

STATECZNOŚĆ NIEJEDNORODNEJ, GRUBOŚCIENNEJ RURY PODDANEJ SKOŃCZONYM ODKSZTAŁCENIOM

KAZIMIERZ REGIŃSKI (WARSZAWA)

WSTĘP

Zagadnienia stateczności elementów sprężystych, poddanych dużym odkształceniom, były już przedmiotem licznych prac. Pierwsze ścisłe rozwiązanie takiego zagadnienia podał w r. 1955 WILKES w pracy [1], gdzie przedyskutował warunki utraty stateczności rury ściskanej osiowo. W r. 1959 GREEN i SPENCER w pracy [2] rozwiązali zagadnienie stateczności walca kołowego, poddanego osiowemu ściskaniu i skręcaniu. W latach następnych powstaje wiele prac (por. [3, 4 i 5]), których autorzy analizują warunki utraty stateczności elementów o symetrii osiowej dla różnorodnych klas materiałów. Uwzględniane są również różne rodzaje warunków brzegowych.

Autorzy wyżej wymienionych prac opierali się na teorii stworzonej przez GREENA, RIVLINA i SHIELDA [6], a następnie rozwiniętej w pracach GREENA i ZERNY [7] oraz GUO ZHONG-HENGA i URBANOWSKIEGO [8]. W świetle tej teorii przez utratę stateczności rozumie się osiągnięcie przez układ takiego stanu, w którym problem brzegowy dla małych dodatkowych deformacji nałożonych na odkształcenie skończone ma rozwiązanie niezerowe. Powyższe kryterium stateczności będziemy nazywać kryterium bifurkacyjnym. W przypadku gdy zagadnienie brzegowe dla małych dodatkowych deformacji jest zagadnieniem samosprężonym, kryterium bifurkacyjne jest równoważne bardziej ogólnemu kryterium kinetycznemu. Kryterium kinetyczne określa stan układu jako stateczny, jeśli amplituda dodatkowego ruchu wywołanego zewnętrznym zaburzeniem jest mała, o ile zaburzenie jest dostatecznie małe [9].

Wszystkie znane dotychczas rozwiązania zagadnień stateczności dotyczą materiałów jednorodnych lub materiałów o niejednorodności skokowej [10]. Rozpatrywanie takich materiałów jest oczywiście pewną idealizacją, gdyż w praktyce mamy najczęściej do czynienia z niejednorodnościami ciągłymi. Należy pamiętać, że rozwój teorii stateczności przy dużych deformacjach jest w znacznej mierze umotywowany potrzebą poznania własności mechanicznych gumy i materiałów gumopodobnych. Niejednorodność tych materiałów może być celowo uzyskiwana w procesie technologicznym, może też być, co się najczęściej zdarza, wynikiem niedoskonałości procesu technologicznego.

1. RÓWNANIA RÓWNOWAGI NIEJEDNORODNEGO CIAŁA O SYMETRII OSIOWEJ

1.1. Założenia

Rozważać będziemy niejednorodne ciało o symetrii osiowej. O materiale zakładamy, że jest izotropowy, nieściśliwy i sprężysty o zupełnie dowolnej charakterystyce fizycznej, opisanej przez potencjał sprężysty W . Rodzaj niejednorodności materiału zostanie w przyszłości zdefiniowany przez określenie zależności potencjału sprężystego W od współrzędnych konwekcyjnych.

Rozpatrywać będziemy trzy stany odkształcanego ciała. Stan początkowy (nieodkształcony) oznaczać będziemy przez \hat{B} . Ciało \hat{B} poddajemy wydłużeniu λ w kierunku osi symetrii ($\lambda > 1$ odpowiada rozciąganiu, $\lambda < 1$ ściskaniu). Wydłużeniu λ towarzyszy pewna zmiana przekroju poprzecznego ciała (deformacja jest izochoryczna). Odkształcone w ten sposób ciało oznaczać będziemy przez B . Z kolei na ciało B nakładamy pole małych przemieszczeń εw (gdzie ε jest małym parametrem). Tak odkształcone ciało oznaczymy przez B' .

Najbliższym naszym celem będzie wyprowadzenie równań równowagi ciała B' .

1.2. Wstępny stan deformacji

Wprowadzimy w B współrzędne walcowe $(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = (r, \vartheta, z)$, które będziemy uważać za współrzędne konwekcyjne. Związek tych współrzędnych ze współrzędnymi prostokątnymi x_1, x_2, x_3 w ciele \hat{B} i współrzędnymi prostokątnymi y_1, y_2, y_3 w ciele B definiuje odkształcenie. Przyjmujemy następujące związki:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\lambda} r \cos \vartheta, & x_2 &= \sqrt{\lambda} r \sin \vartheta, & x_3 &= z/\lambda, \\ y_1 &= r \cos \vartheta, & y_2 &= r \sin \vartheta, & y_3 &= z. \end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz następujące oznaczenia: g_{ij}, g^{ij} oznaczają odpowiednio kowariantne i kontrawariantne współrzędne tensora metrycznego w \hat{B} ; G_{ij}, G^{ij} kowariantne i kontrawariantne współrzędne tensora metrycznego w B ; Γ_{jk}^i euklidesowe symbole Christoffela w B .

Na podstawie (1.1) po prostych obliczeniach [7] otrzymujemy

$$(1.2) \quad \begin{aligned} g_{ij} &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{bmatrix}, & g^{ij} &= \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \\ G_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & G^{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad g = \det g_{ij} = r^2, \quad G = \det G_{ij} = r^2$$

oraz

$$(1.4) \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = r^{-1};$$

pozostałe $\Gamma_{jk}^i = 0$.

Wykorzystując wzory (1.2) i (1.3) obliczamy tensor odkształcenia γ_{ij} i niezmienniki odkształcenia I_1, I_2, I_3 :

$$(1.5) \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}),$$

$$(1.6) \quad I_1 = g^{ij} G_{ij} = 2\lambda^{-1} + \lambda^2, \quad I_2 = g_{ij} G^{ij} I_3 = 2\lambda + \lambda^{-2}, \quad I_3 = G/g = 1.$$

Założmy, że potencjał sprężysty \tilde{W} , opisujący odkształcane ciało, jest postaci

$$(1.7) \quad \tilde{W} = \tilde{W}(I_1, I_2, \tilde{r}),$$

gdzie

$$\tilde{r} = \sqrt{\lambda} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

tzn. zależy jawnie od odległości od osi symetrii ciała. W dalszych rozważaniach dla wygody będziemy posługiwać się funkcją

$$(1.8) \quad W(I_1, I_2, r) = \tilde{W}(I_1, I_2, \sqrt{\lambda} r).$$

Tensor naprężenia τ^{ij} jest związany z tensorem γ_{ij} wzorem

$$(1.9) \quad \tau^{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{ji}} \right) + p G^{ij},$$

gdzie p jest funkcją współrzędnych konwekcyjnych, którą możemy wyznaczyć z równań równowagi i warunków brzegowych. Po obliczeniu pochodnych występujących we wzorze (1.9) otrzymujemy

$$(1.10) \quad \tau^{ij} = \Phi g^{ij} + \Psi b^{ij} + p G^{ij},$$

gdzie

$$(1.11) \quad \Phi = 2 \frac{\partial}{\partial I_1} W(I_1, I_2, r), \quad \Psi = 2 \frac{\partial}{\partial I_2} W(I_1, I_2, r),$$

$$b^{ij} = g^{ij} I_1 - g^{ir} g^{js} G_{rs}, \quad p = p(r, \vartheta, z).$$

Poszczególne składowe tensora τ^{ij} wynoszą:

$$(1.12) \quad \tau^{11} = \lambda^{-1} \Phi + (\lambda + \lambda^{-2}) \Psi + p,$$

$$\tau^{22} = \lambda^{-1} r^{-2} \Phi + (\lambda + \lambda^{-2}) r^{-2} \Psi + r^{-2} p,$$

$$\tau^{33} = \lambda^2 \Phi + 2\lambda \Psi + p,$$

$$\tau^{ij} = 0 \quad \text{gdy} \quad i \neq j.$$

Równania równowagi ciała w stanie B mają postać [7]

$$(1.13) \quad \tau_{,i}^{ik} + \Gamma_{ir}^i \tau^{rk} + \Gamma_{ir}^k \tau^{ir} = 0.$$

Po podstawieniu do powyższych równań wartości składowych tensora τ^{ij} możemy równania te po prostych przekształceniach sprowadzić do układu

$$(1.14) \quad \lambda^{-1} \Phi_{,r} + (\lambda + \lambda^{-2}) \Psi_{,r} + p_{,r} = 0,$$

$$p_{,\vartheta} = 0, \quad p_{,z} = 0.$$

Układ (1.14) będzie spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1.15) \quad p = p^{(F)} = -\lambda^{-1} \Phi - (\lambda + \lambda^{-2}) \Psi + K,$$

gdzie K jest pewną stałą, którą możemy wyznaczyć z warunków brzegowych. Ze względu na przyszłe zastosowania wyznaczmy stałą K w przypadku, gdy jednym z warunków brzegowych jest znikanie obciążenia na pewnej powierzchni S o równaniu $r = \text{const}$. Oznaczając przez n_i współrzędne jednostkowego wektora normalnego do S , a przez G_i kowariantne wektory bazy w B możemy powyższy warunek zapisać w postaci

$$(1.16) \quad \tau^{ij} n_i G_j = 0 \quad \text{na } S,$$

co po wykorzystaniu (1.12) prowadzi do

$$(1.17) \quad \tau^{11} = 0 \quad \text{na } S.$$

Żeby spełnić warunek (1.17) musimy przyjąć $K = 0$. Prowadzi to do następujących równości:

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \tau^{33} &= (\lambda^2 - \lambda^{-1}) (\Phi + \lambda^{-1} \Psi), & \tau^{11} &= \tau^{22} = \tau^{12} = \tau^{23} = \tau^{31} = 0, \\ p &= -\lambda^{-1} \Phi - (\lambda + \lambda^{-2}) \Psi. \end{aligned}$$

1.3. Mała dodatkowa deformacja

Nałożmy na ciało B pole małych przemieszczeń εw (gdzie ε jest małym parametrem). Tak odkształcone ciało oznaczmy przez B' . Przy przejściu ze stanu B do B' wielkości obliczone w poprzednim punkcie doznają pewnych przyrostów. Liniową część tych przyrostów oznaczać będziemy odpowiednią literą z «primem». Jeżeli przez w_i oznaczmy kowariantne składowe wektora w , to w B' mamy następujące związki:

$$(1.19) \quad \begin{aligned} G'_i &= (w^r \parallel_i) G_r, \\ G'_{ij} &= w_i \parallel_j + w_j \parallel_i, & G'^{ij} &= -G^{ir} G^{js} G'_{rs}, & G' &= G G'^{ij} G'_{ij}, \\ I'_1 &= g^{rs} G'_{rs}, & I'_2 &= g_{rs} G'^{rs}, & I'_3 &= G^{rs} G'_{rs} = 0, \\ \Phi' &= A I'_1 + F I'_2, & \Psi' &= F I'_1 + B I'_2, \\ A &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2}, & B &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}, & F &= 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2}, \\ b'^{ij} &= (g^{ij} g^{rs} - g^{ir} g^{js}) G'_{rs}, \\ \tau'^{ij} &= \Phi' g^{ij} + \Psi' b^{ij} + \Psi b'^{ij} + p G'^{ij} + p' G^{ij}. \end{aligned}$$

W powyższych wzorach podwójna pionowa kreska oznacza pochodną kowariantną w ciele B względem θ^i .

Ciało B' jest w równowadze, jeśli [7]

$$(1.20) \quad \tau'_{,i}{}^{ij} + \Gamma_{ir}^i \tau'^{rj} + \Gamma_{ir}^j \tau'^{ir} + \Gamma_{ir}^j \tau'^{ir} + \Gamma_{ir}^r \tau'^{ij} = 0,$$

gdzie

$$(1.21) \quad \Gamma'_{ij}{}^r = \frac{1}{2} G^{rs} (G'_{si,j} + G'_{sj,i} - G'_{ij,s}) + \frac{1}{2} G'^{rs} (G_{st,j} + G_{sj,t} - G_{ij,s}).$$

Zajmiemy się obecnie obliczeniem wyrażeń występujących w równaniu (1.20). W tym celu oznaczmy dla wygody przez u, v, w kowariantne współrzędne w_1, w_2, w_3 wektora w . (Pochodne cząstkowe względem $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ oznaczmy odpowiednio wskaźnikami r, ϑ, z). Wykorzystując wzory (1.19) po prostych obliczeniach otrzymujemy

$$(1.22) \quad \begin{aligned} G'_{11} &= -G'^{11} = 2u_r, & G'_{23} &= -r^2 G'^{23} = v_z + w_\vartheta, \\ G'_{22} &= -r^4 G'^{22} = 2(v_\vartheta + ru), & G'_{31} &= -G'^{31} = u_z + w_r, \\ G'_{33} &= -G'^{33} = 2w_z, & G'_{12} &= -r^2 G'^{12} = u_\vartheta + v_r - 2r^{-1}v; \end{aligned}$$

$$(1.23) \quad \begin{aligned} \Gamma'_{11} &= u_{rr}, & \Gamma'_{22} &= u_{\vartheta\vartheta} - \frac{2}{r}v_\vartheta + ru_r - u, & \Gamma'_{33} &= u_{zz}, \\ \Gamma'_{31} &= u_{rz}, & \Gamma'_{23} &= u_{\vartheta z} - \frac{1}{r}v_z, & \Gamma'_{12} &= u_{r\vartheta} - \frac{1}{r}u_\vartheta - \frac{1}{r}v_r + \frac{2}{r^2}v, \\ \Gamma'_{11} &= \frac{1}{r^2} \left(v_{rr} + \frac{2}{r^2}v - \frac{2}{r}v_r \right), & \Gamma'_{22} &= \frac{1}{r^2} (v_{\vartheta\vartheta} + 2ru_\vartheta + rv_r - 2v), \\ \Gamma'_{33} &= \frac{1}{r^2} v_{zz}, & \Gamma'_{31} &= \frac{1}{r^2} \left(v_{rz} - \frac{1}{r}v_z \right), & \Gamma'_{23} &= \frac{1}{r^2} (v_{\vartheta z} + ru_z), \\ \Gamma'_{12} &= \frac{1}{r^2} \left(v_{r\vartheta} - \frac{2}{r}v_\vartheta + ru_r - u \right), & \Gamma'_{11} &= w_{rr}, & \Gamma'_{22} &= w_{\vartheta\vartheta} + rw_r, \\ \Gamma'_{33} &= w_{zz}, & \Gamma'_{23} &= w_{\vartheta z}, & \Gamma'_{13} &= w_{rz}, & \Gamma'_{12} &= w_{r\vartheta} - \frac{1}{r}w_\vartheta; \end{aligned}$$

$$(1.24) \quad \begin{aligned} I'_1 &= 2 \left[\frac{1}{\lambda} u_r + \frac{1}{\lambda r^2} (v_\vartheta + ru) + \lambda^2 w_z \right], \\ I'_2 &= -2 \left[\lambda u_r + \frac{\lambda}{r^2} (v_\vartheta + ru) + \frac{1}{\lambda^2} w_z \right]; \end{aligned}$$

$$(1.25) \quad I'_3 = 2 \left[u_r + \frac{1}{r^2} (v_\vartheta + ru) + w_z \right] = 0;$$

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \Phi' &= 2A \left[\frac{1}{\lambda} u_r + \frac{1}{\lambda r^2} (v_\vartheta + ru) + \lambda^2 w_z \right] - 2F \left[\lambda u_r + \frac{\lambda}{r^2} (v_\vartheta + ru) + \frac{1}{\lambda^2} w_z \right], \\ \Psi' &= 2F \left[\frac{1}{\lambda} u_r + \frac{1}{\lambda r^2} (v_\vartheta + ru) + \lambda^2 w_z \right] - 2B \left[\lambda u_r + \frac{\lambda}{r^2} (v_\vartheta + ru) + \frac{1}{\lambda^2} w_z \right]; \end{aligned}$$

$$(1.27) \quad \begin{aligned} b'^{11} &= \frac{2}{\lambda^2 r^2} (v_\vartheta + ru) + 2\lambda w_z, & b'^{12} &= -\frac{1}{\lambda^2 r^2} \left(u_\vartheta + v_r - \frac{2}{r}v \right), \\ b'^{13} &= -\lambda (u_z + w_r), & b'^{22} &= \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} u_r + \lambda w_z \right), \\ b'^{23} &= -\frac{\lambda}{r^2} (v_z + w_\vartheta), & b'^{33} &= 2\lambda \left[u_r + \frac{1}{r^2} (v_\vartheta + ru) \right]. \end{aligned}$$

1.4. Równania różniczkowe zagadnienia utraty stateczności

Podamy jawną postać równania (1.20). Rozpatrzmy oddzielnie dwa przypadki: pierwszy, gdy dodatkowe małe odkształcenie jest osiowo-symetryczne i drugi, gdy jest asymetryczne. W pierwszym przypadku rozważania przeprowadzimy bez odwoływania się do konkretnej postaci potencjału sprężystego W . W przypadku drugim posługiwanie się bliżej niezdefiniowanym potencjałem W prowadzi niestety do rozwlekłych i mało czytelnych wzorów. Z tego względu ograniczymy nasze rozważania do klasy tzw. materiałów Mooneya.

Założmy najpierw, że dodatkowe małe odkształcenie jest osiowo-symetryczne. Oznacza to, że współrzędna v i wszystkie pochodne cząstkowe po ϑ są równe zeru. Korzystając z (1.22), (1.26) i (1.27) obliczamy składowe τ'^{ij} :

$$\begin{aligned}
 \tau'^{11} &= 2 \frac{u}{r} \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \frac{1}{\lambda^3} F + \frac{1}{\lambda^2} \Psi \right] + 2u_r \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \frac{1}{\lambda^3} F - p \right] + 2w_z \left[\lambda A - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda} \right) B + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{1}{\lambda^3} + 1 + \lambda^3 \right) F + \lambda \Psi \right] + p', \\
 r^2 \tau'^{22} &= 2 \frac{u}{r} \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \frac{1}{\lambda^3} F - p \right] + 2u_r \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \right. \\
 (1.28) \quad &\quad \left. + \frac{1}{\lambda^3} F + \frac{1}{\lambda^2} \Psi \right] + 2w_z \left[\lambda A - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda} \right) B + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{1}{\lambda^3} + 1 + \lambda^3 \right) F + \lambda \Psi \right] + p', \\
 \tau'^{33} &= 2 \frac{u}{r} [\lambda A - 2\lambda^2 B + (2 - \lambda^3) F + \lambda \Psi] + 2u_r [\lambda A - 2\lambda^2 B + \\
 &\quad + (2 - \lambda^3) F + \lambda \Psi] + 2w_z \left[\lambda^4 A - \frac{2}{\lambda} B + (2\lambda^3 - 1) F - p \right] + p', \\
 \tau'^{13} &= -(\lambda \Psi + p) (u_z + w_r), \quad \tau'^{12} = \tau'^{23} = 0.
 \end{aligned}$$

Podstawmy teraz wielkości (1.4), (1.18), (1.23) i (1.28) do równań równowagi (1.20). Jedno z równań (dla $j=2$) jest spełnione tożsamościowo. Pozostałe dwa równania przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 (1.29) \quad & 2 \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \frac{1}{\lambda^3} F + \frac{1}{\lambda} \Phi + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda \right) \Psi \right] \left(u_{rr} + \frac{u_r}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + \\
 & + 2 \left[\lambda A - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda} \right) B + \left(-\frac{1}{\lambda^3} + 1 + \lambda^3 \right) F + \frac{1}{2\lambda} \Phi + \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \lambda \right) \Psi \right] w_{rz} + \\
 & + \lambda (\lambda \Phi + \Psi) u_{zz} + p'_r + 2 \left[\frac{1}{\lambda^2} A_r - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B_r + \frac{1}{\lambda^3} F_r + \frac{1}{\lambda^2} \Psi_r \right] \frac{u}{r} +
 \end{aligned}$$

$$(1.29) \quad \begin{aligned} &+ 2 \left[\frac{1}{\lambda^2} A_r - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B_r + \frac{1}{\lambda^3} F_r + \frac{1}{\lambda} \Phi_r + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi_r \right] u_r + \\ &+ 2 \left[\lambda A_r - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda} \right) B_r + \left(-\frac{1}{\lambda^3} + 1 + \lambda^3 \right) F_r + \lambda \Psi_r \right] w_z = 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(1.30) \quad \begin{aligned} &[2\lambda A - 4\lambda^2 B + 2(2 - \lambda^3)F + 3\lambda\Psi + \lambda^2\Phi] \left(u_{rz} + \frac{u_z}{r} \right) + \\ &+ 2 \left[\lambda^4 A - \frac{2}{\lambda} B + (2\lambda^3 - 1)F + 2\lambda\Psi + \lambda^2\Phi \right] w_{zz} + \\ &+ \left(\frac{1}{\lambda} \Phi + \frac{1}{\lambda^2} \Psi \right) \left(w_{rr} + \frac{w_r}{r} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} \Phi_r + \frac{1}{\lambda^2} \Psi_r \right) (u_z + w_r) + p'_z = 0. \end{aligned}$$

Równanie nieściślwości (1.25) redukuje się do postaci

$$(1.31) \quad u_r + \frac{1}{r} u + w_z = 0.$$

Równania (1.29)–(1.31) tworzą układ trzech równań różniczkowych cząstkowych z trzema niewiadomymi funkcjami u, w, p' .

Założmy z kolei, że dodatkowe małe odkształcenie jest asymetryczne. W tym przypadku ograniczymy nasze rozważania do pewnej, dosyć szerokiej klasy materiałów. Założmy mianowicie, że rozpatrywany materiał można opisać potencjałem sprężystym Mooneya

$$(1.32) \quad W = K_1(r) (I_1 - 3) + K_2(r) (I_2 - 3),$$

gdzie

$$(1.33) \quad \begin{aligned} K_1(r) &= m_1 + m_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r, \\ K_2(r) &= n_1 + n_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r; \end{aligned}$$

m_1, m_2, n_1, n_2 są stałymi materiałowymi. Ponieważ W jest funkcją nieujemną, przyjmujemy, że w obszarze ciała $K_1(r) \geq 0$ i $K_2(r) \geq 0$ [9]. W szczególnym przypadku, gdy $m_2 = n_2 = 0$, mamy do czynienia z materiałem jednorodnym. Przyjmując postać potencjału (1.32) na podstawie (1.11), (1.18) i (1.19), mamy

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \Phi &= 2(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r), \quad \Psi = 2(n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r), \\ A &= B = F = 0, \quad \Phi' = \Psi' = 0, \\ p &= -\frac{2}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) - 2 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r), \\ \tau^{ij} &= \Psi b^{ij} + p G^{ij} + p' G^{ij}. \end{aligned}$$

Korzystając z (1.2), (1.22) i (1.27) obliczamy składowe τ^{ij} :

$$\begin{aligned}
 \tau'^{11} &= 4(n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left[\frac{1}{\lambda^2 r^2} (v_\theta + ru) + \lambda w_z \right] + 4 \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] u_r + p', \\
 \tau'^{22} &= 4 \frac{1}{r^2} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left(\frac{1}{\lambda^2} u_r + \lambda w_z \right) + 4 \frac{1}{r^4} \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] (v_\theta + ru) + \frac{1}{r^2} p', \\
 (1.35) \quad \tau'^{33} &= 4(n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left[\lambda u_r + \frac{\lambda}{r^2} (v_\theta + ru) \right] + 4 \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] w_z + p', \\
 \tau'^{12} &= 2 \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \lambda (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \left(u_\theta + v_r - \frac{2}{r} v \right), \\
 \tau'^{13} &= 2 \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \frac{1}{\lambda^2} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] (u_z + w_r), \\
 \tau'^{23} &= 2 \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \frac{1}{\lambda^2} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] (v_z + w_\theta).
 \end{aligned}$$

Po podstawieniu wyrażeń (1.4), (1.18), (1.23) i (1.35) do równań równowagi (1.20) otrzymujemy układ trzech równań różniczkowych cząstkowych

$$\begin{aligned}
 (1.36) \quad & 2 \left(\frac{1}{r} n_1 + 2 \sqrt{\lambda} n_2 \right) \left[\frac{1}{\lambda^2 r^2} (v_\theta + ru) + \lambda w_z \right] + 2 (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left[\frac{1}{\lambda^2} \left(-\frac{2}{r^3} v_\theta + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{r^2} v_{r\theta} - \frac{1}{r^2} u + \frac{1}{r} u_r \right) + \lambda w_{rz} \right] + 2 \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} m_2 + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \sqrt{\lambda} n_2 \right] u_r + \\
 & + 2 \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \left[u_{rr} + \frac{1}{r} u_r - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{r^3} (v_\theta + ru) \right] + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \lambda (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \left(u_{\theta\theta} + v_{r\theta} - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{r} v_\theta \right) + \left[m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r + \frac{1}{\lambda} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \left(\frac{1}{\lambda} w_{rz} + \lambda^2 u_{zz} \right) - \\
 & - 2 \frac{1}{r} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left(\frac{1}{\lambda^2} u_r + \lambda w_z \right) + \frac{1}{2} p'_r = 0, \\
 & \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} m_2 + \sqrt{\lambda^3} n_2 \right) \left(u_\theta + v_r - \frac{2}{r} v \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \right. \\
 & \left. + \lambda (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \left[\frac{1}{r} \left(u_\theta + v_r - \frac{2}{r} v \right) + u_{r\theta} + v_{rr} + \frac{2}{r^2} v - \frac{2}{r} v_r \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1.36) \quad & + 2 \frac{1}{r^2} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left(\frac{1}{\lambda^2} u_{r\vartheta} + \lambda w_{\vartheta z} \right) + 2 \frac{1}{r^4} \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \right. \\
 \text{[c.d.]} \quad & \left. + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] v_{\vartheta\vartheta} + r u_{\vartheta} + \frac{1}{r^2} \left[(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\lambda} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \left(\frac{1}{\lambda} w_{\vartheta z} + \lambda^2 v_{zz} \right) + \frac{1}{2r^2} p'_\vartheta = 0, \\
 & \left[m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r + \frac{1}{\lambda} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \left[\frac{1}{\lambda} u_{rz} + \frac{1}{\lambda} w_{rr} + \frac{1}{\lambda r^2} (v_{\vartheta z} + w_{\vartheta\vartheta}) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\lambda r} (u_z + w_r) + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(2w_{zz} + u_{rz} + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta z} + \frac{1}{r} u_z \right) \right] + \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} m_2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}} n_2 \right) (u_z + w_r) + 2 (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left[\lambda u_{rz} + \frac{\lambda}{r^2} (v_{\vartheta z} + r u_z) \right] + \\
 & + 2 \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] w_{zz} + \frac{1}{2} p'_z = 0.
 \end{aligned}$$

Powyższe równania wraz z równaniem nieściśliwości (1.25) stanowią układ czterech równań różniczkowych z czterema niewiadomymi funkcjami u, v, w, p' .

2. SYMETRYCZNA POSTAĆ UTRATY STATECZNOŚCI

2.1. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Opierając się na wyprowadzonych równaniach rozpatrzmy zagadnienie stateczności niejednorodnej rury poddanej skończonemu odkształceniu. Załóżmy mianowicie, że ciało w stanie \hat{B} jest rurą o średnicy wewnętrznej \hat{a}_1 , średnicy zewnętrznej \hat{a}_2 i wysokości \hat{l} . W stanie B wymiary rury wynoszą odpowiednio a_1, a_2, l . Wymiary w stanach \hat{B} i B są związane zależnościami (1.1). Założenia dotyczące materiału i wstępnego stanu odkształcenia rury są identyczne jak w p. 1 niniejszej pracy. Ponadto przyjmujemy, że dodatkowe małe odkształcenie nałożone na odkształcenie skończone jest osiowo-symetryczne.

Założmy, że w stanie B rura obciążona jest w ten sposób, że na powierzchniach $z=0$ i $z=l$ obciążenie ma tylko składową normalną, a powierzchnie $r=a_1$ i $r=a_2$ są wolne od obciążeń. W p. 1.2 wykazaliśmy, że drugi z wymienionych warunków prowadzi do związków (1.18). Pierwszy warunek jest wówczas spełniony tożsamościowo. Załóżmy dalej, że przy przejściu ze stanu B do B'

1) powierzchnie $z=0, l$ pozostają płaskie, nieruchome i obciążone tylko naprężeniem normalnym,

2) powierzchnie $r=a_1, a_2$ są wolne od obciążeń.

Rozpatrzmy najpierw warunek 1. Oznaczmy przez \mathbf{n}^k i $\mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}'^k$ jednostkowe wektory normalne do powierzchni $\theta^k = \text{const}$ odpowiednio w stanie B i B' . Wektory te można przedstawić w postaci

$$(2.1) \quad \mathbf{n}^k = \frac{\mathbf{G}^k}{\sqrt{G^{kk}}}, \quad \mathbf{n} + \varepsilon \mathbf{n}'^k = \frac{\mathbf{G}^k + \varepsilon \mathbf{G}'^k}{\sqrt{G^{kk} + \varepsilon G'^{kk}}},$$

gdzie G^k , $G^k + \varepsilon G'^k$ są kontrawariantnymi wektorami bazy odpowiednio w stanie B i B' . Odpowiednie wektory kowariantne będziemy w przyszłości oznaczać G_k , $G_k + \varepsilon G'_k$. Powierzchnia $z=0$ jest obciążona tylko składową normalną, a więc dla stanu B' mamy

$$(2.2) \quad (\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}) (n_3 + \varepsilon n'_3) (G_j + \varepsilon G'_j) = q (n + \varepsilon n'),$$

gdzie n_i , $n_i + \varepsilon n'_i$ są kowariantnymi współrzędnymi wektorów n i $n + \varepsilon n'$, a q jest funkcją skalarną, określającą rozkład naprężenia normalnego na $z=0$. Mnożąc skalarnie obie strony równania (2.2) przez $G_k + \varepsilon G'_k$ otrzymujemy

$$(2.3) \quad (\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}) (n_i + \varepsilon n'_i) (G_{jk} + \varepsilon G'_{jk}) = 0 \quad \text{dla } k \neq 3.$$

Porządkując powyższe równanie względem ε i wykorzystując (1.18), (1.22) i (1.28) otrzymujemy

$$(2.4) \quad u_z + w_r = 0 \quad \text{dla } z=0.$$

Powierzchnia $z=0$ pozostaje płaska i nieruchoma, a więc dla stanu B' mamy

$$(2.5) \quad w = 0 \quad \text{dla } z=0.$$

Ponieważ analogiczne rozważania możemy przeprowadzić w przypadku powierzchni $z=l$, to warunki brzegowe 1 zapisujemy w postaci

$$(2.6) \quad \begin{aligned} w &= 0 & \text{dla } z=0, l, \\ u_z + w_r &= 0 & \text{dla } z=0, l. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe 2 oznaczają, że w stanie B' zachodzą związki

$$(2.7) \quad (\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}) (n_i + \varepsilon n'_i) (G_j + \varepsilon G'_j) = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2.$$

Wykorzystując równości (2.1) obliczamy współrzędne n_i i n'_i :

$$(2.8) \quad n_i = \left(\frac{1}{\sqrt{G^{11}}}, 0, 0 \right), \quad n'_i = \left(-\frac{1}{2} \frac{G'^{11}}{G^{11} \sqrt{G^{11}}}, 0, 0 \right).$$

Ponieważ $\tau^{1j} = 0$, możemy więc po uwzględnieniu (2.8) zredukować równość (2.7) do postaci

$$(2.9) \quad \tau'^{1j} = 0, \quad j=1, 2, 3 \quad \text{dla } r = a_1, a_2.$$

Po podstawieniu do powyższych równości wyrażeń (1.28) zapisujemy warunki brzegowe 2 w postaci

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi + \frac{1}{\lambda^2} \Psi \right) (u_z + w_r) &= 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2, \\ 2 \frac{u}{r} \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \frac{1}{\lambda^3} F + \frac{1}{\lambda^2} \Psi \right] &+ 2u_r \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \frac{1}{\lambda^3} F + \right. \\ &+ \frac{1}{\lambda} \Phi + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi \left. \right] + 2w_z \left[\lambda A - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda} \right) B + \right. \\ &+ \left. \left(-\frac{1}{\lambda^3} + 1 + \lambda^3 \right) F + \lambda \Psi \right] + p' = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2. \end{aligned}$$

Równania różniczkowe (1.29)–(1.31) wraz z warunkami brzegowymi (2.6) i (2.10) tworzą jednorodne zagadnienie brzegowe. Można pokazać, że zagadnienie to jest samosprężone.

Na podstawie wyników zawartych w [8] warunek samosprężoności możemy wyrazić w następujący sposób:

$$(2.11) \quad \int_S [w_s(\tau_1^{rs} + \tau_1^{rs} \cdot w_1^p \|_p + \tau_1^{rp} \cdot w_1^s \|_p) - w_s(\tau_2^{rs} + \tau_2^{rs} \cdot w_2^p \|_p + \tau_2^{rp} \cdot w_2^s \|_p)] n_r dS = 0,$$

gdzie S jest powierzchnią ciała, w_1 i w_2 dowolnymi polami przemieszczeń, spełniającymi warunki brzegowe (2.6) i (2.10), a τ_1^{rs} i τ_2^{rs} polami naprężeń wywołanymi odpowiednio przez w_1 i w_2 .

Obliczenie całki we wzorze (2.11) nie następuje większych trudności. Po łatwych rachunkach stwierdzamy, że warunek (2.11) jest spełniony tożsamościowo. W związku z tym możemy zastosować bifurkacyjne kryterium utraty stateczności: utrata stateczności następuje, gdy zagadnienie brzegowe (1.29)–(1.31), (2.6) i (2.10) oprócz rozwiązania zerowego ma również rozwiązanie niezerowe. Celem dalszych rozważań będzie znalezienie warunków, przy których wyżej wymienione zagadnienie brzegowe ma rozwiązanie niezerowe.

2.2. Rozdzielenie zmiennych i redukcja do jednego równania

Poszukujemy rozwiązań sformułowanego wyżej zagadnienia brzegowego metodą Fouriera przedstawiając funkcje u , w , p' w postaci

$$(2.12) \quad \begin{aligned} u &= \varphi_{1n}(r) \cos v z, & w &= \varphi_{2n}(r) \sin v z, & p' &= \varphi_{3n}(r) \cos v z, \\ v &= \frac{n\pi}{l}, & n &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy we wzorach (2.12) $n=0$. Wówczas

$$(2.13) \quad u = \varphi_{10}(r), \quad w = 0, \quad p' = \varphi_{30}(r).$$

Podstawiając wyrażenia (2.13) do równań (1.29)–(1.31) otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(2.14) \quad 2 \frac{d\varphi_{10}}{dr} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi_r + \lambda \Psi_r \right) + \frac{d\varphi_{30}}{dr} = 0,$$

$$(2.15) \quad \frac{d\varphi_{10}}{dr} + \frac{1}{r} \varphi_{10} = 0.$$

Całkując równanie (2.15) otrzymujemy

$$(2.16) \quad \varphi_{10} = \frac{C_1}{r},$$

gdzie C_1 jest stałą całkowania. Po podstawieniu (2.16) do (2.14) i scałkowaniu otrzymanego równania mamy

$$(2.17) \quad \varphi_{30} = 2C_1 \int \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi_r + \lambda \Psi_r \right) dr + C_2,$$

gdzie C_2 jest stałą całkowania.

Podstawmy znalezione funkcje u i p' do warunków brzegowych. Warunki (2.6) są spełnione tożsamościowo. Warunki (2.10) prowadzą do równań

$$(2.18) \quad 2 \frac{d\varphi_{10}}{dr} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi + \lambda \Psi \right) + \varphi_{30} = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2.$$

Oznaczmy przez $f(r)$ całkę występującą we wzorze (2.17). Korzystając z (2.16) i (2.17) układ (2.18) możemy teraz przepisać w postaci

$$(2.19) \quad \begin{aligned} C_1 \left[-\frac{2}{a_1^2} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi(a_1) + \lambda \Psi(a_1) \right) + 2f(a_1) \right] + C_2 &= 0, \\ C_1 \left[-\frac{2}{a_2^2} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi(a_2) + \lambda \Psi(a_2) \right) + 2f(a_2) \right] + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Układ (2.19) ma rozwiązania niezerowe, jeżeli jego wyznacznik (będący funkcją λ) jest równy zeru.

Rozpatrzmy teraz przypadek $n \neq 0$. Po podstawieniu wyrażeń (2.12) do równań (1.29)–(1.31) i prostych przekształceniach otrzymujemy

$$(2.20) \quad \begin{aligned} 2 \left[\frac{1}{\lambda^2} A - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B + \frac{2}{\lambda^3} F + \frac{1}{\lambda} \Phi + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi \right] \left(\frac{d^2 \varphi_{1n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_{1n}}{dr} - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \varphi_{1n} \right) + 2\nu \left[\lambda A - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda} \right) B + \left(-\frac{1}{\lambda^3} + 1 + \lambda^3 \right) F + \frac{1}{2\lambda} \Phi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda \right) \Psi \right] \frac{d\varphi_{2n}}{dr} + \frac{d\varphi_{3n}}{dr} - \lambda (\lambda \Phi + \Psi) \nu^2 \varphi_{1n} + 2 \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\lambda^2} A_r - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B_r + \frac{1}{\lambda^3} F_r + \frac{1}{\lambda^2} \Psi_r \right] \varphi_{1n} + 2 \left[\frac{1}{\lambda^2} A_r - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda^2 \right) B_r + \frac{1}{\lambda^3} F_r + \frac{1}{\lambda} \Phi_r + \right. \\ \left. + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \Psi_r \right] \frac{d\varphi_{1n}}{dr} + 2\nu \left[\lambda A_r - \left(\frac{1}{\lambda^4} + \frac{1}{\lambda} \right) B_r + \left(\lambda^3 + 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) F_r + \lambda \Psi_r \right] \varphi_{2n} = 0, \end{aligned}$$

$$(2.21) \quad \begin{aligned} -\nu \left[2\lambda A - 4\lambda^2 B + 2(2 - \lambda^3) F + 3\lambda \Psi + \lambda^2 \Phi \right] \left(\frac{d\varphi_{1n}}{dr} + \frac{1}{r} \varphi_{1n} \right) - \\ - 2\nu^2 \left[\lambda^4 A - \frac{2}{\lambda} B + (2\lambda^3 - 1) F + 2\lambda \Psi + \lambda^2 \Phi \right] \varphi_{2n} + \left(\frac{1}{\lambda} \Phi + \frac{1}{\lambda^2} \Psi \right) \times \\ \times \left(\frac{d^2 \varphi_{2n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_{2n}}{dr} \right) - \nu \varphi_{3n} + \left(\frac{1}{\lambda} \Phi_r + \frac{1}{\lambda^2} \Psi_r \right) \left(\frac{d\varphi_{2n}}{dr} - \nu \varphi_{1n} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$(2.22) \quad \frac{d\varphi_{1n}}{dr} + \frac{1}{r} \varphi_{1n} + \nu \varphi_{2n} = 0.$$

Korzystając z równań (2.21), (2.22) możemy funkcje φ_{2n} , φ_{3n} wyrazić przez funkcję φ_{1n} . Z kolei podstawiając φ_{2n} , φ_{3n} do równania (2.20) otrzymujemy

$$(2.23) \quad \begin{aligned} & -\frac{1}{v^2 \lambda^2} (\lambda \Phi + \Psi) L^4 \varphi_{1n} + 2 \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \left(A + \frac{2}{\lambda} F + \frac{1}{\lambda^2} B \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda \right) (\lambda \Phi + \Psi) \right] L^2 \varphi_{1n} - v^2 \lambda (\lambda \Phi + \Psi) \varphi_{1n} - \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi_r + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\lambda^2} \Psi_r \right) \left(2 \frac{d^3 \varphi_{1n}}{dr^3} + \frac{3}{r} \frac{d^2 \varphi_{1n}}{dr^2} - \frac{3}{r^2} \frac{d \varphi_{1n}}{dr} + \frac{3}{r^3} \varphi_{1n} \right) + \left(-\frac{1}{\lambda} \Phi_r - \frac{1}{\lambda^2} \Psi_r + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{\lambda} \Phi_r + 2 \lambda \Psi_r \right) \frac{d \varphi_{1n}}{dr} + \left[A_r \left(\frac{2}{\lambda^2} + 2 \lambda^4 - 4 \lambda \right) + B_r \left(-\frac{4}{\lambda} + 2 \lambda^2 + \frac{2}{\lambda^4} \right) + \right. \\ & \quad \left. + F_r \left(\frac{2}{\lambda^3} + 4 \lambda^3 - 8 + \frac{2}{\lambda^3} \right) + \Psi_r \left(\frac{2}{\lambda^2} - \lambda \right) + \lambda^2 \Phi_r \right] \left(\frac{d \varphi_{1n}}{dr} + \frac{1}{r} \varphi_{1n} \right) - \\ & \quad \left. - \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi_{rr} + \frac{1}{\lambda^2} \Psi_{rr} \right) \left(v^2 \varphi_{1n} + \frac{d^2 \varphi_{1n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \varphi_{1n}}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi_{1n} \right) = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.24) \quad L^2 = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot) \right].$$

W ten sposób sprowadziliśmy układ równań (2.20)–(2.22) do jednego równania czwartego rzędu.

Podstawmy wyrażenia (2.12) do warunków brzegowych (2.6) i (2.10). Warunki (2.6) są spełnione tożsamościowo. Warunki (2.10) prowadzą do następujących związków:

$$(2.25) \quad (L^2 + v^2) \varphi_{1n} = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2,$$

$$(2.26) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dr} (r L^2 \varphi_{1n}) - 2v^2 \left[\left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \frac{A \lambda^2 + 2 \lambda F + B}{\lambda \Phi + \Psi} + \frac{\lambda^3}{2} + 1 \right] \frac{d}{dr} (r \varphi_{1n}) + \\ & \quad + 2v^2 \frac{\Phi + \lambda^2 \Psi}{\Phi + \frac{1}{\lambda} \Psi} \varphi_{1n} + r \frac{\lambda \Phi_r + \Psi_r}{\lambda \Phi + \Psi} (v^2 + L^2) \varphi_{1n} = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2. \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe (2.23) wraz z warunkami brzegowymi (2.25), (2.26) tworzy jednorodny zagadnienie brzegowe dla funkcji φ_{1n} .

2.3. Warunki utraty stateczności (numeryczna analiza zagadnienia brzegowego)

Załóżmy, że rozpatrywana rura zbudowana jest z materiału Mooneya zdefiniowanego wzorem (1.32). Możemy teraz zanalizować problem istnienia rozwiązań sformułowanego zagadnienia brzegowego. W przypadku $n=0$ obliczamy kolejno

$$(2.27) \quad \begin{aligned} & \Phi(r) = 2(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda r}), \quad \Psi(r) = 2(n_1 + n_2 \sqrt{\lambda r}), \\ & \Phi_r(r) = 2m_2 \sqrt{\lambda}, \quad \Psi_r = 2n_2 \sqrt{\lambda}, \quad A = B = F = 0, \\ & f(r) = \int \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\lambda} \Phi_r + \lambda \Psi_r \right) dr = -\frac{2}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} m_2 + \sqrt{\lambda^3} n_2 \right). \end{aligned}$$

Korzystając z powyższych wzorów możemy układ (2.19) przepisać w postaci

$$(2.28) \quad \begin{aligned} -4C_1 \left[\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{a_1^2} m_1 + \frac{2}{a_1} m_2 \sqrt{\lambda} \right) + \lambda \left(\frac{1}{a_1^2} n_1 + \frac{2}{a_1} n_2 \sqrt{\lambda} \right) \right] + C_2 &= 0, \\ -4C_1 \left[\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{a_2^2} m_1 + \frac{2}{a_2} m_2 \sqrt{\lambda} \right) + \lambda \left(\frac{1}{a_2^2} n_1 + \frac{2}{a_2} n_2 \sqrt{\lambda} \right) \right] + C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia niezerowych rozwiązań układu (2.28) jest znikanie jego wyznacznika. Warunek ten możemy po prostych przekształceniach zapisać w postaci

$$(2.29) \quad \frac{1}{\lambda} \left[m_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + 2m_2 \sqrt{\lambda} \right] + \lambda \left[n_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + 2n_2 \sqrt{\lambda} \right] = 0.$$

Pokażemy, że warunek (2.29) jest spełniony tylko wówczas, gdy $W \equiv 0$. Ponieważ $K_1(r) \geq 0$ i $K_2(r) \geq 0$ dla $a_1 \leq r \leq a_2$ (por. p. 1.4), więc zachodzą nierówności

$$(2.30) \quad m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} a_1 \geq 0, \quad m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} a_2 \geq 0,$$

$$(2.31) \quad n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} a_1 \geq 0, \quad n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} a_2 \geq 0.$$

Dzieląc obustronnie pierwszą z nierówności (2.30) przez a_1 , drugą przez a_2 i dodając je następnie stronami otrzymujemy

$$(2.32) \quad m_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + 2m_2 \sqrt{\lambda} \geq 0.$$

Analogiczny rachunek zastosowany do nierówności (2.31) daje wynik

$$(2.33) \quad n_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + 2n_2 \sqrt{\lambda} \geq 0.$$

Tak więc w równaniu (2.29) współczynniki stojące przy λ i $1/\lambda$ są nieujemne. Równanie (2.29) będzie więc spełnione tylko wtedy, gdy

$$(2.34) \quad m_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + 2m_2 \sqrt{\lambda} = 0 \quad \text{i} \quad n_1 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + 2n_2 \sqrt{\lambda} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że układ równań (2.34) wraz z warunkami (2.30) i (2.31) wyznacza jednoznacznie wartości m_1, m_2, n_1 i n_2 :

$$(2.35) \quad m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 0.$$

Z równości (2.35) wynika, że $W \equiv 0$. Ponieważ ostatni wniosek jest sprzeczny z założeniem o sprężystości materiału, przeto stwierdzamy, że w przypadku $n=0$ nie występuje utrata stateczności przy żadnej wartości λ .

Rozpatrzmy przypadek $n \neq 0$. Po podstawieniu (2.27) do równania równowagi (2.23) otrzymujemy

$$(2.36) \quad \frac{d^4 \varphi_{1n}}{dr^4} + \left[\frac{2}{r} + 2 \frac{\sqrt{\lambda^3} m_2 + \sqrt{\lambda} n_2}{\lambda(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r} \right] \frac{d^3 \varphi_{1n}}{dr^3} +$$

$$\begin{aligned}
 (2.36) \quad & + \left[-\frac{3}{r^2} - v^2(1 + \lambda^3) + \frac{3}{r} \frac{\sqrt{\lambda^3} m_2 + \sqrt{\lambda} n_2}{\lambda(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r} \right] \frac{d^2 \varphi_{1n}}{dr^2} + \\
 & + \left[\frac{3}{r^3} - v^2(1 + \lambda^3) \frac{1}{r} - \left(\frac{3\lambda}{r^2} + \lambda v^2 + \lambda^4 v^2 \right) \frac{m_2 \sqrt{\lambda}}{\lambda(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r} - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{3}{r^2} + v^2 + \lambda^3 v^2 \right) \frac{n_2 \sqrt{\lambda}}{\lambda(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r} \right] \frac{d\varphi_{1n}}{dr} + \left[-\frac{3}{r^4} + \right. \\
 & \quad \left. + v^2(1 + \lambda^3) \frac{1}{r^2} + v^4 \lambda^3 - \left(-\frac{3\lambda}{r^3} + \frac{\lambda^4 v^2}{r} \right) \frac{m_2 \sqrt{\lambda}}{\lambda(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r} - \right. \\
 & \quad \left. - \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{2v^2}{r} - \frac{\lambda^3 v^2}{r} \right) \frac{n_2 \sqrt{\lambda}}{\lambda(m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r} \right] \varphi_{1n} = 0.
 \end{aligned}$$

Podobnie po podstawieniu (2.27) do warunków brzegowych (2.25), (2.26) możemy warunki te zapisać w postaci

$$(2.37) \quad \frac{d^2 \varphi_{1n}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_{1n}}{dr} + \left(v^2 - \frac{1}{r^2} \right) \varphi_{1n} = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2,$$

$$\begin{aligned}
 (2.38) \quad & r \frac{d^3 \varphi_{1n}}{dr^3} + 2 \frac{d^2 \varphi_{1n}}{dr^2} - \left[\frac{1}{r} + 2v^2 \left(1 + \frac{\lambda^3}{2} \right) r \right] \frac{d\varphi_{1n}}{dr} + \\
 & + \left[\frac{1}{r^2} - 2v^2 \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^3 \right) + 2v^2 \frac{m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r + \lambda^2 (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r)}{m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r + \frac{1}{\lambda} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r)} \right] \varphi_{1n} = 0,
 \end{aligned}$$

dla $r = a_1, a_2$.

Równanie (2.36) wraz z warunkami brzegowymi (2.37) i (2.38) tworzy jednorodny zagadnienie brzegowe. Problem istnienia niezerowych rozwiązań tego zagadnienia został rozwiązany metodami analizy numerycznej. Nie wdając się w szczegóły techniczne obliczeń omówimy teraz krótko algorytm zastosowanej metody numerycznej. Pierwszym krokiem jest sprowadzenie zagadnienia brzegowego do układu czterech równań różniczkowych liniowych z czterema liniowymi warunkami brzegowymi. Osiąga się to przez podstawienie

$$(2.39) \quad y_1(r) = \frac{d^3 \varphi_{1n}}{dr^3}, \quad y_2(r) = \frac{d^2 \varphi_{1n}}{dr^2}, \quad y_3(r) = \frac{d\varphi_{1n}}{dr}, \quad y_4(r) = \varphi_{1n}.$$

Podstawienie (2.39) sprowadza równanie (2.36) do układu

$$(2.40) \quad \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \\ y_3(r) \\ y_4(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1(r) & b_2(r) & b_3(r) & b_4(r) \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(r) \\ y_2(r) \\ y_3(r) \\ y_4(r) \end{bmatrix},$$

gdzie $b_i(r)$ są funkcjami parametrów materiałowych i geometrycznych ciała B (m.in. λ). Warunki brzegowe (2.37) i (2.38) można przy użyciu zmiennych (2.39) zapisać w postaci

$$(2.41) \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i^1(r) y_i(r) = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2; \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2(r) y_i(r) = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2,$$

gdzie $\alpha_i^1(r)$, $\alpha_i^2(r)$ są funkcjami parametrów materiałowych i geometrycznych ciała B (m.in. λ).

Całkując numerycznie układ (2.40) przy warunkach początkowych

$$(2.42) \quad y_i^k(a_1) = \delta_i^k, \quad k, i = 1, \dots, 4,$$

gdzie k numeruje wektory-funkcje rozwiązania, i numeruje składowe wektor-funkcji rozwiązania, otrzymujemy cztery liniowo niezależne rozwiązania $y_i^k(r)$. Dowolne rozwiązanie układu (2.40) może być więc przedstawione w postaci

$$(2.43) \quad y_i(r) = \sum_{k=1}^4 C_k y_i^k(r), \quad i = 1, \dots, 4,$$

gdzie C_k są pewnymi stałymi. Po podstawieniu (2.43) do warunków brzegowych (2.41) otrzymujemy jednorodny układ czterech równań algebraicznych z niewiadomymi C_k i współczynnikami a_{jk} zależnymi od parametrów geometrycznych i materiałowych:

$$(2.44) \quad \sum_{k=1}^4 C_k a_{jk} = 0, \quad j = 1, \dots, 4,$$

gdzie

$$(2.45) \quad \begin{aligned} a_{1k} &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i^1(a_1) y_i^k(a_1), & a_{2k} &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2(a_1) y_i^k(a_1), \\ a_{3k} &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i^1(a_2) y_i^k(a_2), & a_{4k} &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2(a_2) y_i^k(a_2), \end{aligned} \quad k = 1, \dots, 4.$$

Zagadnienie brzegowe (2.40), (2.41) ma rozwiązanie niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(2.46) \quad \det a_{jk} = 0.$$

Jeśli w zagadnieniu brzegowym ustalimy wartości wszystkich parametrów oprócz jednego, to wyznacznik $\det a_{jk}$ będzie funkcją tego wybranego parametru. Funkcję tę możemy znaleźć obliczając $\det a_{jk}$ dla pewnych, odpowiednio wybranych wartości zmiennego parametru i dokonując następnie interpolacji między znalezionymi wartościami. (Wymaga to oczywiście wielokrotnego całkowania układu (2.40)). Miejsca zerowe otrzymanej funkcji są poszukiwanymi wartościami krytycznymi parametru, tzn. takimi wartościami parametru, przy których następuje utrata stateczności. W szczególności ustalając wszystkie wartości parametrów oprócz λ możemy znaleźć krytyczną wartość wydłużenia λ_{kr} , przy której następuje utrata stateczności.

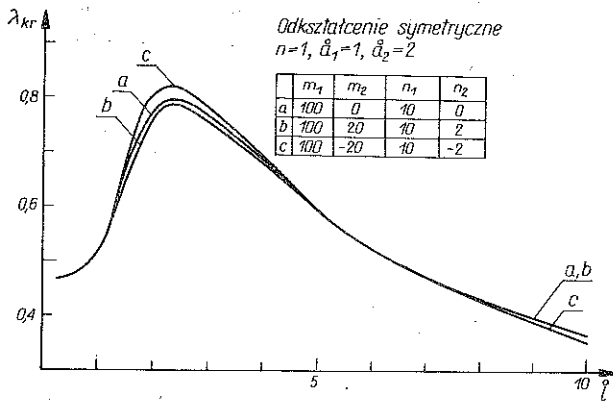
W przypadku, gdy przy ustalonych wartościach parametrów istnieje więcej niż jedna wartość λ_{kr} , interesować nas będą λ_{kr} najbliższe jedności, gdyż odpowiadają one stanowi rury «najbliższemu» β .

Obliczenia numeryczne zostały wykonane według opisanego wyżej schematu na maszynie cyfrowej ODRA-1204. Program obliczeń pozwalał sporządzać wykresy zależności λ_{kr} od różnych parametrów. Do całkowania układu (2.40) zastosowano w programie procedurę typu Rungego-Kutty, opisaną w pracy [12], (por. także [13]).

2.4. Wyniki obliczeń numerycznych

Głównym celem obliczeń numerycznych była analiza zależności odkształcenia krytycznego λ_{kr} od stopnia niejednorodności materiału. Obliczenia zostały przeprowadzone dla materiałów Mooneya zdefiniowanych wzorem (1.32). Przyjęto wartość ilorazu $K_1(r)/K_2(r)$ równą 10. Wartość ta jest typowa dla gumy i materiałów gumopodobnych [11].

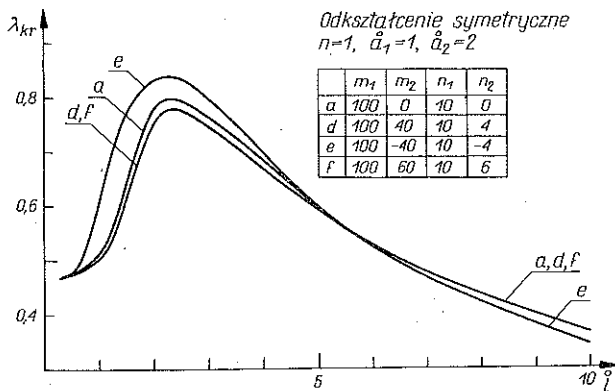
Wyniki obliczeń odnoszące się do przypadku ściskania ($\lambda < 1$) zostały przedstawione na wykresach (rys. 1, 2, 3). Rysunki 1 i 2 zawierają rodzinę wykresów przedstawiających zależność λ_{kr} od wysokości rury dla różnych niejednorodności przy ustalonej średnicy wewnętrznej i zewnętrznej. Rysunek 3 zawiera rodzinę wykresów przedstawiających zależność λ_{kr} od średnicy wewnętrznej rury dla różnych niejednorodności przy ustalonej średnicy zewnętrznej i wysokości rury. Na osiach odciętych wykresów zostały odłożone wielkości bezwymiarowe. Łatwo sprawdzić, że wartość λ_{kr} nie zmienia się, jeżeli w równaniach problemu brzegowego (2.36)–(2.38) wszystkie wielkości mające wymiar długości pomnożymy przez pewien współczynnik k , natomiast m_2 i n_2 podzielimy przez k . Pozwala to na interpretowanie otrzymanych wyników w dowolnym układzie jednostek.



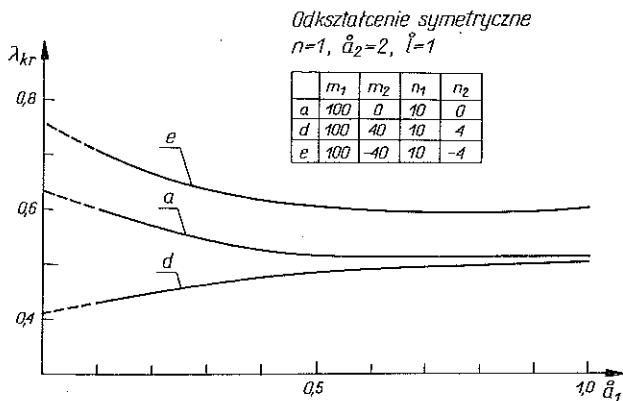
Rys. 1

Oprócz obliczeń, których wyniki zostały przedstawione na wykresach, wykonano obliczenia dla materiałów określonych przez stałe $m_1 = 100$, $-10 \leq m_2 \leq 10$, $n_1 = 10$, $-1 \leq n_2 \leq 1$ (przy $a_2 = 2$). Niejednorodności odpowiadające tym stałym będziemy umownie nazywać małymi. Obliczenia wykazały, że dla małych niejednorodności

wartości λ_{kr} nie różnią się w sposób istotny od odpowiednich wartości dla materiałów jednorodnych (różnice są mniejsze niż 0,01). Materiałom jednorodnym odpowiadają krzywe oznaczone *a*. Wykonane zostały również obliczenia dotyczące przypadku rozciągania rury ($\lambda > 1$). W wyniku tych obliczeń nie stwierdzono utraty stateczności w przedziale $1 \leq \lambda \leq 2$ (zakres zmienności parametrów materiałowych i geometrycznych jest identyczny z przedstawionym na rys. 1 i 2).



Rys. 2



Rys. 3

Omówione dotychczas wyniki obliczeń dotyczą rur o małej wysokości ($\bar{l} \leq 10$, $\bar{a}_2=2$). Dla rury wyższej ($\bar{l}=20$, $\bar{a}_1=1$, $\bar{a}_2=2$) otrzymano następujące wartości λ_{kr} :

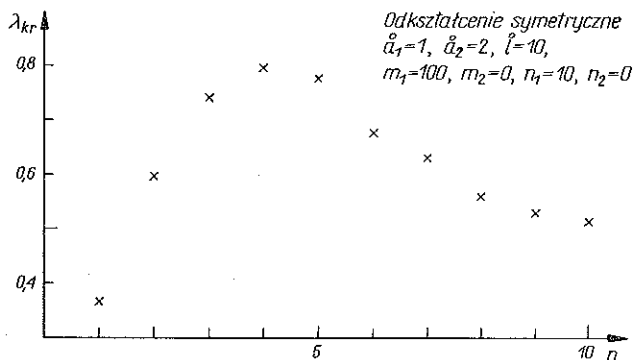
m_1	m_2	n_1	n_2	λ_{kr}
100	0	10	0	0,21
100	20	10	2	0,22
100	-20	10	-2	0,20

Na podstawie rys. 3 możemy znaleźć przybliżone wartości krytycznego odkształcenia dla niejednorodnego walca. Określamy mianowicie odkształcenie krytyczne walca jako granicę odkształceń krytycznych rury, gdy jej średnica wewnętrzna

dąży do zera. Takie podejście do zagadnienia było już stosowane w wielu pracach (m.in. w [1 i 14]). Ekstrapolując do zera krzywe na rys. 3 otrzymujemy następujące wartości odkształceń krytycznych walca ($\hat{a}_2=2$, $\hat{l}=1$):

m_1	m_2	n_1	n_2	λ_{kr}
100	0	10	0	0,63
100	40	10	4	0,41
100	-40	10	-4	0,76

Wykresy przedstawione na rysunkach 1-3 dotyczą postaci utraty stateczności określonej przez $n=1$ (w p. 2.3 wykazaliśmy, że dla $n=0$ nie ma utraty stateczności). Nie zmniejsza to w niczym ogólności wyników, gdyż za pomocą prostej zamiany zmiennych można odczytać z tych wykresów wartości λ_{kr} dla dowolnego n . Wystarczy zauważyć, że wartość n wchodzi do równań i warunków brzegowych wyłącznie przez v ($v=n\pi/\lambda\hat{l}$). Tak więc wartość λ_{kr} dla $n=n_1$ i $\hat{l}=\hat{l}_1$ jest taka sama jak dla $n=1$ i $\hat{l}=\hat{l}_1/n_1$. Pozwala to na sporządzenie wykresów zależności λ_{kr} od n przy ustalonych parametrach geometrycznych i materiałowych (por. rys. 4). Posługując się takim wykresem możemy znaleźć wartość n odpowiadającą największej wartości λ_{kr} .



Rys. 4

Oznaczmy największą wartość λ_{kr} przez λ_{max} a odpowiadającą jej wartość n przez n_{max} . W zakresie odkształceń $\lambda > \lambda_{max}$ rura jest stateczna. Przy $\lambda = \lambda_{max}$ następuje utrata stateczności, a postać utraty stateczności jest określona przez n_{max} . W przykładzie przedstawionym na rys. 4 $n_{max}=4$, $\lambda_{max}=0,79$. Analizując wykresy 1 i 2 łatwo zauważyć, że dla $\hat{l} \leq 3$ utrata stateczności będzie następować przy $n=1$, natomiast dla $\hat{l} \geq 4$ przy $n > 1$.

3. ASYMETRYCZNA POSTAĆ UTRATY STATECZNOŚCI

3.1. Sformułowanie zagadnienia brzegowego

Zajmiemy się analizą warunków wystąpienia asymetrycznej postaci utraty stateczności. Z matematycznego punktu widzenia oznacza to, że rozpatrujemy przypadek, gdy dodatkowe małe odkształcenie nałożone na odkształcenie skończone jest

asymetryczne. Założenia dotyczące materiału i wstępnego stanu odkształcenia są takie same jak w poprzednich rozdziałach. Przyjmujemy, że materiał można opisać potencjałem sprężystym Mooney'a zdefiniowanym wzorem (1.32). Z powyższych założeń wynika, że stan rury B' jest opisany przez równania równowagi (1.36)–(1.38) oraz równanie nieściśliwości (1.25). Załóżmy dalej, że warunki brzegowe są takie same jak te, które sformułowaliśmy w p. 2.1. W celu matematycznego sformułowania tych warunków wystarczy powtórzyć z niewielkimi zmianami rozważania zawarte w p. 2.1 (należy uwzględnić nową postać funkcji G'_{ij}, τ'_{ij}). Spełnienie warunków brzegowych w stanie B jest równoważne przyjęciu związków (1.18). Warunek 1 prowadzi do związku (2.3), z którego po wykorzystaniu (1.18), (1.22) i (1.35) otrzymujemy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_z + w_r &= 0 & \text{dla } z=0, l, \\ v_z + w_\theta &= 0 & \text{dla } z=0, l. \end{aligned}$$

Ponadto z warunku 1 otrzymujemy

$$(3.2) \quad w = 0 \quad \text{dla } z=0, l.$$

Warunek 2 prowadzi do równości (2.9), skąd po podstawieniu (1.35) mamy

$$(3.3) \quad \begin{aligned} 4(n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left[\frac{1}{\lambda^2 r^2} (v_\theta + ru) + \lambda w_z \right] + 4 \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \right. \\ \left. + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] u_r + p' = 0 & \quad \text{dla } r=a_1, a_2; \\ 2 \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \lambda (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \frac{1}{r^2} \left(u_\theta + v_r - \frac{2}{r} v \right) = 0 & \quad \text{dla } r=a_1, a_2; \\ 2 \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \frac{1}{\lambda^2} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] (u_z + w_r) = 0 & \quad \text{dla } r=a_1, a_2. \end{aligned}$$

Równania różniczkowe (1.36) i (1.25) wraz z warunkami brzegowymi (3.1), (3.2) i (3.3) tworzą jednorodny zagadnienie brzegowe. Wykorzystując warunek (2.11) można łatwo sprawdzić, że zagadnienie to jest samosprężone. Tak więc, podobnie jak w p. 2 możemy stosować bifurkacyjne kryterium utraty stateczności.

Przedmiotem dalszych rozważań będzie poszukiwanie warunków, przy których sformułowane zagadnienie brzegowe ma rozwiązanie niezerowe. Poszukujemy rozwiązań metodą Fouriera w postaci

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u &= \varphi_{1nm}(r) \cos v z \cos \mu \vartheta, \\ v &= \varphi_{2nm}(r) \cos v z \sin \mu \vartheta, \\ w &= \varphi_{3nm}(r) \sin v z \cos \mu \vartheta, \\ p' &= \varphi_{4nm}(r) \cos v z \cos \mu \vartheta, \end{aligned}$$

gdzie $v = n\pi/l$, $n=0, 1, 2, \dots$, $\mu=0, 1, 2, \dots$.

Podstawiając (3.4) do równań (1.36) i (1.25) otrzymujemy układ równań

$$(3.5) \quad \cos v z \cos \mu \vartheta \left\{ 2 \left(\frac{1}{r} K_2 + n_2 \sqrt{\lambda} \right) \left[\frac{1}{\lambda^2 r^2} (\mu \varphi_2 + r \varphi_1) + v \lambda \varphi_3 \right] + \right. \\ \left. + 2 K_2 \left[\frac{1}{\lambda^2} \left(-\frac{2}{r^3} \mu \varphi_2 + \frac{1}{r^2} \mu \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{1}{r^2} \varphi_1 + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} \right) + \lambda v \frac{d\varphi_3}{dr} \right] + 2 \frac{d\varphi_1}{dr} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda}} m_2 + \left(\sqrt{\lambda^3} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}} \right) n_2 \right] + 2 \left[\frac{1}{\lambda} K_1 + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) K_2 \right] \left[\frac{d^2 \varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi_1}{dr} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r^3} (\mu \varphi_2 + r \varphi_1) \right] + \frac{1}{2} \frac{d\varphi_4}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\lambda} K_1 + \lambda K_2 \right) \left(-\mu^2 \varphi_1 + \mu \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{2}{r} \mu \varphi_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(K_1 + \frac{1}{\lambda} K_2 \right) \left(\frac{1}{\lambda} v \frac{d\varphi_3}{dr} - \lambda^2 v^2 \varphi_1 \right) - 2 \frac{1}{r} K_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{d\varphi_1}{dr} + v \lambda \varphi_3 \right) \right\} = 0,$$

$$(3.6) \quad \cos v z \sin \mu \vartheta \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} m_2 + \sqrt{\lambda^3} n_2 \right) \left(-\mu \varphi_1 + \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{2}{r} \varphi_2 \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{\lambda} K_1 + \lambda K_2 \right) \left[\frac{1}{r^3} \left(-\mu \varphi_1 + \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{2}{r} \varphi_2 \right) + \frac{1}{r^2} \left(-\mu \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{d^2 \varphi_2}{dr^2} + \frac{2}{r^2} \varphi_2 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{r} \frac{d\varphi_2}{dr} \right) \right] + 2 K_2 \left[\frac{1}{r^2} \left(-\mu \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\varphi_1}{dr} - \lambda \mu v \varphi_3 \right) \right] - \frac{2}{r^4} \left[\frac{1}{\lambda} K_1 + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) K_2 \right] \times \\ \left. \times (\mu^2 \varphi_2 + r \mu \varphi_1) - \frac{1}{2r^2} \mu \varphi_4 + \frac{1}{r^2} \left(K_1 + \frac{1}{\lambda} K_2 \right) \left(-\frac{1}{\lambda} \mu v \varphi_3 - \lambda^2 v^2 \varphi_2 \right) \right\} = 0,$$

$$(3.7) \quad \sin v z \cos \mu \vartheta \left\{ \left(K_1 + \frac{1}{\lambda} K_2 \right) \left[-v \frac{1}{\lambda} \frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 \varphi_3}{dr^2} - \frac{1}{\lambda r^2} (v \mu \varphi_2 + \mu^2 \varphi_3) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\lambda r} \left(v \varphi_1 - \frac{d\varphi_3}{dr} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(-2v^2 \varphi_3 - v \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{1}{r^2} v \mu \varphi_2 - \frac{1}{r} v \varphi_1 \right) \right] + \right. \\ \left. + \left(-v \varphi_1 + \frac{d\varphi_3}{dr} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} m_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda^3}} n_2 \right) + 2 K_2 \left[-\lambda v \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{\lambda}{r^2} (v \mu \varphi_2 + v r \varphi_1) \right] - \right. \\ \left. - 2 \left[\frac{1}{\lambda} K_1 + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) K_2 \right] v^2 \varphi_3 - \frac{1}{2} v \varphi_4 \right\} = 0,$$

$$(3.8) \quad \cos v z \cos \mu \vartheta \left[\frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{1}{r^2} (\mu \varphi_2 + r \varphi_1) + v \varphi_3 \right] = 0.$$

W powyższych równaniach zastosowaliśmy oznaczenie

$$\varphi_k \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{kmn}(r), \quad k=1, \dots, 4.$$

Z kolei podstawiając (3.4) do warunków brzegowych stwierdzamy, że warunki (3.1), (3.2) są spełnione tożsamościowo, natomiast (3.3) przyjmuje postać

$$(3.9) \quad \cos v z \cos \mu \vartheta \left\{ 4 (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \left[\frac{1}{\lambda^2 r^2} (\mu \varphi_2 + r \varphi_1) + \lambda v \varphi_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{d\varphi_1}{dr} \right] + 4 \frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) \frac{d\varphi_1}{dr} + \varphi_4 \right\} = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2;$$

$$(3.10) \quad \cos \nu z \sin \mu \vartheta \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \lambda (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \times \\ \times \frac{1}{r^2} \left(\frac{d\varphi_2}{dr} - \mu \varphi_1 - \frac{2}{r} \varphi_2 \right) = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2;$$

$$(3.11) \quad \sin \nu z \cos \mu \vartheta \left[\frac{1}{\lambda} (m_1 + m_2 \sqrt{\lambda} r) + \frac{1}{\lambda^2} (n_1 + n_2 \sqrt{\lambda} r) \right] \times \\ \times \left(-\nu \varphi_1 + \frac{d\varphi_3}{dr} \right) = 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2.$$

W dalszych rozważaniach zakładając będziemy, że $\nu \neq 0$ i $\mu \neq 0$, ($\mu = 0$ oznacza symetryczną postać utraty stateczności, $\nu = 0$ oznacza, że pole dodatkowej deformacji jest niezależne od z). Możemy wówczas w układzie równań (3.5)–(3.8) i warunkach brzegowych (3.9)–(3.11) pominąć funkcje trygonometryczne.

Problem brzegowy (3.5)–(3.11) wygodnie będzie przedstawić w równoważnej postaci układu równań liniowych pierwszego rzędu z liniowymi warunkami brzegowymi. W tym celu dokonajmy podstawienia

$$(3.12) \quad \begin{aligned} y_1(r) &= \varphi_1(r), & y_2(r) &= \varphi_2(r), & y_3(r) &= \varphi_3(r), \\ y_4(r) &= \varphi_4(r), & y_5(r) &= \frac{d\varphi_2(r)}{dr}, & y_6(r) &= \frac{d\varphi_3(r)}{dr}. \end{aligned}$$

Układ równań (3.5)–(3.8) przyjmuje teraz postać

$$(3.13) \quad \frac{d}{dr} \begin{bmatrix} y_1(r) \\ \vdots \\ y_6(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(r) & a_{12}(r) & \dots & a_{16}(r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{61}(r) & a_{62}(r) & \dots & a_{66}(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(r) \\ \vdots \\ y_6(r) \end{bmatrix},$$

gdzie $a_{ij}(r)$ są funkcjami parametrów materiałowych i geometrycznych ciała B (m.in. λ). Z kolei podstawiając (3.12) do (3.9)–(3.11) otrzymujemy

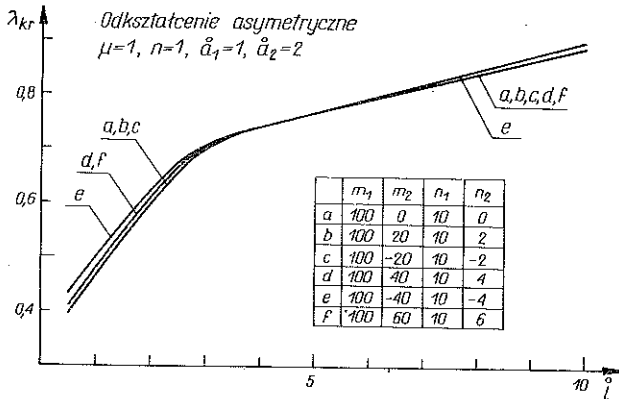
$$(3.14) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^6 \beta_i^1(r) y_i(r) &= 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2, \\ \sum_{i=1}^6 \beta_i^2(r) y_i(r) &= 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2, \\ \sum_{i=1}^6 \beta_i^3(r) y_i(r) &= 0 \quad \text{dla } r = a_1, a_2, \end{aligned}$$

gdzie $\beta_i^1(r)$, $\beta_i^2(r)$ i $\beta_i^3(r)$ są funkcjami parametrów geometrycznych i materiałowych ciała B . Układ równań (3.13) wraz z warunkami brzegowymi (3.14) tworzy jednorodne zagadnienie brzegowe.

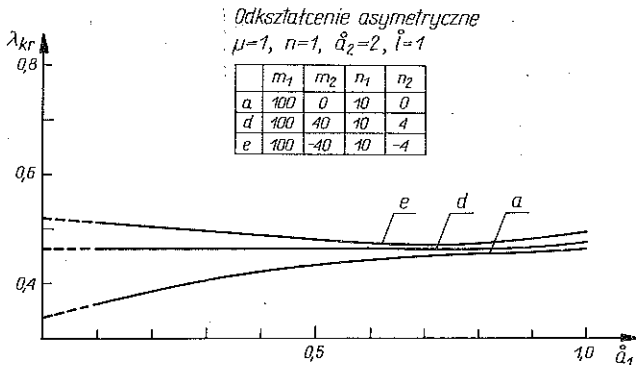
3.2. Obliczenia numeryczne

Problem istnienia niezerowych rozwiązań zagadnienia brzegowego (3.13) i (3.14) został rozwiązany metodami analizy numerycznej. Algorytm zastosowanej metody numerycznej jest analogiczny do tego, który opisaliśmy w p. 2.3; istotne różnice dotyczą tylko ilości występujących zmiennych. Obliczenia numeryczne zostały wykonane na maszynie cyfrowej ODRA-1204. Program obliczeń pozwalał sporządzać wykresy zależności λ_{kr} od różnych parametrów.

Podobnie jak w p. 2.4 głównym celem obliczeń numerycznych była analiza zależności odkształcenia krytycznego λ_{kr} od niejednorodności materiału. Założenia dotyczące rodzaju materiału i układu jednostek są takie same jak w p. 2.4 i nie będziemy ich tu powtarzać.



Rys. 5



Rys. 6

Wyniki obliczeń odnoszące się do przypadku ściskania ($\lambda < 1$) zostały przedstawione na wykresach (rys. 5 i 6). Rysunek 5 zawiera rodzinę wykresów przedstawiających zależność λ_{kr} od wysokości rury dla różnych niejednorodności przy ustalonej średnicy wewnętrznej i zewnętrznej. Rysunek 6 zawiera rodzinę wykresów przedstawiających zależność λ_{kr} od średnicy wewnętrznej rury dla różnych niejednorodności przy ustalonej średnicy zewnętrznej i wysokości rury.

Oprócz obliczeń, których wyniki zostały przedstawione na wykresach, wykonano obliczenia dla materiałów określonych przez stałe $m_1=100$, $-10 \leq m_2 \leq 10$, $n_1=10$, $-1 \leq n_2 \leq 1$, przy $\hat{a}_2=2$ (małe niejednorodności). Stwierdzono, że dla małych niejednorodności wartości λ_{kr} nie różnią się w sposób istotny od odpowiednich wartości dla materiałów jednorodnych (różnice są mniejsze niż 0,01). Materiałom jednorodnym odpowiadają krzywe oznaczone *a*. Wykonane zostały również obliczenia dotyczące przypadku rozciągania rury ($\lambda > 1$). W wyniku tych obliczeń nie stwierdzono utraty stateczności w zakresie $1 \leq \lambda \leq 2$ (zakres zmienności parametrów materiałowych i geometrycznych jest identyczny z przedstawionym na rys. 5).

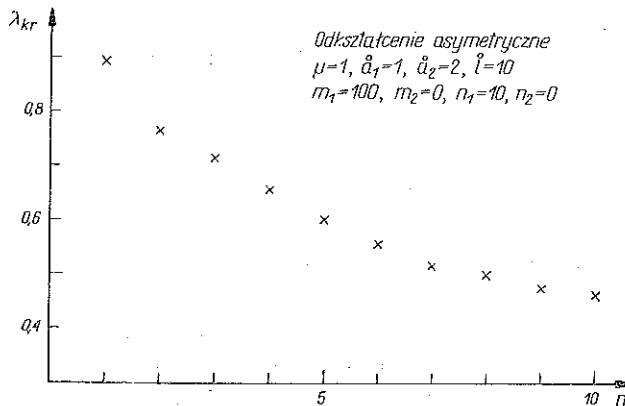
Podobnie jak w p. 2.4 przeprowadzono obliczenia dla rury wysokiej ($\hat{l}=20$, $\hat{a}_1=1$, $\hat{a}_2=2$). Wyniki obliczeń zawiera poniższa tablica:

m_1	m_2	n_1	n_2	λ_{kr}
100	0	10	0	0,98
100	20	10	2	0,96
100	-20	10	-2	0,96
100	40	10	4	0,96
100	-40	10	-4	0,98
100	60	10	6	0,96

Na podstawie rys. 6 możemy znaleźć przybliżone wartości krytycznego odkształcenia dla niejednorodnego walca (por. p. 2.4). Dokonując odpowiedniego przejścia granicznego otrzymujemy wartości krytycznych odkształceń walca przedstawione w poniższej tablicy

m_1	m_2	n_1	n_2	λ_{kr}
100	0	10	0	0,34
100	40	10	4	0,46
100	-40	10	-4	0,52

Wykresy przedstawione na rys. 5 i 6 dotyczą postaci utraty stateczności określonej przez $\mu=1$, $n=1$. Przypadek $\mu=1$ odpowiada rozwiązaniu problemu Eulera w klasycznej teorii sprężystości, dlatego też przeanalizowanie tego przypadku wydaje się najbardziej celowe. Przyjęcie wartości $n=1$ nie zmniejsza ogólności rozważań, gdyż



Rys. 7

identycznie z tym, co pokazaliśmy w p. 2.4 możemy za pomocą zamiany zmiennych znaleźć krytyczne odkształcenia odpowiadające innym wartościom n . Przykładowy wykres zależności λ_{kr} od n przy ustalonych parametrach geometrycznych i materiałowych zawiera rys. 7. Funkcja $\lambda_{kr}(n)$ jest malejąca, a więc maksymalna wartość λ_{kr} jest równa $\lambda_{kr}(1)$. Inaczej mówiąc w zakresie odkształceń $\lambda > \lambda_{kr}(1)$ rura jest stateczna. Łatwo zauważyć analizując wykresy na rys. 5, że podobny charakter będą miały funkcje $\lambda_{kr}(n)$ dla innych wartości parametrów geometrycznych i materiałowych. Wynika stąd, że w przypadku asymetrycznej postaci utraty stateczności największej wartości krytycznej odkształcenia odpowiada $n=1$.

4. ZAKOŃCZENIE

Zestawiając wyniki uzyskane w niniejszej pracy możemy sformułować następujące wnioski:

1) dla małych niejednorodności (w sensie określonym w p. 2.4) wartości krytycznego odkształcenia rury nie różnią się w sposób istotny od odpowiednich wartości dla materiałów jednorodnych;

2) nie stwierdzono utraty stateczności w przypadku rozciągania rury w zakresie $1 \leq \lambda \leq 2$;

3) rura wysoka ($l/a_2 > 5$) traci stateczność blisko stanu nieodkształconego ($0,9 < \lambda_{kr} < 1$);

4) w przypadku symetrycznej postaci utraty stateczności rury wartości λ_{kr} najbliższej 1 mogą odpowiadać różne wartości n zależnie od wartości parametrów materiałowych i geometrycznych; dla $n=0$ nie ma utraty stateczności;

5) w przypadku asymetrycznej postaci utraty stateczności rury wartości λ_{kr} najbliższej 1 odpowiada wartość $n=1$.

Powyższe wnioski dotyczą materiałów niejednorodnych określonych wzorem (1.32). Wobec braku jakichkolwiek wyników dotyczących stateczności materiałów z niejednorodnością ciągłą rozpatrzenie niejednorodności określonej przez funkcję liniową wydawało się najbardziej celowe. Przyjęcie funkcji W w postaci (1.32) znacznie upraszcza obliczenia, a ponadto może być traktowane jako pierwsze (liniowe) przybliżenie bardziej skomplikowanych niejednorodności. Niemniej należy stwierdzić, że dla uzyskania pełniejszego obrazu zachowania się materiałów niejednorodnych konieczne jest rozpatrzenie innych rodzajów niejednorodności, a także uwzględnienie szerszego zakresu zmienności parametrów geometrycznych. Metoda poszukiwania odkształceń krytycznych przedstawiona w niniejszej pracy rokuje tu pewne nadzieje, gdyż (przynajmniej teoretycznie) nie stawia żadnych ograniczeń dla postaci potencjału sprężystego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. W. WILKES, *On the stability of a circular tube under end trust*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 8, 1, 88-100, 1955.
2. A. E. GREEN, J. M. SPENCER, *The stability of a circular cylinder under finite extension and torsion*, J. Math. and Phys., 37, 4, 316-338, 1959.

3. Z. WESOŁOWSKI, *The axially symmetric problem of stability loss of an elastic bar subject to tension*, Arch. Mech. Stos., **15**, 3, 383–395, 1963.
4. B. DUSZCZYK, *Stateczność grubościennej rury obciążonej ciśnieniem zewnętrznym*, Rozpr. Inż., **15**, 2, 311–321, 1967.
5. B. DUSZCZYK, *Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym*, Mech. Teor. i Stos., **5**, 4, 401–409, 1967.
6. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., **A211**, 128–154, 1952.
7. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Oxford 1954.
8. GUO ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., **15**, 2, 309–321, 1963.
9. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, Springer Verlag, Berlin 1965.
10. J. SAMBORSKI, *Stateczność niejednorodnego walca przy skończonych odkształceniach*, Praca doktorska, Warszawa 1970.
11. A. E. GREEN, J. E. ADKINS, *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*, Oxford 1960.
12. J. MACZYŃSKI, *Dwie procedury typu Rungego-Kutty dla całkowania układów równań różniczkowych zwyczajnych*, Prace COPAN, **5**, 1970.
13. L. COLLATZ, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, Warszawa 1960.
14. E. ZŁATANOWA, *Pewne zagadnienia stateczności i sztywności wstępnie sprężonych elementów sprężystych*, Praca doktorska, Warszawa 1970.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕОДНОРОДНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ, ПОДВЕРЖЕННОЙ КОНЕЧНЫМ ДЕФОРМАЦИЯМ

Решена задача об устойчивости толстостенной неоднородной трубы, подверженной конечным деформациям. На основе кинетического критерия потери устойчивости выводятся уравнения равновесия неоднородного тела с осевой симметрией. Далее, задача о критических деформациях сводится к линейной самосопряженной краевой задаче, которая решается численным путем. Выполнен анализ условий потери устойчивости в зависимости от различных геометрических и материальных параметров.

SUMMARY

STABILITY OF A NONHOMOGENEOUS, THICK-WALLED TUBE SUBJECT TO FINITE DEFORMATION

On the basis of the kinetic criterion of instability, the equation of equilibrium of a nonhomogeneous, axially symmetric body has been derived. The problem of determination of the critical strains is then reduced to a linear, self-adjoint boundary value problem which is solved numerically. The conditions of stability loss are analyzed, depending on various geometric and material parameters of the body.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 kwietnia 1973 r.