

SYNTEZA UKŁADÓW WIBROIZOLACJI Z KOMPENSACJĄ

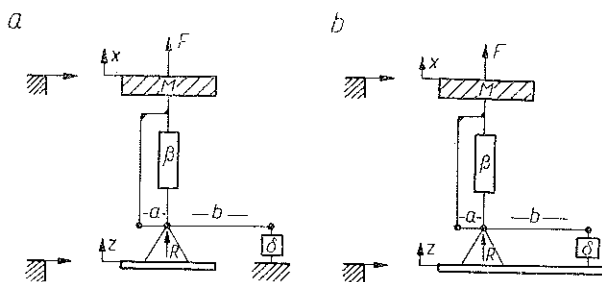
CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

1. WSTĘP

W pracy [1] poświęconej układom wibroizolacji wykazano, że zastosowanie układu dźwigniowego z kompensacją bezwładnościową daje dla określonej częstotliwości wymuszenia kinematycznego prawie zupełną redukcję amplitudy drgań amortyzowanego obiektu. Jak się okazuje, przy odpowiednim doborze parametrów układu kompensacji możliwa jest w układzie jednoczesna wibroizolacja sił i przemieszczeń. Wymienione wyżej zalety układów z kompensacją bezwładnościową stwarzają potrzebę badań wibroizolacji o dowolnym typie kompensacji, a następnie syntezy wibroizolatorów o danych własnościach.

2. DŹWIGNIOWE SYSTEMY WIBROIZOLACJI Z KOMPENSACJĄ

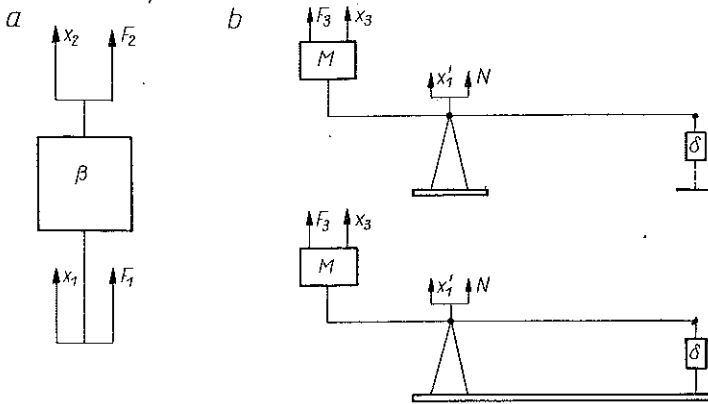
Pod pojęciem dźwigniowego systemu wibroizolacji z kompensacją będziemy rozumieć w dalszym ciągu układ złożony z amortyzowanego obiektu o masie M , układu nośnego β , dźwigni o przekładni $\alpha \neq 0$ oraz układu kompensacyjnego δ . Zakładamy przy tym, że oprócz masy M , przekładni α znamy macierze receptancji operatorowej (podatności dynamicznej) układu nośnego $\{\beta_{ij}\}$ oraz układu kompensacji $\{\delta_{ij}\}$. Niech na tak określony system wibroizolacji działa wymuszenie siłowe



Rys. 1

$F = F(t)$ oraz przemieszczeniowe $z = z(t)$ tak, jak przedstawiono na rys. 1a i 1b. Układ kompensacji z rys. 1a można nazwać jednowejściowym, układ zaś z rys. 1b dwuwiejściowym, gdyż w tym przypadku układ δ poddany jest wymuszeniu pochodzącemu od podstawy i od końca dźwigni.

Parametry ruchu systemów z rys. 1a i 1b, jakie nas interesują, to przemieszczenie bezwzględne amortyzowanego obiektu x oraz wielkość siły R przekazywanej na podstawę. W celu obliczenia tych wielkości dokonajmy rozkładu systemów z rys. 1a i 1b na podukłady, tak jak na rys. 2. Jak łatwo zauważyć, rys. 2a przedstawia układ nośny β , a rys. 2b uwidacznia dźwignię z układem kompensacyjnym δ jedno- i dwujęciowym na jednym końcu i masą obiektu amortyzowanego M na drugim końcu.



Rys. 2

Ponieważ założyliśmy znajomość macierzy podatności operatorowych, to dla układu nośnego β (rys. 2a) możemy napisać [2]

$$(2.1) \quad x_1 = \beta_{11} F_1 + \beta_{12} F_2, \quad x_2 = \beta_{21} F_1 + \beta_{22} F_2, \quad \beta_{21} = \beta_{12}.$$

Przyjmując, że dane są wielkości x_1 i F_2 , po przekształceniach dostaniemy

$$(2.2) \quad x_2 = \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} x_1 + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) F_2, \quad F_1 = \frac{x_1 - \beta_{21} F_2}{\beta_{11}}.$$

Obliczmy obecnie siły i przemieszczenia związane z dźwignią i układem kompensacji. Rysując dźwignię w położeniu pośrednim i zaznaczając działające siły, mamy układ przedstawiony na rys. 3.

Z rysunku łatwo zauważyć, że przemieszczenie dźwigni wyniesie

$$(2.3) \quad w = x'_1 + \frac{b}{a} (x'_1 - x_3) = (1 + \alpha) x'_1 - \alpha x_3, \quad \alpha = \frac{b}{a}.$$

Przechodząc do obliczeń związków sił i przemieszczeń dla dźwigni trzeba wspomnieć, że na rys. 3 $M s^2 x_3$ ($s = d/dt$) określa siłę bezwładności obiektu amortyzowanego, a S siłę reakcji układu kompensacyjnego na ruch końca dźwigni W . Obliczając momenty sił działających na dźwignię względem punktu przyłożenia przemieszczenia x_1 i x_3 , kolejno mamy

$$(2.4) \quad M s^2 x_3 - \alpha S = F_3$$

oraz

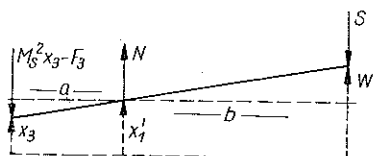
$$(2.5) \quad N = (1 + \alpha) S.$$

Jak widać z powyższych wzorów do dalszych obliczeń konieczna jest znajomość reakcji S układu kompensacyjnego, którą należy obliczyć oddzielnie dla układu jedno- i dwuwęjsiowego. Posługując się rys. 4 w powiązaniu z rys. 3, 2, 1, mamy dla układu jedno- i dwuwęjsiowego (rys. 4a)

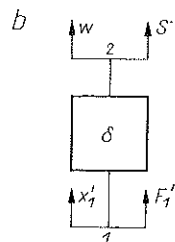
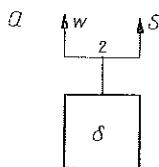
$$(2.6) \quad w = \delta_{22} S, \quad S = \frac{w}{\delta_{22}} = [(1 + \alpha) x'_1 - \alpha x_3] \delta_{22}^{-1}$$

oraz dla układu dwuwęjsiowego (rys. 4b)

$$(2.7) \quad w = \delta_{22} S + \delta_{21} F'_1, \quad x'_1 = \delta_{21} S + \delta_{11} F'_1.$$



Rys. 3



Rys. 4

Ponieważ x'_1 uważamy za dane, to po wyeliminowaniu F'_1 z ostatnich związków mamy

$$(2.8) \quad S = \frac{w - \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} x'_1}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} = \frac{\left(1 + \alpha - \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right) x'_1 - \alpha x_3}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}}.$$

Posługując się z kolei wzorami (2.6) i (2.8) możemy ze wzorów (2.4) i (2.5) znaleźć podatność operatorową dźwigni i wielkość siły N . Wykonując to dla układu jedno-węjsiowego znajdziemy

$$(2.9) \quad x_3 = \frac{\alpha(1 + \alpha) \delta_{22}^{-1}}{Ms^2 + \alpha^2 \delta_{22}^{-1}} x'_1 + \frac{F_3}{Ms^2 + \alpha^2 \delta_{22}^{-1}} = \gamma_{3x} x'_1 + \gamma_{3F} F_3,$$

$$N = [(1 + \alpha)^2 x'_1 - \alpha(1 + \alpha) x_3] \delta_{22}^{-1}.$$

Wprowadzone wyżej nowe wielkości, to odpowiednio: γ_{3x} oznacza podatność operatorową dźwigni na wymuszenie przemieszczeniowe, x_1 i γ_{3F} — podatność operatorową na wymuszenie siłowe F_3 .

Powtarzając tę samą operację dla dwuwęjsiowego układu kompensacji, otrzymamy

$$(2.10) \quad x_3 = \left[Ms^2 + \frac{\alpha^2}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} \right]^{-1} \left[\frac{\alpha \left(1 + \alpha - \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right)}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} x'_1 + F_3 \right] = \gamma_{3x} x'_1 + \gamma_{3F} F_3,$$

$$N = \frac{1 + \alpha}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} \left[\left(1 + \alpha - \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}\right) x'_1 - \alpha x_3 \right],$$

przy czym γ_{3x} i γ_{3F} mają tu takie samo znaczenie jak w (2.9), lecz inną postać.

Mamy już wyprowadzone wzory na wszystkie wielkości wyjściowe dla poszczególnych układów systemu wibroizolacji. Możemy w związku z tym przystąpić do jego syntezy. Warunki połączenia układów w system mają na podstawie rysunków 2 i 1 postać

$$(2.11) \quad \begin{aligned} x_1 = x'_1 = z, \quad x_2 = x_3 = \dot{x}, \\ N + F_1 = R, \quad F_2 + F_3 = F. \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe warunki łącznie ze wzorami (2.10), (2.9) i (2.2) po przekształceniach uzyskamy wzory na przemieszczenie obiektu x i siłę R przekazywaną na podstawę.

Dla jednoweściowego układu kompensacji znajdziemy

$$(2.12) \quad \begin{aligned} x = & \left[1 + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) (Ms^2 + \alpha^2 \delta_{22}^{-1}) \right]^{-1} \left\{ \left[\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) \alpha (1 + \alpha) \delta_{22}^{-1} \right] z + \left[\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right] F \right\}, \\ R = & \left[1 + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) (Ms^2 + \alpha^2 \delta_{22}^{-1}) \right]^{-1} \left\{ \left[\frac{1}{\beta_{11}} + \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}} (Ms^2 + \alpha^2 \delta_{22}^{-1}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1 + \alpha}{\delta_{22}} \left(1 + \alpha - 2\alpha \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} \right) + \frac{(1 + \alpha)^2}{\delta_{22}} \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) Ms^2 \right] z - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) \frac{\alpha (1 + \alpha)}{\delta_{22}} \right] F \right\}. \end{aligned}$$

Dla dwuweściowego układu kompensacji otrzymamy

$$(2.13) \quad \begin{aligned} x = & \left[1 + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) \left(Ms^2 + \frac{\alpha^2}{\delta_{22} - \frac{\delta_{11}^2}{\delta_{11}}} \right) \right]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) \frac{\alpha \left(1 + \alpha - \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} \right)}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} \right] z + \left[\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right] F \right\}, \\ R = & \left[1 + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) \left(Ms^2 + \frac{\alpha^2}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} \right) \right]^{-1} \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{1}{\beta_{11}} + \frac{(1 + \alpha)^2 + \alpha \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} - 2\alpha (1 + \alpha) \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}}}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} + \frac{\left(1 + \alpha - \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} \right) (1 + \alpha)}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} \right] z - \right. \end{aligned}$$

$$(2.13) \quad \left. \begin{aligned} & \times \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) M s^2 + \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}} \left(M s^2 + \frac{\alpha^2}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} \right) \right] z + \\ & - \left[\frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} + \left(\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} \right) \frac{\alpha(1+\alpha)}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}^2}{\delta_{11}}} \right] F \end{aligned} \right\}$$

Analizując ogólnie powyższe rezultaty można zauważyć, że niezależnie od rodzaju układu kompensacji postać licznika przemieszczenia obiektu x z tytułu działania siły wymuszającej F jest taka sama. Co więcej, w ramach pierwszego układu kompensacji składowe: przemieszczenia z tytułu wymuszenia kinematycznego, czyli $x(z)$, oraz siły przekazywanej na podłoże z tytułu wymuszenia siłowego, czyli $R(F)$, są takie same lub podobne. Widać więc możliwość syntezy systemu wibroizolacji o własnościach wibroizolacji siłowej i przemieszczeniowej.

3. WIBROIZOLACJA Z KOMPENSACJĄ A INWARIANTNOŚĆ SYSTEMU WZGLĘDEM WYMUSZEŃ

Przeprowadzona wyżej analiza ogólna otrzymanych wyrażeń na x i R daje możliwość uogólnienia ich zapisu do postaci

$$(3.1) \quad x = \frac{E(s)}{A(s)} z + \frac{C(s)}{A(s)} F, \quad R = \frac{D(s)}{A(s)} z + \frac{B(s)}{A(s)} F,$$

gdzie A, B, C, D i E są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych względem operatora $s = d/dt$, przy czym jak wiadomo dla drgań harmonicznnych można zastąpić ten operator «urojoną» częstotliwością wymuszenia, np. $s = i\omega$.

Operatorowe równania (3.1) są identyczne z równaniem procesu regulacji przy występowaniu zakłóceń [3] (przy zerowych warunkach początkowych), przy czym w naszym przypadku zakłóceniem może być wymuszenie przez z lub F . Okazuje się, że możliwe jest takie skonstruowanie układu regulacji, a więc i rozpatrywanych systemów wibroizolacji, zapewniające inwariantność układu względem zakłóceń. Według [4] trzy podstawowe warunki inwariantności napisane w naszym przypadku dla wymuszenia F mają postać

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \text{a) } B(s) \neq 0, \quad F=0, \\ & \text{b) } B(s)=0, \quad F \neq 0, \\ & \text{c) } B(s) \neq 0, \quad F \neq 0, \quad \frac{B(s)F}{A(s)} = 0. \end{aligned}$$

Łatwo spostrzec, że warunek pierwszy jest trywialny, $F=0$; aby rozpatrzeć dwa pozostałe, zwróćmy uwagę, że w rzeczywistości

$$B(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n, \quad A(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m,$$

$m > n$, a współczynniki b_i i a_i są funkcjami parametrów systemu wibroizolacji.

Wobec tego dla spełnienia drugiego warunku inwariantności względem wymuszeń współczynniki wielomianu $B(s)$ przy każdej potędze s muszą się zerować, $b_l=0$, $l=1, \dots, n$ — w wyniku odpowiedniego doboru struktury systemu (kompensacji) i parametrów podukładów β i δ . Warto tu wskazać, że tak zapewniona inwariantność jest niezależna od postaci zakłócenia $F=F(t)$. Trzeci przypadek inwariantności układu względem zakłóceń otrzymujemy wtedy, gdy iloraz operatorów działając na funkcję $F(t)$ daje w wyniku zero (3.2.c), a więc warunki szczegółowe muszą być dostosowane do konkretnej funkcji zakłóceń. W teorii drgań warunek ten jest szeroko stosowany w eliminatorach drgań, gdyż przy wymuszeniu harmonicznym $F=F_0 e^{i\omega t}$ dla tego przypadku z (3.2.c) otrzymujemy $A(i\omega) \neq 0$, $B(i\omega) = 0$. Jest to warunek działania dynamicznego eliminatora drgań lub mówiąc szerzej warunek antyrezonansu w obiekcie mechanicznym. W sensie wspomnianej już pracy [1] jest to również warunek wibroizolacji dla układów z kompensacją bezwładnościową.

Tak więc doszliśmy do stwierdzenia, że warunki inwariantności względem zakłóceń dla układów regulacji są przez analogię warunkami szeroko pojętej wibroizolacji przemieszczeniowej i siłowej. W związku z tym nasuwa się pytanie, czy możliwe są systemy wibroizolacji pracujące na mocy drugiego warunku inwariantności odnoszące się do wszystkich typów zakłóceń. Tym bardziej, że dla układów mechanicznych typu łańcuchowego zamkniętego wykazano inwariantność siły rozwijanej w k -tym ogniwie względem dowolnego typu wymuszenia [5].

Z tego co powiedziano wyżej wynika, że inwariantność systemu wibroizolacji względem określonego lub dowolnego typu zakłócenia zależy od struktury operatora $B(s)$, czyli w dalszym ciągu od operatorowych podatności układu nośnego β i kompensacyjnego δ .

4. SYNTEZA SYSTEMÓW WIBROIZOLACJI

Analizując budowę końcowych formuł (2.12) i (2.13) widać, że podatności układów β i δ występują w podobnych kombinacjach. Wobec tego rozpatrzmy proste układy z rys. 5, które mogą być wykorzystane w charakterze układu nośnego β lub kompensacyjnego δ .

Łatwo sprawdzić drogą ułożenia równań ruchu, że operatorowe podatności układów z rys. 5 wyniosą:

dla układu a

$$(4.1) \quad \alpha_{11} = \frac{ms^2 + k}{kms^2}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = \frac{1}{ms^2};$$

dla układu b

$$(4.2) \quad \alpha_{11} = \frac{m_p s^2 + k_1}{k_1 m_p s^2}, \quad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{m_p s^2}, \quad \alpha_{22} = \frac{m_p s^2 + k_2}{k_2 m_p s^2}.$$

Przyjmijmy, że układ nośny β sprowadza się tylko do sprężyny o sztywności k .

Wtedy wychodząc z podatności układu α na rys. 5a i po przejściu granicznym $m \rightarrow 0$, mamy proste formuły na wielkości występujące w ogólnych wzorach (2.12) i (2.13):

$$(4.3) \quad \frac{1}{\beta_{11}} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha_{11}} = 0, \quad \frac{\beta_{21}}{\beta_{11}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = 1, \quad \frac{\beta_{22}}{\beta_{11}} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} = 1,$$

$$\beta_{22} - \frac{\beta_{21}^2}{\beta_{11}} = \lim_{m \rightarrow 0} \left(\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}^2}{\alpha_{11}} \right) = \frac{1}{k}.$$

Załóżmy dalej, że rozważamy jednowęściowy układ kompensacji w dwu wariantach: masy m_p i sprężyny k_2 . Wykonując dla układu z rys. 5b, (4.2), odpowiednie przejście graniczne, mamy

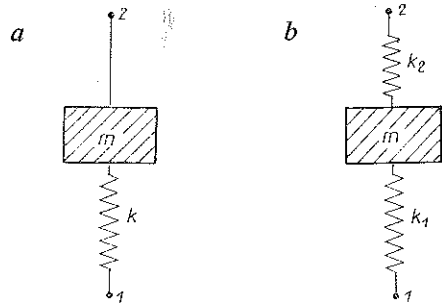
$$(4.4) \quad \delta_{22} = \lim_{k_2 \rightarrow \infty} \alpha_{22} = \frac{1}{m_p s^2}, \quad \delta_{22} = \lim_{m_p \rightarrow \infty} \alpha_{22} = \frac{1}{k_2}.$$

Wstawmy z kolei otrzymane wielkości (4.3) i (4.4) dla układu kompensacji w postaci masy m_p do zależności (2.12) poprawnej dla jednowęściowego układu kompensacji. Po prostych operacjach uzyskamy

$$(4.5) \quad x = \left[1 + \frac{1}{k} (Ms^2 + \alpha^2 m_p s^2) \right]^{-1} \left\{ \left[1 + m_p s^2 \frac{\alpha(1+\alpha)}{k} \right] z + \frac{1}{k} F \right\},$$

$$R = \left[1 + \frac{1}{k} (Ms^2 + \alpha^2 m_p s^2) \right]^{-1} \left\{ \left[Ms^2 + m_p s^2 + \frac{1}{k} (1+\alpha)^2 m_p Ms^4 \right] z - \right. \\ \left. - \left[1 + \frac{m_p s^2}{k} \alpha(1+\alpha) \right] F \right\}.$$

Podstawiając do (4.5) $s = i\omega$ dla drgań harmoniczných można zauważyć, że mamy do czynienia z systemem wibroizolacji z kompensacją bezwładnościową [1], który spełnia warunki inwariantności (3.2.c). Jak wiadomo [1] w tym przypadku można dobrać tak parametry systemu, aby dla określonej częstości wymuszenia ω_k , $x(z) = 0$. Z ogólnych wzorów (4.5) widać jednocześnie, że dla tej samej częstości otrzymamy $R(F) = 0$, a ponadto można tak dobrać pozostałe parametry, aby dla tej częstości lub dla innej $R(z) = 0$.



Rys. 5

Weźmy pod uwagę jako układ kompensacji sprężynę ($\delta_{22} = 1/k_2$) przy niezmiennym układzie nośnym β . Uwzględniając to we wzorach (2.12) mamy

$$(4.6) \quad x = \left[1 + \frac{1}{k} (Ms^2 + \alpha^2 k_2) \right]^{-1} \left\{ \left[1 + \frac{k_2}{k} \alpha(1+\alpha) \right] z + \frac{1}{k} F \right\},$$

$$R = \left[1 + \frac{1}{k} (Ms^2 + \alpha^2 k_2) \right]^{-1} \left\{ \left[Ms^2 + k_2 + (1+\alpha)^2 \frac{k_2}{k_1} Ms^2 \right] z - \right. \\ \left. - \left[1 + \frac{k_2}{k} \alpha(1+\alpha) \right] F \right\}.$$

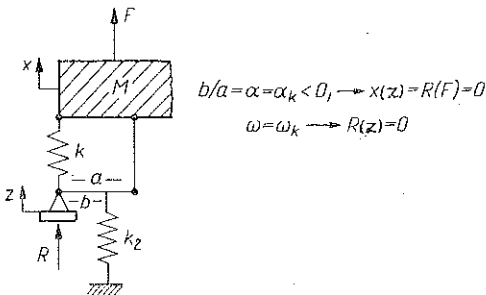
Z powyższych wzorów wynika, że dla

$$(4.7) \quad \alpha = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k}{k_2}} < 0,$$

a więc dla odpowiednio dobranej dźwigni jednostronnej, mamy pełną inwariantność systemu wibroizolacji w myśl warunków (3.2.b), gdyż $x(z)=0=R(F)=0$, niezależnie od postaci wymuszeń z i F . Ponadto dla wymuszenia harmonicznego $s=i\omega$ i pewnej częstotliwości

$$(4.8) \quad \omega_k = \frac{k}{M \left[1 + \frac{k_2}{k} (1+\alpha)^2 \right]},$$

której wartość można zmieniać również doborem przekładni α , otrzymujemy $R(z)=0$.



Rys. 6

Wydaje się, że otrzymane wyżej wyniki są bardzo istotne, gdyż dają możliwość konstrukcji systemu wibroizolacji nieczułego na żadne wymuszenia i zakłócenia. Szkic jednego z rozwiązań takiego systemu przedstawia rys. 6.

Przejdźmy obecnie do rozważenia systemów wibroizolacji z dwuwęściowym układem kompensacji o postaci sprężyny k_2 . Ponieważ

przejścia graniczne (4.3) są również w rozważanym przypadku poprawne dla układu δ , to po podstawieniu ich wartości dla układów δ i β do (2.13) uzyskamy

$$(4.9) \quad x = \left[1 + \frac{1}{k} (Ms^2 + \alpha^2 k_2) \right]^{-1} \left\{ \left[1 + \frac{\alpha^2 k_2}{k} \right] z + \frac{1}{k} F \right\},$$

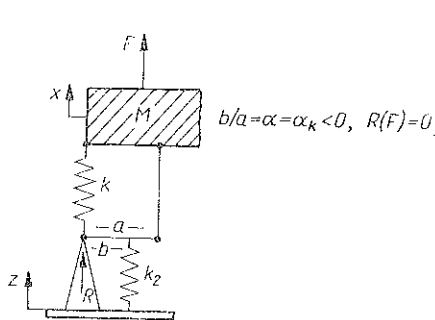
$$R = \left[1 + \frac{1}{k} (Ms^2 + \alpha^2 k_2) \right]^{-1} \left\{ \left[(1+\alpha) k_2 + Ms^2 \left\langle 1 + \frac{k_2}{k} \alpha (1+\alpha) \right\rangle \right] z - \left[1 + \alpha (1+\alpha) \frac{k_2}{k_1} \right] F \right\}.$$

Z powyższego widać od razu, że dla przemieszczenia obiektu x nie uzyskamy inwariantności względem żadnego z wymuszeń ($k > 0$). Możliwa jest natomiast inwariantność składowej $R(F)=0$, jeżeli tylko spełniona jest zależność (4.7), przy czym spełnienie tej zależności daje jednocześnie zmniejszenie składowej $R(z)$ o wyraz związany z bezwładnością obiektu M . Ponadto dla pewnej częstotliwości wymuszenia harmonicznego

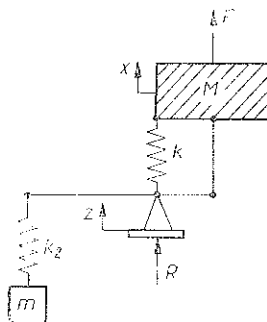
$$(4.10) \quad \omega_k^2 = \frac{(1+\alpha)k_2}{M \left[1 + \frac{k_2}{k} (1+\alpha) \alpha \right]}$$

możliwa jest kompensacja tego wyrazu na mocy warunku inwariantności (3.2.c). Możliwe rozwiązanie omówionego systemu wibroizolacji dla przypadku $R(F)=0$ przedstawiono na rys. 7.

Porównując własności systemu wibroizolacji z układem kompensacji jedno-wejściowym (rys. 6) oraz z układem kompensacji dwuwejściowym (rys. 7), można stwierdzić większą efektywność i większą możliwość zastosowań dla układu jedno-wejściowego. System ten może spełniać jednocześnie zadanie wibroizolacji przemieszczeniowej i siłowej, podczas gdy ten ostatni może efektywnie działać tylko jako wibroizolator siłowy, przy czym należy pamiętać, że siła R nie jest tu wypadkową sił działających na podstawę.



Rys. 7



Rys. 8

Na zakończenie warto pokazać, że w ramach przedstawionej teorii systemów wibroizolacji z kompensacją mieszczą się również systemy działające na zasadzie dynamicznego eliminatora drgań. W tym celu, pozostając przy układzie nośnym w charakterze sprężyny o sztywności k , jako układ kompensacyjny jednowejściowy weźmy pod uwagę masę m połączoną z dźwignią za pomocą sprężyny o sztywności k_2 .

Potrzebną w tym wypadku podatność operatorową δ_{22} otrzymamy ze wzorów (4.2) przyjmując $k_1=0$:

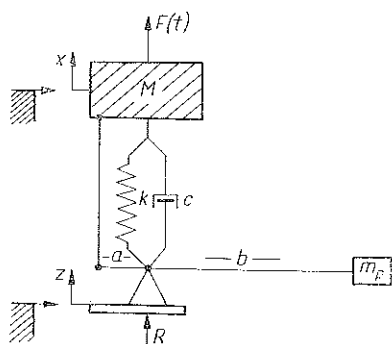
$$(4.11) \quad \delta_{22} = \frac{ms^2 + k_2}{k_2 ms^2}.$$

Wstawiając do wyrażeń na x i R (2.12) wyrażenia (4.3) dla układu nośnego β oraz (4.11) dla układu kompensacji δ , po przekształceniach otrzymamy

$$(4.12) \quad \begin{aligned} x &= \left[1 + \frac{1}{k} \left(Ms^2 + \frac{\alpha^2 k_2 ms^2}{ms^2 + k_2} \right) \right]^{-1} \left\{ \left[1 + \frac{\alpha(1+\alpha)k_2 ms^2}{k(ms^2 + k_2)} \right] z + \frac{1}{k} F \right\}, \\ R &= \left[1 + \frac{1}{k} \left(Ms^2 + \frac{\alpha^2 k_2 ms^2}{ms^2 + k_2} \right) \right]^{-1} \left\{ Ms^2 + \frac{k_2 ms^2}{ms^2 + k_2} + \frac{(1+\alpha)mMs^4}{k(ms^2 + k_2)} \right\} z - \\ &\quad - \left[1 + \frac{\alpha(1+\alpha)k_2 ms^2}{k(ms^2 + k_2)} \right] F \end{aligned}$$

Po podstawieniu $s=i\omega$ do powyższych zależności widać, że zawsze da się znaleźć takie częstotliwości wymuszenia harmonicznego ω_k , aby dla nich $x(z)=R(F)=0$ lub

$R(z)=0$. Co więcej, wartość tych częstości można zmieniać przez odpowiedni dobór przekładni α . Taki system wibroizolacji, jak można się domyślić, spełnia warunki inwariantności względem wymuszeń typu (3.2.c), co dla układu mechanicznego daje uogólniony dynamiczny eliminator drgań. Jeden z możliwych przypadków takiego eliminatora przedstawia rys. 8.



Rys. 9

5. WIBROIZOLATOR SIŁOWO-PRZEMIESZCZENIOWY Z KOMPENSACJĄ BEZWŁADNOŚCIOWĄ

Ogólne wnioski płynące ze wzoru (4.5) wskazują na możliwość konstrukcji układu o własnościach wibroizolacyjnych siłowo-przemieszczeniowych. Układ taki był badany w pracy [1] jednak tylko ze względu na wymuszenie kinematyczne $z(t)$ o charakterze

harmonicznym. Powstaje zatem potrzeba zbadania układu przy uwzględnieniu obu wymuszeń: $z=z(t)$ i $F=F(t)$. Ponadto byłoby interesujące zbadanie jego własności przy wymuszeniach typu przypadkowego.

Weźmy więc pod uwagę układ z kompensacją bezwładnościową opisany wzorem (4.5) z dodatkowym uwzględnieniem tłumienia (rys. 9).

Jak łatwo zauważyć z rysunku, element tłumiący o współczynniku c dołączony jest równolegle. W związku z tym we wzorach (4.5) wystarczy zamienić podatność $1/k$ podatnością operatorową $1/(k+cs)$. Wykonując to i przyjmując oznaczenia

$$(5.1) \quad \frac{m_p}{M} = \mu, \quad \frac{k}{M} = \omega_0^2, \quad \frac{c}{M} = \eta\omega_0,$$

po przekształceniach uzyskamy

$$(5.2) \quad x = \frac{[\mu\alpha(1+\alpha)s^2 + \eta\omega_0 s + \omega_0^2]z + F/M}{(1+\mu\alpha)s^2 + \eta\omega_0 s + \omega_0^2},$$

$$R = \frac{(1+\mu)Ms^2 \left[\frac{\mu(1+\alpha)^2}{1+\mu} s^2 + \eta\omega_0 s + \omega_0^2 \right] z - [\mu\alpha(1+\alpha)s^2 + \eta\omega_0 s + \omega_0^2]F}{(1+\mu\alpha^2)s^2 + \eta\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Otrzymaliśmy wzór na przemieszczenie amortyzowanego obiektu x i siłę przekazywaną na podłoże R jako funkcje odpowiednich transmitancji operatorowych i wielkości wejściowych, wymuszających z i F . Niech wspomniane wymuszenia mają charakter harmoniczny, wtedy w zapisie zespolonym można je przedstawić w postaci

$$(5.3) \quad z = z(t) = z_0 e^{i\gamma t}, \quad F = F(t) = F_0 e^{i\gamma t},$$

gdzie p i γ to częstości wymuszenia kinematycznego i siłowego.

Jak wiadomo [6] dla wymuszeń eksponencjalnych transmitancje operatorowe (5.2) przechodzą na widmowe przez proste podstawienie $s=ip$ lub $s=i\gamma$ w zależności

od wymuszenia. Wykorzystując to i wprowadzając bezwymiarowe częstości wymuszenia $\delta = p/\omega_0$, $\theta = \gamma/\omega_0$, po prostych operacjach uzyskamy

$$\begin{aligned}
 x &= z_0 \frac{1 - \mu\alpha\delta^2(1+\alpha) + i\eta\delta}{1 - \delta^2(1 + \mu\alpha^2) + i\eta\delta} e^{i\delta t} + \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - \theta^2(1 + \mu\alpha^2) + i\eta\theta} e^{i\gamma t} = \\
 &= z_0 H(i\delta) e^{i\delta t} + \frac{F_0}{k} X(i\theta) e^{i\gamma t}, \\
 (5.4) \quad R &= -kz_0(1 + \mu)\delta^2 \frac{\left[1 - \delta^2 \frac{\mu(1+\alpha)^2}{1+\mu} + i\eta\delta\right]}{1 - \delta^2(1 + \mu\alpha^2) + i\eta\delta} e^{i\delta t} - \\
 &\quad - F_0 \frac{1 - \mu\alpha\theta^2(1+\alpha) + i\eta\theta}{1 - \theta^2(1 + \mu\alpha^2) + i\eta\theta} e^{i\gamma t} = kz_0 K(i\delta) e^{i\delta t} + F_0 H(i\theta) e^{i\gamma t}.
 \end{aligned}$$

W przypadku ogólnym przy braku informacji o związkach między częstościami i fazami wymuszenia — amplitudę drgań obiektu i siłę przekazywaną na podstawie można oszacować z zależności wynikającej z (5.4):

$$(5.5) \quad \text{Ampl}[x(t)] \leq z_0 |H(i\delta)| + \frac{F_0}{k} |X(i\theta)|, \quad \text{Ampl}[R(t)] \leq kz_0 |K(i\delta)| + F_0 |H(i\theta)|.$$

Z powyższego oszacowania wynika, że minimum amplitud interesujących nas wielkości osiągniemy wówczas, kiedy moduły transmitancji $H(i\delta)$, $X(i\theta)$, $K(i\delta)$ i $H(i\theta)$ będą małe w porównaniu z jednością lub bliskie zera. Z analizy transmitancji $H(i\delta)$ i $H(i\theta)$ łatwo zauważyć, że ich postać jest identyczna, co więcej widać, że dla $\eta \ll 1$ można zawsze znaleźć następującą częstość wymuszenia δ_{wp} : jeśli

$$(5.6) \quad \delta^2 = \delta_{wp}^2 = \frac{1}{\mu\alpha(1+\alpha)}, \quad \text{to } |H(i\delta)| \approx 0.$$

Jak łatwo spostrzec z powyższego i z (5.5), (5.4), otrzymujemy wtedy przypadek prawie pełnej wibroizolacji przemieszczeniowo-siłowej, czyli

$$(5.7) \quad \delta = \delta_{wp}, \quad x(z) \approx 0, \quad \theta = \theta_{wp}, \quad R(F) \approx 0.$$

Częstość drgań, przy której ma wystąpić efekt wibroizolacji, można zmieniać dobierając optymalną wartość przekładni według (5.6):

$$(5.8) \quad \alpha_{wp} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{\mu\delta_{wp}^2}}.$$

Jeżeli $\alpha > 0$, to mamy dźwignię dwustronną; jeżeli $\alpha < 0$, to dźwignię jednostronną.

Analizując z kolei transmitancję $K(i\delta)$ przy założeniu małego tłumienia $\eta \ll 1$, łatwo znaleźć następującą częstość wibroizolacji siłowej δ_{ws} : jeśli

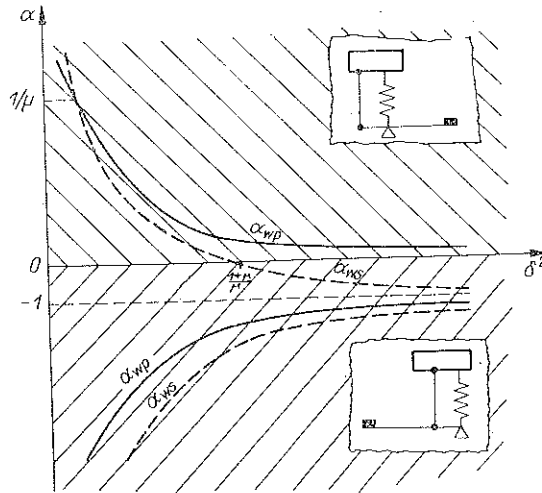
$$(5.9) \quad \delta^2 = \delta_{ws}^2 = \frac{1 + \mu}{\mu(1 + \alpha)^2}, \quad \text{to } |K(i\delta)| \approx 0, \quad R(z) \approx 0.$$

Przypadek ten daje możliwość prawie całkowitej redukcji siły przekazywanej na podstawę w przypadku wymuszenia kinematycznego, ponieważ w tym przypadku możemy dobrać częstotliwości drgań, dla której efekt wibroizolacji siłowej będzie maksymalny. Zgodnie z (5.9) mamy

$$(5.10) \quad \alpha_{ws} = \pm \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu\delta_{ws}^2} - 1}.$$

Jeżeli $\alpha > 0$, to mamy dźwignię dwustronną; jeżeli $\alpha < 0$, to dźwignię jednostronną.

Tak więc dzięki wprowadzeniu do układu kompensacji bezwładnościowej uzyskaliśmy możliwość redukcji amplitudy drgań obiektu oraz siły przekazywanej na podstawę. Wymienione efekty można uzyskać z układem kompensacji dobranym podług zależności (5.10) i (5.8) niezależnie od rodzaju dźwigni dwustronnej czy jednostronnej. Sytuację tę przedstawia poglądowo rys. 10.



Rys. 10

Interesujące jest również zachowanie się układu z kompensacją bezwładnościową przy wymuszeniach przypadkowych, zwłaszcza wąskopasmowych. Takimi procesami można aproksymować większość wymuszeń występujących w dynamice maszyn [7]. Dla uproszczenia analizy założymy, że działa jedynie wymuszenie siłowe ($z(t) \equiv 0$) o zerowej wartości średniej i gęstości widmowej postaci [7]:

$$(5.11) \quad S_F(\omega) = \sigma_F^2 \frac{2\gamma^3 \beta}{\pi} \frac{1}{|\gamma^2 + (i\omega)^2 + i\beta\gamma\omega|^2},$$

gdzie σ_F^2 oznacza średni kwadrat amplitudy siły, γ częstotność główną widma wymuszenia oraz β względną szerokość połówkową maksimum widma. Średni kwadrat przemieszczenia obiektu σ_{xF}^2 i siły przekazywanej na podłoże σ_{RF}^2 uzyskamy ze znanych

wzorów [6]. Biorąc pod uwagę (5.11) i transmitancje operatorowe (5.2) przy założeniu $z(t) \equiv 0$, $s = i\omega$, mamy

$$(5.12) \quad \sigma_{xF}^2 = \int_0^{\infty} \frac{S_F(\omega) d\omega}{M^2 |(1 + \mu\alpha^2)(i\omega)^2 + \eta\omega_0 i\omega + \omega_0^2|^2},$$

$$\sigma_{RF}^2 = \int_0^{\infty} \frac{|\mu\alpha(1 + \alpha)(i\omega)^2 + i\omega\eta\omega_0 + \omega_0^2|^2 S_F(\omega) d\omega}{|(1 + \mu\alpha^2)(i\omega)^2 + i\omega\eta\omega_0 + \omega_0^2|^2}.$$

Wykonując zaznaczone całkowanie i wprowadzając znaną już bezwymiarową częstość wymuszenia $\theta = \gamma/\omega_0$, po przekształceniach uzyskamy

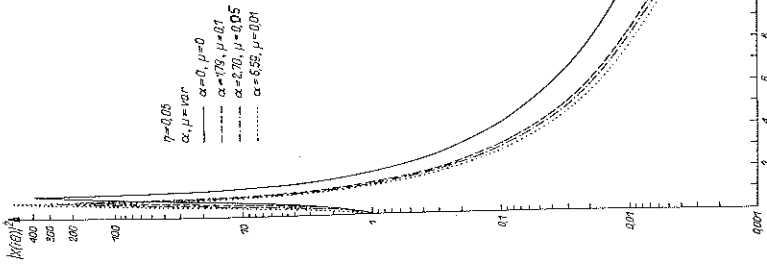
$$(5.13) \quad \bar{W}_{xF}^2 = \frac{\sigma_{xF}^2}{\sigma_F^2/k} = \frac{(1 + \mu\alpha^2) \frac{\beta}{\eta} \theta^2 [\theta(1 + \mu\alpha^2) + \eta\beta] + \eta\beta\theta + 1}{[(1 + \mu\alpha^2)\theta^2 - 1]^2 + \theta(\beta + \eta\theta)[\eta + \beta\theta(1 + \mu\alpha^2)]},$$

$$\bar{W}_{RF}^2 = \frac{\sigma_{RF}^2}{\sigma_F^2} = \frac{(1 + \mu\alpha^2) \frac{\beta}{\eta} \theta^2 [\theta(1 + \mu\alpha^2) + \eta\beta + \eta^2\theta - 2\mu\alpha(1 + \alpha)\theta] + \frac{\beta}{\eta} [\eta^2 + \mu^2\alpha^2(1 + \alpha)^2\theta^2] + [\mu\alpha(1 + \alpha)\theta^2 - 1]^2 + \eta^2\theta^2}{[(1 + \mu\alpha^2)\theta^2 - 1]^2 + \theta(\beta + \theta\eta)[\eta + \beta\theta(1 + \mu\alpha^2)]}.$$

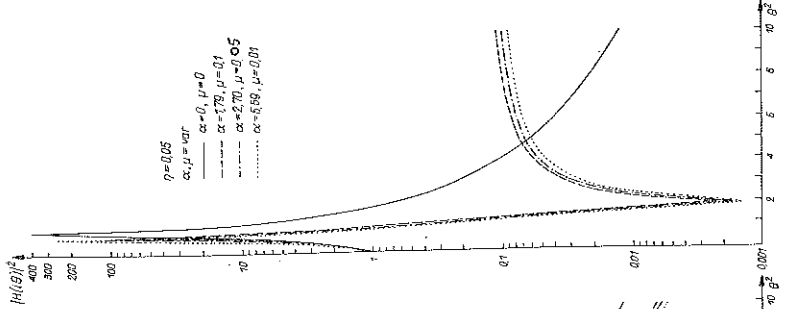
Otrzymaliśmy wzór na uogólnione współczynniki wibroizolacji układu z kompensacją bezwładnościową przy wąskopasmowym wymuszeniu przypadkowym. Analizując licznik pierwszego z nich można zauważyć, że podobnie jak przy wymuszeniu harmonicznym (5.4) nie obserwuje się istotnego wpływu kompensacji bezwładnościowej. Natomiast licznik drugiego współczynnika zawiera wyrazy ujemne związane z kompensacją, które mogą w istotny sposób zmniejszać jego wartość, a tym samym zmniejszać średniokwadratową amplitudę siły przekazywanej na podstawę.

6. PRZYKŁAD LICZBOWY

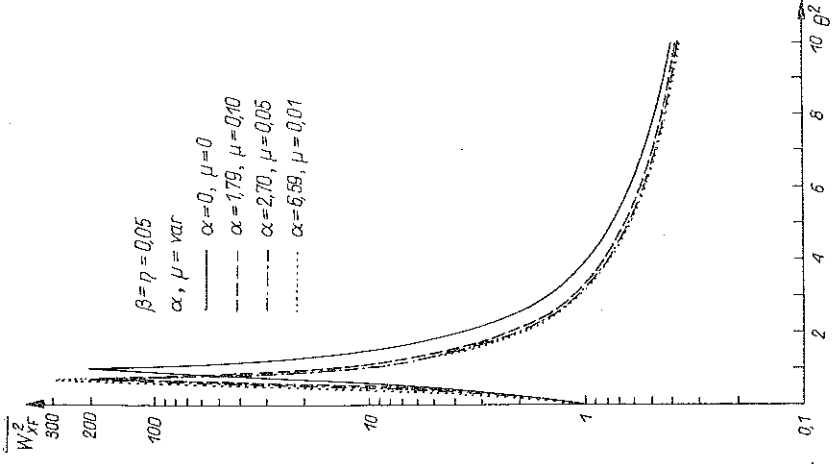
Dla zobrazowania wielkości efektu wibroizolacji przy poszczególnych rodzajach wymuszeń weźmy pod uwagę przykład liczbowy. Załóżmy, że na układ działa wymuszenie siłowe $z(t) \equiv 0$, $F(t) \neq 0$ oraz że efekt kompensacji bezwładnościowej ma wystąpić dla bezwymiarowej częstości wymuszenia $\theta_w^2 = 2$. Jest oczywiste, że masa kompensacyjna powinna być mała; w związku z tym weźmy pod uwagę następujące jej wartości: $m_p/M = \mu = 0,01$; $0,05$; $0,1$. Wynikająca stąd optymalna przekładnia dźwigni dwustronnej, obliczona ze wzoru (5.8), ($\delta \rightarrow \theta$) wynosi odpowiednio $\alpha_{opt} = 6,59$; $2,70$; $1,79$. Przy takich danych obliczono kwadraty transmitancji $|X(i\theta)|^2$ (gdzie nie występuje efekt kompensacji) oraz transmitancji $|H(i\theta)|^2$ (gdzie efekt ten występuje). Obliczenia przeprowadzono dla współczynnika tłumienia $\eta = 0,05$, w przedziale częstości $0 \leq \theta^2 \leq 10$, wyniki zaś przedstawiono graficznie na rysunkach 11 i 12.



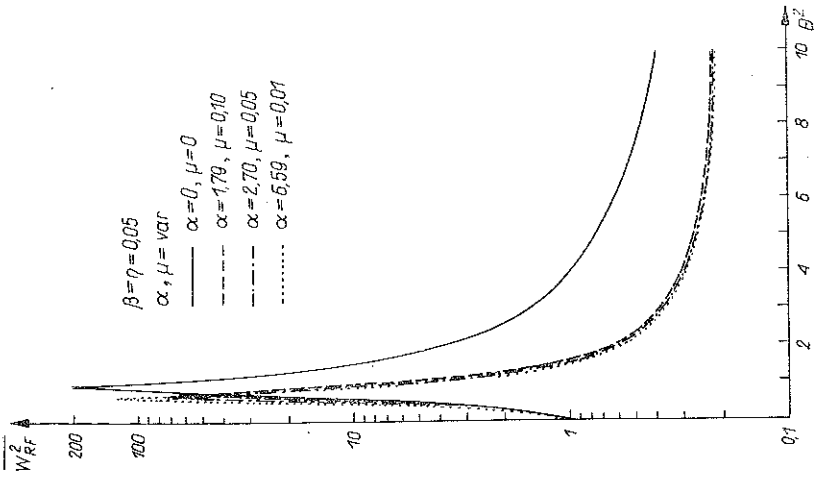
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

Z rysunków widać, że wprowadzenie masy kompensacyjnej daje w obu przypadkach obniżenie częstości rezonansowej i obniżenie wartości transmitancji w strefie pozarezonansowej. Warto podkreślić, że najniższe wartości transmitancji w tej strefie odpowiadają najmniejszym wartościom μ .

Efekt wibroizolacji z kompensacją widoczny jest na wykresie transmitancji $|H(i\theta)|^2$, gdzie dla założonej częstości $\theta_w^2 = 2$ wartość jej wynosi zaledwie $|H(i\theta)|^2 = 1,5 \cdot 10^{-3} \approx 0$.

Zachowanie się układu z kompensacją bezwładnościową przy wymuszeniu wąskopasmowym o szerokości pasma $\beta = \eta = 0,05$ przedstawiono graficznie na kolejnych rysunkach 13 i 14.

Jak z nich wynika, wprowadzenie kompensacji do układu zmniejsza współczynnik wibroizolacji w strefie pozarezonansowej, podobnie jak przy wymuszeniu harmonicznym. Porównując szerokość strefy kompensacji w skali częstości dla współczynnika \bar{W}_{RF}^2 i transmitancji $|X(i\theta)|^2$, można stwierdzić, że dla wymuszeń przypadkowych zakres obniżenia wartości tych wielkości jest znacznie szerszy. Fakt ten daje możliwość efektywnego stosowania układów z kompensacją bezwładnościową nie tylko dla wymuszeń sinusoidalnych, lecz także dla wymuszeń przypadkowych wąskopasmowych, a więc dla większości wymuszeń występujących w dynamice maszyn.

7. WNIOSKI

Przedstawiona wyżej ogólna teoria systemów wibroizolacji z zastosowaniem dźwigniowych układów kompensacji daje możliwość syntezy układów inwariantnych względem wymuszeń. Inwariantność ta dotyczy na ogół klasy wymuszeń sinusoidalnych o danej częstości, lecz jak pokazano w pracy istnieje możliwość konstrukcji systemów wibroizolacji inwariantnych względem dowolnego typu wymuszeń. Przeprowadzona w dalszym ciągu pracy analiza zachowania się układów z kompensacją bezwładnościową wykazała, że wprowadzenie kompensacji daje znaczne polepszenie własności wibroizolacyjnych i to zarówno dla wymuszeń sinusoidalnych jak dla wąskopasmowych przypadkowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. CZ. CEMPEL, *Damper of kinematically forced vibrations*, Arch. Mech. Stos., 24, 1, 161 – 166, 1972.
2. R. E. D. BISHOP, D. C. JOHNSON, *The mechanics of vibration*, Cambridge University Press, 39, 1960.
3. P. NOWACKI, L. SZKLARSKI, H. GÓRECKI, *Podstawy teorii układu regulacji automatycznej*, 293 – 302, PWN, Warszawa 1970.
4. A. G. IWACHNIENKO, *Cybernetyka techniczna*, 403 – 413, PWN, Warszawa.
5. A. H. ГОЛУБЕНЦЕВ, И. З. ГУСАКОВ, *Проблема инвариантности в динамике машин с упругими звеньями*, Динамика машин, Сборник, 113–120, Ред. С. Н. Кожевников, Машиностроение, Москва 1969.
6. W. W. SOŁODOWNIKOW, *Dynamika statystyczna liniowych układów sterowania automatycznego*, WNT, str. 26, Warszawa 1964.

Резюме

СИНТЕЗ СИСТЕМ ВИБРОИЗОЛЯЦИИ С КОМПЕНСАЦИЕЙ

В работе представлена общая теория систем виброизоляции с компенсацией. Доказано при этом, что явление виброизоляции можно тоже рассматривать как инвариантность системы по отношению к возмущениям. Показано, что в зависимости от типа системы компенсации возможны системы виброизоляции инвариантные по отношению к всем возмущения или по отношению к классу гармонических возмущений. В характере примера рассмотрено поведение системы с инерциальной компенсацией. Доказано при этом, что эффект инерциальной компенсации улучшает виброизоляционные свойства системы, так для гармонических возмущений, как и для узкополосных случайных возмущений.

SUMMARY

SYNTHESIS OF VIBRO-INSULATION SYSTEMS WITH COMPENSATION

A general theory of vibro-insulation systems with compensation is presented. It is shown that the vibro-insulation effect may also be considered as invariance of the system with respect to disturbances. Depending on the type of compensation systems, the vibro-insulation systems may be invariant to all types of disturbances or to a class of harmonic disturbances. As an example, the behaviour of a system with inertial compensation is considered. It is proved that the inertial compensation effect improves the vibro-insulating properties of the system in the both cases of harmonic excitations and narrow-band random excitations.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 maja 1973 r.
