - \alpha \frac{A+B}{2A^2 B}, \quad \frac{K_b^1}{K_b} = 1 - \alpha \frac{A+B}{2AB^2},$$

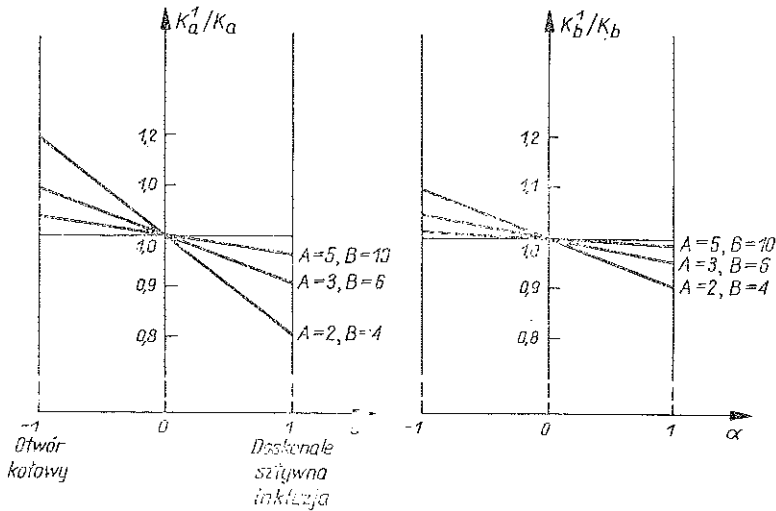
$$(6.6) \quad \frac{K_a^2}{K_a} = 1 - \alpha \frac{A+B}{2A^2 B} - \alpha \frac{(A+3B)(B-A)^2}{16A^4 B^3},$$

$$\frac{K_b^2}{K_b} = 1 - \alpha \frac{A+B}{2AB^2} - \alpha \frac{(3A+B)(B-A)^2}{16A^3 B^4}.$$

Przejdźmy do analizy otrzymanych wyników. Stosunek współczynnika intensywności naprężeń z inkluzją do współczynnika intensywności naprężeń bez inkluzji jest funkcją czterech zmiennych a, b, c, α lub trzech argumentów A, B, α .

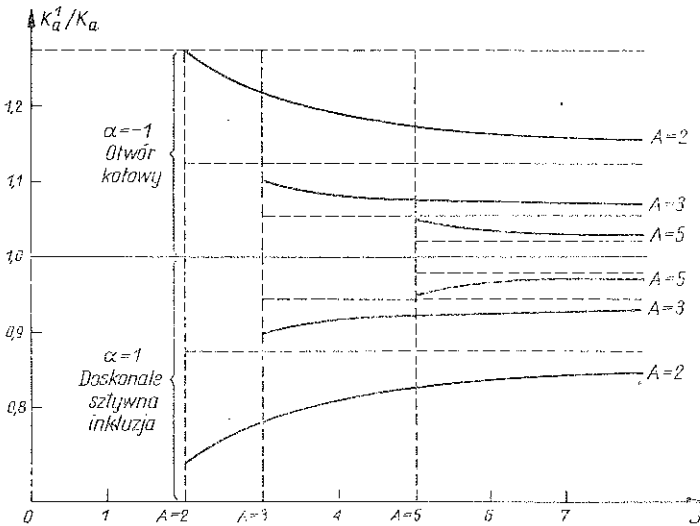
Rysunek 8 przedstawia zmianę K_a^1/K_a i K_b^1/K_b w zależności od α (p. 6.5) ustalonych trzech położenia szczeliny względem inkluzji, czyli ilustruje wpływ sztywności inkluzji na zmianę naprężeń w sąsiedztwie szczeliny. Analiza tego rysunku prowadzi do następujących wniosków.

1) Występowanie bardziej podatnej inkluzji ($\mu_i < \mu$) powoduje zwiększanie się współczynnika intensywności naprężeń, podczas gdy sztywna inkluzja ($\mu_i > \mu$) zmniejsza go; zmiany te są tym większe, im szczelina położona jest bliżej inkluzji.



Rys. 8

2) Wpływ inkluzji na naprężenia w otoczeniu wierzchołka b szczeliny jest dużo mniejszy niż w wierzchołku a . Na przykład otwór cylindryczny ($\alpha = -1$) zwiększa współczynnik intensywności naprężeń w wierzchołku a w przybliżeniu o 20% i w wierzchołku b o 10%, podczas gdy doskonale sztywna inkluzja zmniejsza go o taki sam procent przy założeniu, że $A=2, B=4$.



Rys. 9

Rysunek 9 przedstawia zmianę stosunku K_a^1/K_a w zależności od długości szczeliny (zmienia się b lub B) przy ustalonych a i c ($A=a/c$) dla dwóch skrajnych przypadków: otworu kołowego i doskonale sztywnej inkluzji. Dla krótszych szczelin obserwujemy zwiększanie się (zmniejszanie) współczynnika intensywności naprężeń w obecności otworu (doskonale sztywnej inkluzji).

Dokonyjemy jeszcze formalnego przejścia do szczeliny półnieskończonej (o wierzchołku $b \rightarrow \infty$). Wówczas z (6.6)₁ otrzymamy

$$(6.7) \quad \frac{K_a^2}{K_a} = 1 - \alpha \frac{1}{2A^2} - \alpha \frac{3}{16A^4}.$$

Na uwagę zasługuje ponadto fakt, że w rozważonych przez nas przykładach już pierwsze przybliżenie prowadzi do zupełnie zadowalających wyników. Świadczy o tym analiza wyrażeń wynikających z drugiego przybliżenia: nawet wtedy, gdy szczelina znajduje się stosunkowo blisko inkluzji kołowej ($A=a/c=1,5$, $B=b/c=3$), to widać z poniższego zestawienia, że wkład drugiego przybliżenia jest znikomy (tablica 1).

Tablica 1

| | Pierwsze przybliżenie | | Drugie przybliżenie | |
|----------------------------------|-----------------------|-------------|---------------------|-------------|
| | K_a^1/K_a | K_b^1/K_b | K_a^2/K_a | K_b^2/K_b |
| Otwór kołowy ($\alpha=-1$): | 1,33 | 1,167 | 1,34 | 1,17 |
| Inkluzja sztywna ($\alpha=1$): | 0,67 | 0,833 | 0,66 | 0,83 |

Wyniki otrzymane w tej pracy są zbliżone do rezultatów pracy [7], gdzie rozpatrzone podobne zagadnienie, ale w płaskim stanie naprężenia; otrzymano rozwiązanie dokonując dość skomplikowanych obliczeń numerycznych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. B. A. BILBY, J. D. ESHELBY, *Dislocations and the theory of fracture*, Fracture, 1, Academic Press New York and London 1968.
2. I. N. SNEDDON, M. LOWENGRUB, *Crack problems in the classical theory of elasticity*, J. Wiley and Sons, Inc. New York—London—Sydney 1969.
3. G. C. SIIH, H. LIEBOWITZ, *Mathematical theories of brittle fracture*, Fracture, 2, Academic Press, New York and London 1968.
4. Н. И. МУСКЕЛИШВИЛИ, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Изд. Наука, Москва 1966.
5. J. R. RICE, *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*, Fracture, 2, Academic Press, New York and London 1968.
6. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РЫЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений*, Физматгиз, Москва 1962.
7. О. ТАМАТЕ, *The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension*, Int. J. Fracture Mech., 4, 3, 1968.

Резюме

ШЕЛЬ ГРИФФИСА И ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ КРУГОВОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ В АНТИПЛОСКОМ ДЕФОРМАЦИОННОМ СОСТОЯНИИ

Бесконечное упругое тело, содержащее щель типа Гриффиса и цилиндрическое круговое включение из другого упругого материала, находится в антиплоском деформационном состоянии под влиянием равномерной нагрузки касательными силами. Главной целью работы является определение влияния включения на напряженное состояние вокруг щели, а в частности на коэффициент интенсивности напряжений в вершинах щели. Для получения решения так поставленной задачи применен метод последовательных приближений и учтены первое и второе приближения.

SUMMARY

A GRIFFITH CRACK AND A CIRCULAR CYLINDRICAL INCLUSION IN ANTIPLANE STATE OF STRAIN

An infinite elastic body containing a Griffith crack and a circular cylindrical inclusion of a different elastic material, is subject to an antiplane state of strain under the action of uniformly distributed shearing forces. The main aim of the paper consists in the determination of the influence of the inclusion on the state of stress around the crack, and on the stress intensity factor at the crack tip in particular. A method of consecutive approximations (the first and second approximations) is used.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 czerwca 1973 r.
