

STATYKA GĘSTYCH, REGULARNYCH PASM KRATOWYCH

KAROL H. BOJDA (GLIWICE), ALEKSANDER SŁOMKA (KATOWICE)

WSTĘP

Siatkami kratowymi nazywamy gęste i regularne tarcze siatkowe z węzłami przegubowymi. Zagadnienia statyki takich ustrojów mają bogatą literaturę, obejmującą liczne monografie i publikacje.

W niniejszej pracy podano rozwiązania równań różniczkowych dla jednorodnych gęstych, regularnych pasm kratowych podpartych przegubowo przesuwnie wzdłuż linii równoległych do krawędzi pasma. Ustroje takie można nazwać «wieloprzesłowymi» tarczami siatkowymi o węzłach przegubowych. Rozwiązania dla tych schematów uzyskano za pomocą pojedynczych operatorowych całek Fouriera. Zachodzi tu formalne podobieństwo do podanych w pracach [6 – 8] sposobów rozwiązywania płyt wieloprzesłowych. Sposób ten pozwala łatwo sprowadzić omawiane zagadnienia do układów liniowych równań algebraicznych.

Wskaźniki k, l, m, n przebiegają ciąg 1, 2, wskaźniki i, j ciąg 1, 2, 3, 4, a wskaźniki A, Φ ciąg I, II, III. Różniczkowanie cząstkowe oznaczono przecinkiem. Symbole $\Delta_A \varphi$ i $\bar{\Delta}_A \varphi$ oznaczają prawe i lewe różnice funkcji φ [1]. Stosowany jest rachunek operatorów MIKUSIŃSKIEGO [5].

1. RÓWNANIA RÓZNICOWE I RÓZNICZKOWE
GĘSTYCH REGULARNYCH SIATEK KRATOWYCH

Rozważania przeprowadzimy dla siatek utworzonych z trzech rodzin prętów, połączonych ze sobą przegubowo w węzłach. Równania różnicowe takich ustrojów stanowią szczególny przypadek równań różnicowych siatek prętowych z węzłami sztywnymi, podanych w pracy [3], i są formalnie równoważne równaniom regularnych tarcz siatkowych z węzłami przegubowymi, wyprowadzonym w pracy [4].

Równania równowagi, związki geometryczne i fizyczne są następujące:

$$(1.1) \quad \bar{\Delta}_A T_k^A + f_k = 0,$$

$$(1.2) \quad \gamma_A^k = \Delta_A u^k,$$

$$(1.3) \quad T_k^A = A_{kl}^{A\Phi} \gamma_\Phi^l,$$

gdzie f_k jest obciążeniem zewnętrznym, u^k są składowymi stanu przemieszczenia, γ_A^k składowymi stanu odkształcenia, T_k^A składowymi stanu naprężenia, wielkości

zaś $A_{kl}^{A\Phi}$ charakteryzują własności sprężyste rozważanych siatek. Wzory dla wielkości $A_{kl}^{A\Phi}$ podano w pracy [3].

Rugując z układu (1.1) – (1.3) składowe stanu odkształcenia oraz naprężenia otrzymamy równania dla składowych stanu przemieszczenia:

$$(1.4) \quad \bar{A}_A (A_{kl}^{A\Phi} \Delta_{\Phi} u^l) + f_k = 0,$$

które dla siatek jednorodnych mają postać następującą:

$$(1.5) \quad A_{kl}^{A\Phi} \bar{A}_A \Delta_{\Phi} u^l + f_k = 0.$$

Ograniczymy się następnie do rozważania tylko takiej klasy siatek kratowych, dla której dowolna wielkość występująca w (1.1) – (1.3) może być przyjęta jako różniczkowalna funkcja zmiennych x^k , a ponadto spełnia warunki postaci [1]

$$(1.6) \quad \bar{A}_A \varphi(x^k) \approx \Delta_A \varphi(x^k) \approx \varphi_{,l}(x^k) l_A^l, \quad \varphi(x^k + l_A^k) \approx \varphi(x^k),$$

gdzie l_A^k są składowymi wektorów łączących sąsiednie węzły w rodzinie A .

Zgodnie z tymi warunkami otrzymujemy następujące równania dla składowych stanu przemieszczenia:

$$(1.7) \quad (A^{klmn} u_{n,m})_{,k} + q^l = 0,$$

które dla siatek jednorodnych mają postać

$$(1.8) \quad A^{klmn} u_{n,mk} + q^l = 0,$$

gdzie q^l jest obciążeniem odniesionym do jednostki pola powierzchni. Równania (1.7) i (1.8) są identyczne z równaniami wyprowadzonymi w [2].

Wzory dla składowych A^{klmn} tensorów sztywności sprężystej omówiono także w pracy [2].

2. SIATKOWE PASMA KRATOWE

Rozważania przeprowadzimy dla pasm jednorodnych o krawędzi $x^2=0$ przegubowo zamocowanej i o dowolnych warunkach brzegowych wzdłuż krawędzi $x^2=L_2$ dowolnie obciążonych w swej płaszczyźnie (rys. 1).

Rozwijając równania (1.8) otrzymujemy

$$(2.1) \quad \begin{aligned} A^{1111} u_{1,11} + A^{1112} (2u_{1,12} + u_{2,11}) + A^{1122} (2u_{2,12} + u_{1,22}) + \\ + A^{1222} u_{2,22} + q^1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{1112} u_{1,11} + A^{1122} (2u_{1,12} + u_{2,11}) + A^{1222} (2u_{2,12} + u_{1,22}) + \\ + A^{2222} u_{2,22} + q^2 = 0. \end{aligned}$$

W (2.1) uwzględniono własności symetrii tensora sztywności sprężystej A . Tensor ten jest symetryczny względem wszystkich wskaźników.

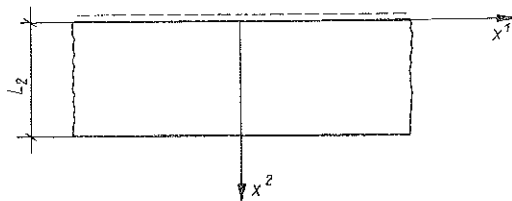
Równania operatorowe odpowiadające równaniom różniczkowym cząstkowym (2.1) mają postać

$$(2.2) \quad \begin{aligned} A^{1111} u_1'' + A^{1112} (2su_1' + u_2'') + A^{1122} (2su_2' + s^2 u_1) + \\ + A^{1222} s^2 u_2 = -q^1 + A^{1122} u_{1,2}(x^1, 0) + A^{1222} u_{2,2}(x^1, 0), \\ A^{1112} u_1'' + A^{1122} (2su_1' + u_2'') + A^{1222} (2su_2' + s^2 u_1) + \\ + A^{2222} s^2 u_2 = -q^2 + A^{1122} u_{1,2}(x^1, 0) + A^{2222} u_{2,2}(x^1, 0), \end{aligned}$$

przy czym spełnione są już warunki brzegowe na krawędzi $x^2=0$:

$$u_k(x^1, 0) = 0.$$

W równaniach (2.2) s jest operatorem różniczkowym, u_k i q^k są funkcjami operatorowymi parametrycznymi zmiennej x^1 , a u_k' i u_k'' są pierwszymi i drugimi pochodnymi ciągłymi tych funkcji.



Rys. 1

W dalszym ciągu pracy symbol $\{\varphi(x^k)\}$ będzie oznaczał funkcję liczbową zmiennych x^k , a symbol $\varphi(x^1)$ funkcję operatorową parametryczną zmiennej x^1 . Zakładając, że całki niewłaściwe

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q^k(x^1)| dx^1$$

mają wartości skończone, funkcje operatorowe obciążenia przedstawimy w postaci pojedynczych operatorowych całek Fouriera:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} q^1(x^1) &= \int_0^{\infty} (B^1 \cos \omega x^1 + B^2 \sin \omega x^1) d\omega, \\ q^2(x^1) &= \int_0^{\infty} (B^3 \cos \omega x^1 + B^4 \sin \omega x^1) d\omega. \end{aligned}$$

Przyjmujemy także

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A^{1122} u_{1,2}(x^1, 0) + A^{1222} u_{2,2}(x^1, 0) &= \int_0^{\infty} (C^1 \cos \omega x^1 + C^2 \sin \omega x^1) d\omega, \\ A^{1222} u_{1,2}(x^1, 0) + A^{2222} u_{2,2}(x^1, 0) &= \int_0^{\infty} (C^3 \cos \omega x^1 + C^4 \sin \omega x^1) d\omega \end{aligned}$$

oraz

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_1(x^1) &= \int_0^{\infty} (w^1 \cos \omega x^1 + w^2 \sin \omega x^1) d\omega, \\ u_2(x^1) &= \int_0^{\infty} (w^3 \cos \omega x^1 + w^4 \sin \omega x^1) d\omega. \end{aligned}$$

Podstawiając (2.3), (2.4) i (2.5) do (2.2) dochodzimy do następujących równań operatorowych na w^i :

$$[D_{ij}] [w^i] = [C^i - B^i].$$

Macierze $[w^i]$ oraz $[C^i - B^i]$ są typu $(i, 1)$, operatory zaś D_{ij} mają następującą postać:

$$\begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = A^{1122} s^2 - A^{1111} \omega^2, \\ D_{12} &= -D_{21} = 2A^{1112} \omega s, \\ D_{13} &= D_{24} = D_{31} = D_{42} = A^{1222} s^2 - A^{1112} \omega^2, \\ D_{14} &= -D_{23} = D_{32} = -D_{41} = 2A^{1122} \omega s, \\ D_{33} &= D_{44} = A^{2222} s^2 - A^{1122} \omega^2, \\ D_{34} &= -D_{43} = 2A^{1222} \omega s. \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenia

$$(2.6) \quad \{\Gamma_{ij}(x^2)\} = \frac{E_{ji}}{\det [D_{ij}]}, \quad \{\Gamma_{ij}(x^2)\} * B^j = \{\Phi_i(x^2)\},$$

gdzie $*$ jest symbolem splotu, a E_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu D_{ij} w $\det [D_{ij}]$, rozwiązanie można zapisać w następującej nieoperatorowej postaci:

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^\infty [(\Gamma_{1j}(x^2) C^j - \Phi_1(x^2)) \cos \omega x^1 + (\Gamma_{2j}(x^2) C^j - \Phi_2(x^2)) \sin \omega x^1] d\omega, \\ u_2 &= \int_0^\infty [(\Gamma_{3j}(x^2) C^j - \Phi_3(x^2)) \cos \omega x^1 + (\Gamma_{4j}(x^2) C^j - \Phi_4(x^2)) \sin \omega x^1] d\omega. \end{aligned}$$

Stałe C^j należy wyznaczyć z warunków brzegowych na krawędzi $x^2 = L_2$. Jeżeli np. krawędź ta jest przegubowo podparta, to

$$u_k(x^1, L_2) = 0,$$

a stąd otrzymujemy równania dla C^j :

$$\Gamma_{ij}(L_2) C^j - \Phi_i(L_2) = 0.$$

Jeżeli krawędź $x^2 = L_2$ jest niepodparta i dowolnie obciążona siłami rozłożonymi

$$\tilde{q}^k(x^1) = \int_0^\infty (\tilde{q}_{[\omega]}^k \cos \omega x^1 + \tilde{q}_{[\omega]}^k \sin \omega x^1) d\omega,$$

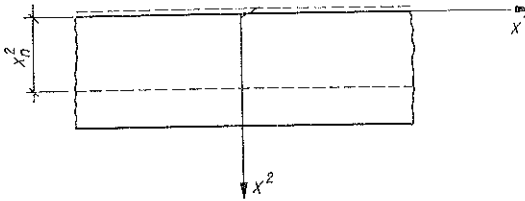
to mamy warunki następujące:

$$[A^{klmn} u_{n,m}(x^1, L_2)] \delta_{2k} = \tilde{q}^l(x^1),$$

(gdzie δ_{2k} jest symbolem Kroneckera), które także pozwalają ułożyć w każdym przypadku równania dla C^j .

3. SIATKOWE PASMA KRATOWE PODPARTE WZDŁUŻ LINII $x^2 = x_n^2$

W punkcie tym wyprowadzimy równania dla pasm siatkowych z węzłami przegubowymi o schemacie statycznym pokazanym na rys. 2, przy czym podpory pośrednie \bar{n} są przesuwne w kierunkach tworzących z dodatnim kierunkiem osi x^1



Rys. 2

kąty $\xi_{\bar{n}}$. Dla danej podpory liniowej będziemy przyjmować, że kąt $\xi_{\bar{n}}$ jest stały. Przykładem takiej tarczy siatkowej może być pasmo kratowe przedstawione na rys. 3.

Ponieważ stosujemy ciągły model obliczeniowy, więc podpory przegubowo przesuwne, podpierające węzły siatki wzdłuż linii $x^2 = x_n^2$, będziemy

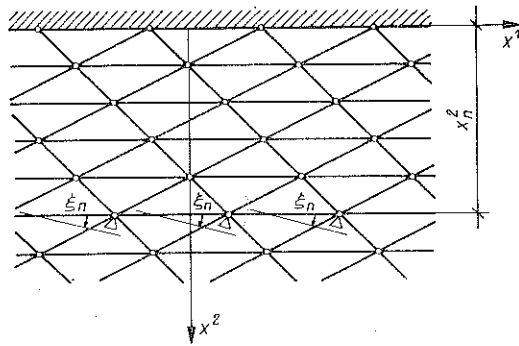
my traktować jako podpory liniowe, a zatem również oddziaływania podpór pośrednich traktować będziemy jako dodatkowe obciążenie q^* , rozłożone wzdłuż linii $x^2 = x_n^2$:

$$q^* = \sum_{\bar{n}=1}^N q_{\bar{n}}^*(x^1) h^{x_n^2},$$

gdzie $h^{x_n^2}$ oznacza operator przesunięcia, a N jest ilością linii podpór pośrednich.

Składowe obciążenia q^* wynoszą

$$(3.1) \quad \begin{aligned} q^1 &= \sum_{\bar{n}=1}^N q_{\bar{n}}^*(x^1) h^{x_n^2} \sin \xi_{\bar{n}}, \\ q^2 &= - \sum_{\bar{n}=1}^N q_{\bar{n}}^*(x^1) h^{x_n^2} \cos \xi_{\bar{n}}. \end{aligned}$$



Rys. 3

Rozwijając q^1 i q^2 w pojedyncze operatorowe całki Fouriera, otrzymujemy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} q^1 &= \sum_{\bar{n}=1}^N h^{x_n^2} \int_0^\infty (R_{\bar{n}}^1 \cos \omega x^1 + R_{\bar{n}}^2 \sin \omega x^1) d\omega, \\ q^2 &= \sum_{\bar{n}=1}^N h^{x_n^2} \int_0^\infty (R_{\bar{n}}^3 \cos \omega x^1 + R_{\bar{n}}^4 \sin \omega x^1) d\omega, \end{aligned}$$

przy czym współczynniki $R_{\bar{n}}^j$ są operatorami liczbowymi. Wynika stąd wzór

$$\{ \Gamma_{ij}(x^2) \} * R_{\bar{n}}^j = \{ \Gamma_{ij}(x^2) R_{\bar{n}}^j \}.$$

A zatem rozwiązanie dla rozpatrywanego przypadku można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}
 u_1 = \int_0^\infty & \left[\left(\Gamma_{1j}(x^2) C^j + \sum_{\bar{n}=1}^N \Gamma_{1j}(x^2) R_{\bar{n}}^j h_{\bar{n}}^{x^2} - \Phi_1(x^2) \right) \cos \omega x^1 + \right. \\
 & \left. + \left(\Gamma_{2j}(x^2) C^j + \sum_{\bar{n}=1}^N \Gamma_{2j}(x^2) R_{\bar{n}}^j h_{\bar{n}}^{x^2} - \Phi_2(x^2) \right) \sin \omega x^1 \right] d\omega, \\
 (3.3) \quad u_2 = \int_0^\infty & \left[\left(\Gamma_{3j}(x^2) C^j + \sum_{\bar{n}=1}^N \Gamma_{3j}(x^2) R_{\bar{n}}^j h_{\bar{n}}^{x^2} - \Phi_3(x^2) \right) \cos \omega x^1 + \right. \\
 & \left. + \left(\Gamma_{4j}(x^2) C^j + \sum_{\bar{n}=1}^N \Gamma_{4j}(x^2) R_{\bar{n}}^j h_{\bar{n}}^{x^2} - \Phi_4(x^2) \right) \sin \omega x^1 \right] d\omega.
 \end{aligned}$$

Wielkości $R_{\bar{n}}^j$ nie są niezależne. Z (3.1) i (3.2) wynika, że pomiędzy nimi dla danych kątów $\xi_{\bar{n}}$ zachodzą następujące związki.

$$(3.4) \quad R_{\bar{n}}^1 \cos \xi_{\bar{n}} = -R_{\bar{n}}^3 \sin \xi_{\bar{n}}, \quad R_{\bar{n}}^2 \cos \xi_{\bar{n}} = -R_{\bar{n}}^4 \sin \xi_{\bar{n}}.$$

Wektory przemieszczenia punktów leżących na liniach podparcia posiadają kierunki zgodne z kierunkami przesunięcia podpór pośrednich. Muszą więc spełniać następujące warunki:

$$\mathbf{u}(x^1, x_{\bar{n}}^2) \mathbf{T}_{\bar{n}} = 0, \quad \bar{n} = 1, 2, \dots, N$$

albo

$$(3.5) \quad u_k(x^1, x_{\bar{n}}^2) T_{\bar{n}}^k = 0,$$

gdzie $\mathbf{T}_{\bar{n}}$ oznacza wektory jednostkowe normalne do kierunków przesuwu podpór. Zatem

$$T_{\bar{n}}^1 = \sin \xi_{\bar{n}}, \quad T_{\bar{n}}^2 = -\cos \xi_{\bar{n}}.$$

Podstawiając (3.3) do (3.5) otrzymujemy następujące równania:

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad & \sum_{r=1}^{\bar{n}-1} [\Gamma_{1j}(x_{\bar{n}}^2 - x_r^2) R_r^j \sin \xi_r - \Gamma_{3j}(x_{\bar{n}}^2 - x_r^2) R_r^j \cos \xi_r] = \\
 & = [\Phi_1(x_{\bar{n}}^2) - \Gamma_{1j}(x_{\bar{n}}^2) C^j] \sin \xi_{\bar{n}} - [\Phi_3(x_{\bar{n}}^2) - \Gamma_{3j}(x_{\bar{n}}^2) C^j] \cos \xi_{\bar{n}}, \\
 & \sum_{r=1}^{\bar{n}-1} [\Gamma_{2j}(x_{\bar{n}}^2 - x_r^2) R_r^j \sin \xi_r - \Gamma_{4j}(x_{\bar{n}}^2 - x_r^2) R_r^j \cos \xi_r] = \\
 & = [\Phi_2(x_{\bar{n}}^2) - \Gamma_{2j}(x_{\bar{n}}^2) C^j] \sin \xi_{\bar{n}} - [\Phi_4(x_{\bar{n}}^2) - \Gamma_{4j}(x_{\bar{n}}^2) C^j] \cos \xi_{\bar{n}}.
 \end{aligned}$$

Równania (3.6) wraz ze związkami (3.4) oraz równaniami, które dają warunki brzegowe na krawędzi $x^2 = L_2$, pozwalają wyznaczyć $4(N+1)$ stałych $R_{\bar{n}}^j$ i C^j występujących w rozwiązaniu (3.3).

Dla krawędzi $x^2=L_2$ przegubowo podparte otrzymujemy w tym przypadku równania następujące:

$$\Gamma_{ij}(L_2) C^j + \sum_{\bar{n}=1}^N \Gamma_{ij}(L_2 - x_{\bar{n}}^2) R_{\bar{n}}^j - \Phi_i(L_2) = 0.$$

Związki (3.4) oraz równania (3.6) upraszczają się znacznie, gdy $\xi_{\bar{n}}=0$ lub $\xi_{\bar{n}}=\pi/2$. Na przykład dla $\xi_{\bar{n}}=0$ z (3.4) wynika, że

$$R_{\bar{n}}^1 = R_{\bar{n}}^2 = 0,$$

a równania (3.6) redukują się do postaci

$$\sum_{r=1}^{\bar{n}-1} \Gamma_{3j}(x_{\bar{n}}^2 - x_r^2) R_{\bar{n}}^j = \Phi_3(x_{\bar{n}}^2) - \Gamma_{3j}(x_{\bar{n}}^2) C^j,$$

$$\sum_{r=1}^{\bar{n}-1} \Gamma_{4j}(x_{\bar{n}}^2 - x_r^2) R_{\bar{n}}^j = \Phi_4(x_{\bar{n}}^2) - \Gamma_{4j}(x_{\bar{n}}^2) C^j.$$

4. ORTOTROPOWE PASMA KRATOWE

Jak wynika z p. 2 i 3 zasadniczą trudnością rozwiązania omawianych zagadnień jest, w przypadku ogólnym, znalezienie funkcji $\Gamma_{ij}(x^2)$. Trudności te związane są z rozkładem na ułamki proste dość złożonych operatorów

$$\frac{E_{ij}}{\det [D_{ij}]}$$

W praktyce spotykamy się jednak najczęściej z siatkami kratowymi o pewnych własnościach symetrii sprężystej. Dla takich siatek znalezienie funkcji $\Gamma_{ij}(x^2)$ jest na ogół proste.

W punkcie tym rozpatrujemy siatki, dla których przez każdy przegub można poprowadzić dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny symetrii sprężystej. Są to siatki ortotropowe, dla których zachodzą równości

$$A^{1112} = A^{1222} = 0,$$

gdy kierunki ortotropii pokrywają się z liniami parametrycznymi. Zatem równania (2.2) w tym przypadku przyjmują postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} A^{1111} u_1'' + A^{1122} (2su_2' + s^2 u_1) &= -q^1 + A^{1122} u_{1,2}(x^1, 0), \\ A^{1122} (2su_1' + u_2'') + A^{2222} s^2 u_2 &= -q^2 + A^{2222} u_{2,2}(x^1, 0). \end{aligned}$$

Równania (4.1) można rozwiązać za pomocą całek tylko sinusowych i tylko cosinusowych. Należy w tym celu dowolnie rozłożone obciążenia q^k rozbić na część symetryczną i na część antysymetryczną względem osi x^2 , a następnie rozpatrzyć oddzielnie dwa szczególne przypadki. W pierwszym przypadku należy uwzględnić część antysymetryczną obciążenia q^1 oraz część symetryczną obciążenia q^2 , w drugim zaś przypadku pozostałe części.

Rozpatrzmy teraz pierwszy przypadek. Antysymetryczną część \bar{q}^1 obciążenia q^1 rozwijamy w pojedynczą całkę sinusową

$$(4.2) \quad \bar{q}^1 = \int_0^{\infty} \bar{B}^1 \sin \omega x^1 d\omega,$$

a symetryczną część \bar{q}^2 obciążenia q^2 rozwijamy w całkę cosinusową

$$(4.3) \quad \bar{q}^2 = \int_0^{\infty} \bar{B}^2 \cos \omega x^1 d\omega.$$

Dalej przyjmujemy

$$(4.4) \quad \begin{aligned} A^{1122} u_{1,2}(x^1, 0) &= \int_0^{\infty} \bar{C}^1 \sin \omega x^1 d\omega, \\ A^{2222} u_{2,2}(x^1, 0) &= \int_0^{\infty} \bar{C}^2 \cos \omega x^1 d\omega \end{aligned}$$

oraz

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \bar{u}_1(x^1) &= \int_0^{\infty} \bar{w}^1 \sin \omega x^1 d\omega, \\ \bar{u}_2(x^1) &= \int_0^{\infty} \bar{w}^2 \cos \omega x^1 d\omega. \end{aligned}$$

Podstawiając (4.2), (4.3), (4.4) i (4.5) do (4.1) otrzymujemy

$$[\bar{D}_{\alpha\beta}] [\bar{w}^\alpha] = [\bar{C}^\alpha - \bar{B}^\alpha], \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{D}_{11} &= A^{1122} s^2 - A^{1111} \omega^2, \\ \bar{D}_{12} &= -\bar{D}_{21} = -2A^{1122} \omega s, \\ \bar{D}_{22} &= A^{2222} s^2 - A^{1122} \omega^2. \end{aligned}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$(4.6) \quad \{\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}(x^2)\} = \frac{\bar{E}_{\beta\alpha}}{\det[\bar{D}_{\alpha\beta}]},$$

$$(4.7) \quad \{\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}(x^2)\} * \bar{B}^\beta = \{\bar{\Phi}_\alpha(x^2)\},$$

gdzie $\bar{E}_{\alpha\beta}$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu $\bar{D}_{\alpha\beta}$ w $\det[\bar{D}_{\alpha\beta}]$, rozwiązanie można napisać w postaci

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \int_0^{\infty} [\bar{\Gamma}_{1\beta}(x^2) \bar{C}^\beta - \bar{\Phi}_1(x^2)] \sin \omega x^1 d\omega, \\ \bar{u}_2 &= \int_0^{\infty} [\bar{\Gamma}_{2\beta}(x^2) \bar{C}^\beta - \bar{\Phi}_2(x^2)] \cos \omega x^1 d\omega. \end{aligned}$$

W tym przypadku znalezienie funkcji $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}(x^2)$ nie sprawia większych kłopotów.

Rozwiązanie dla drugiego przypadku otrzymuje się identycznie zamieniając całki sinusowe na cosinusowe i odwrotnie. A zatem zmieniają się tylko znaki przy operatorach \bar{D}_{12} i \bar{D}_{21} . Rozwiązanie ogólne jest sumą obu rozwiązań.

Jeżeli całkowite obciążenie odpowiada jednemu z omawianych przypadków, to dla $\xi_n=0$ można tym sposobem otrzymać rozwiązanie zagadnień ortotropowych pasm kratowych, podpartych przegubowo przesuwnie wzdłuż linii $x^2=x_n^2$. Załóżmy, że obciążenie q^1 jest antysymetrycznie, a q^2 symetrycznie rozłożone względem osi x^2 oraz że $\xi_n=0$. A zatem

$$q^1=0, \quad q^2 = \sum_{n=1}^N h^{x_n^2} \int_0^\infty \bar{R}_n \cos \omega x^1 d\omega.$$

Stąd

$$(4.8) \quad \begin{aligned} u_1 &= \int_0^\infty \left[\bar{\Gamma}_{1\beta}(x^2) \bar{C}^\beta + \sum_{n=1}^N \bar{\Gamma}_{12}(x^2) \bar{R}_n h^{x_n^2} - \bar{\Phi}_1(x^2) \right] \sin \omega x^1 d\omega, \\ u_2 &= \int_0^\infty \left[\bar{\Gamma}_{2\beta}(x^2) \bar{C}^\beta + \sum_{n=1}^N \bar{\Gamma}_{22}(x^2) \bar{R}_n h^{x_n^2} - \bar{\Phi}_2(x^2) \right] \cos \omega x^1 d\omega. \end{aligned}$$

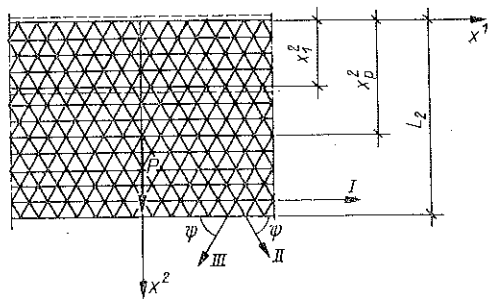
Równania dla wyznaczania stałych R_n mają postać następującą:

$$(4.9) \quad \sum_{r=1}^{n-1} \bar{\Gamma}_{22}(x_n^2 - x_r^2) \bar{R}_r = \bar{\Phi}_2(x_n^2) - \bar{\Gamma}_{2\beta}(x_n^2) \bar{C}^\beta.$$

5. PRZYKŁAD

Dla zilustrowania przedstawionego sposobu rozwiązywania pasm kwadratowych wyznaczmy składowe stanu przemieszczenia u_k dla pasma przedstawionego na rys. 4, przyjmując $\psi = \pi/3$, $x_1^2 < x_p^2$, $\xi_1=0$.

Pasmo na brzegach podparte jest przegubowo nieprzesuwne, natomiast podpora pośrednia daje przegubowo przesuwne podparcie węzłów. Kierunek przesuwu jest równoległy do osi x^1 . Obciążenie pasma stanowi siła skupiona o kierunku działania równoległym do osi x^2 , przyłożona do węzła o współrzędnych 0 i x_p^2 .



Rys. 4

Składowe tensora sływności sprężystej dla rozpatrywanej siatki wynoszą [2]:

$$\begin{aligned} A^{1111} &= R^{(I)} + \frac{1}{16} R^{(II)} + \frac{1}{16} R^{(III)}, & A^{1112} &= A^{1222} = 0, \\ A^{1122} &= \frac{3}{16} R^{(II)} + \frac{3}{16} R^{(III)}, & A^{2222} &= \frac{9}{16} R^{(II)} + \frac{9}{16} R^{(III)}. \end{aligned}$$

Przyjmując

$$R^{(I)} = R^{(II)} = R^{(III)} = S$$

oraz oznaczając

$$A = \frac{3}{8} S,$$

otrzymujemy

$$A^{1111} = A^{2222} = 3A, \quad A^{1122} = A.$$

Obciążenie jest symetrycznie rozłożone względem osi x^2 , zatem

$$\bar{q}^1 = 0, \quad \bar{q}^2 = \int_0^\infty \frac{P}{\pi} h^{x^2} \cos \omega x^1 d\omega,$$

a stąd

$$\bar{B}^1 = 0, \quad \bar{B}^2 = \frac{P}{\pi} h^{x^2}.$$

Operatory $\bar{D}_{\alpha\beta}$ mają postać następującą:

$$\bar{D}_{11} = A(s^2 - 3\omega^2), \quad \bar{D}_{12} = -\bar{D}_{21} = -2A\omega s, \quad \bar{D}_{22} = A(3s^2 - \omega^2),$$

mamy więc

$$\bar{E}_{11} = A(3s^2 - \omega^2), \quad \bar{E}_{12} = -\bar{E}_{21} = 2A\omega s, \quad \bar{E}_{22} = A(s^2 - 3\omega^2)$$

oraz

$$\det [\bar{D}_{\alpha\beta}] = 3A^2 (s^2 - \omega^2)^2.$$

Zatem na podstawie (4.6) i (4.7) otrzymujemy

$$\bar{F}_{11}(x^2) = \frac{1}{3A} [3\beta''(x^2) - \omega^2 \beta(x^2)],$$

$$\bar{F}_{12}(x^2) = -\bar{F}_{21}(x^2) = \frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2),$$

$$\bar{F}_{22}(x^2) = \frac{1}{3A} [\beta''(x^2) - 3\omega^2 \beta(x^2)],$$

$$\bar{\Phi}_1(x^2) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < x_p^2, \\ \frac{2\omega P}{3\pi A} \beta'(x^2 - x_p^2), & \text{jeśli } 0 \leq x_p^2 < x^2, \end{cases}$$

$$\bar{\Phi}_2(x^2) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } 0 \leq x^2 < x_p^2, \\ \frac{P}{3\pi A} [\beta''(x^2 - x_p^2) - 3\omega^2 \beta(x^2 - x_p^2)], & \text{jeśli } 0 \leq x_p^2 < x^2, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned}\beta(x^2) &= \frac{1}{2\omega^2} \left[x^2 \operatorname{ch}(\omega x^2) - \frac{1}{\omega} \operatorname{sh}(\omega x^2) \right], \\ \beta'(x^2) &= \frac{x^2}{2\omega} \operatorname{sh}(\omega x^2), \\ \beta''(x^2) &= \frac{1}{2} \left[x^2 \operatorname{ch}(\omega x^2) + \frac{1}{\omega} \operatorname{sh}(\omega x^2) \right].\end{aligned}$$

W rozpatrywanym przypadku $N=1$, zatem rozwiązanie (4.8) ma postać: dla $x^2 < x_1^2$

$$\begin{aligned}u_1 &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{3A} (3\beta''(x^2) - \omega^2 \beta(x^2)) \bar{C}^1 + \frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2) \bar{C}^2 \right] \sin \omega x^1 d\omega, \\ u_2 &= \int_0^\infty \left[-\frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2) \bar{C}^1 + \frac{1}{3A} (\beta''(x^2) - 3\omega^2 \beta(x^2)) \bar{C}^2 \right] \cos \omega x^1 d\omega;\end{aligned}$$

dla $x_1^2 < x^2 < x_p^2$

$$\begin{aligned}u_1 &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{3A} (3\beta''(x^2) - \omega^2 \beta(x^2)) \bar{C}^1 + \frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2) \bar{C}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2 - x_1^2) \bar{R}_1 \right] \sin \omega x^1 d\omega, \\ u_2 &= \int_0^\infty \left[-\frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2) \bar{C}^1 + \frac{1}{3A} (\beta''(x^2) - 3\omega^2 \beta(x^2)) \bar{C}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3A} (\beta''(x^2 - x_1^2) - 3\omega^2 \beta(x^2 - x_1^2)) \bar{R}_1 \right] \cos \omega x^1 d\omega;\end{aligned}$$

dla $x_p^2 < x^2$

$$\begin{aligned}u_1 &= \int_0^\infty \left[\frac{1}{3A} (3\beta''(x^2) - \omega^2 \beta(x^2)) \bar{C}^1 + \frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2) \bar{C}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2 - x_1^2) \bar{R}_1 - \frac{2\omega P}{3\pi A} \beta'(x^2 - x_p^2) \right] \sin \omega x^1 d\omega, \\ u_2 &= \int_0^\infty \left[-\frac{2\omega}{3A} \beta'(x^2) \bar{C}^1 + \frac{1}{3A} ((\beta''(x^2) - 3\omega^2 \beta(x^2)) \bar{C}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3A} (\beta''(x^2 - x_1^2) - 3\omega^2 \beta(x^2 - x_1^2)) \bar{R}_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{P}{3\pi A} (\beta''(x^2 - x_p^2) - 3\omega^2 \beta(x^2 - x_p^2)) \right] \cos \omega x^2 d\omega.\end{aligned}$$

Dla wyznaczenia stałych \bar{C}^α i \bar{R}_1 mamy w tym przypadku równania

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_2(x_1^2) - \Gamma_{2\beta}(x_1^2) \bar{C}^\beta &= 0, \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}(L_2) \bar{C}^\beta + \bar{\Gamma}_{\alpha 2}(L_2 - x_1^2) \bar{R}_1 - \bar{\Phi}_\alpha(L_2) &= 0.\end{aligned}$$

Ponieważ w rozpatrywanym przykładzie

$$\bar{\Phi}_2(x_1^2) = 0,$$

więc pierwsze równanie ma postać

$$2\omega\beta'(x_1^2) \bar{C}^1 - [\beta''(x_1^2) - 3\omega^2\beta(x_1^2)] \bar{C}^2 = 0,$$

pozostałe zaś dwa mają postać następującą:

$$\begin{aligned}[3\beta''(L_2) - \omega^2\beta(L_2)] \bar{C}^1 + 2\omega\beta'(L_2) \bar{C}^2 + 2\omega\beta'(L_2 - x_1^2) \bar{R}_1 - \frac{2\omega P}{\pi} \beta'(L_2 - x_p^2) &= 0, \\ -2\omega\beta'(L_2) \bar{C}^1 + [\beta''(L_2) - 3\omega^2\beta(L_2)] \bar{C}^2 + [\beta''(L_2 - x_1^2) - 3\omega^2\beta(L_2 - x_1^2)] \bar{R}_1 - \\ - \frac{P}{\pi} [\beta''(L_2 - x_p^2) - 3\omega^2\beta(L_2 - x_p^2)] &= 0.\end{aligned}$$

W ten sposób zagadnienie zostało sprowadzone do rozwiązania trzech liniowych równań algebraicznych.

Przedstawiony sposób rozwiązywania pasm kratowych podpartych wzdłuż linii pośrednich może być więc z korzyścią stosowany do praktycznych obliczeń.

6. LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. CZ. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., 23, 6, 801 - 816, 1971.
2. CZ. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
3. S. KONIECZNY, F. PIETRAS, CZ. WOŹNIAK, *O liniowych zagadnieniach dyskretnej teorii sprężystości*, I, Rozpr. Inżyn., 20, 2, 201 - 216, 1972.
4. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1971.
5. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
6. K. H. BOJDA, *Ugięcia płyt na sprężystym podłożu o zmiennym współczynniku podatności*, Rozpr. Inżyn., 19, 3, 1971.
7. K. H. BOJDA, *Ugięcia płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach i pewnych nieciągłych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inżyn., 19, 4, 601 - 611, 1971.
8. K. H. BOJDA, *Pewne problemy statyki płyt siatkowych*, Rozpr. Inżyn., 20, 2, 269 - 281, 1972

Резюме

СТАТИКА ГУСТЫХ, РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕТЧАТЫХ ПОЛОС

В работе обсуждены решения дифференциальных уравнений для однородных сеточных решетчатых полос, с особенным учетом шарнирно подпертых систем передвигающихся вдоль срединных линий, параллельных краям полосы.

Решение получено при помощи операторов Микусинского.

SUMMARY

STATICS OF DENSE, REGULAR TRUSS STRIPS

In the paper are discussed the solutions of differential equations for uniform lattice-type truss strips, particular attention being paid to such systems which are simply supported along certain intermediate lines parallel to the edges of the strips. The solution is found by means of the Mikusiński operators.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 kwietnia 1973 r.
