*ROZPRAWY INŻYNIERSKIE*, **21**, 3, 495–500, 1973, Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

# FUNKCJE NAPRĘŻEŃ W TEORII POWŁOK SIATKOWYCH

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

## Wykaz oznaczeń

$\{z^k\}$ kartezjański układ współrzędnych prostokątnych parametryzujący przestrzeń, w której znajduje się powłoka,
$\{x^K\}$ układ współrzędnych krzywoliniowych parametryzujący powierzchnię podstawową $\pi$ powłoki,
$\psi^k(x^K)$ składowe wektora wodzącego punktów powierzchni $\pi$,
$\nu^k(x^K)$ składowe wektora jednostkowego, normalnego do $\pi$,
$a_{KL}$ składowe pierwszego tensora podstawowego powierzchni $\pi$,
$b_{KL}$ składowe drugiego tensora podstawowego powierzchni $\pi$,
$e_{KL}$ składowe dwuwektora Ricciego powierzchni $\pi$,
$\left\{ \begin{matrix} K \\ LM \end{matrix} \right\}$ symbole Christoffela drugiego rodzaju powierzchni $\pi$,
$\varepsilon_{klm}$ symbole Ricciego,
$\delta_{kl}$ symbole Kroneckera.

Wskaźniki $k, l, m, n, \ldots$ przebiegają ciąg 1, 2, 3, wskaźniki $K, L, M, N, \ldots$ ciąg 1, 2. Pochodną cząstkową oznaczono przecinkiem, pochodną kowariantną pionową kreską. Stosowana jest konwencja sumacyjna.

## Wstęp

Często w przypadkach, w których dźwigary powierzchniowe obciążone są tylko wzdłuż brzegów, warto jako podstawowe niewiadome przyjąć nie składowe stanu przemieszczenia lecz funkcje naprężeń.

W tej pracy omówiono funkcje naprężeń w teorii dźwigarów siatkowych, których modelem obliczeniowym jest dwuwymiarowy włóknisty ośrodek Cosseratów. Przedstawione związki mogą być wykorzystywane przy rozwiązywaniu zagadnień statyki siatkowych ustrojów nośnych.

## 1. Funkcje naprężeń

Jednorodne równania równowagi, rozpatrywanych w tej pracy powłok siatkowych, mają postać [2]

$$
\begin{gathered}
p^{KN}|_K - b^N_K p^K = 0\,, \qquad p^K|_K + b_{KL}\, p^{KL} = 0\,, \\
m^{KN}|_K - b^N_K m^K + e^N{}_K\, p^K = 0\,, \\
m^K|_K + b_{KL}\, m^{KL} + e_{KL}\, p^{KL} = 0\,,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

gdzie $p^{KN}$ i $p^K$ są składowymi tensora i wektora naprężenia, a $m^{KN}$ i $m^K$ składowymi tensora i wektora naprężenia momentowego.

Równania (1.1) przekształcimy tak, aby można było łatwo wprowadzić funkcje naprężeń.

Biorąc pod uwagę, że

$$\left\{ {M \atop MK} \right\} = \frac{(\sqrt{a})_{,K}}{\sqrt{a}}, \qquad a = \det a_{KL},$$

$$e_{LK}\, \nu^k = \varepsilon^k{}_{lm}\, \psi^l{}_{,L}\, \psi^m{}_{,K}, \qquad e_L{}^N\, \psi^k{}_{,N} = \varepsilon^k{}_{lm}\, \nu^l\, \psi^m{}_{,L}$$

oraz korzystając ze wzorów Weingartena-Gaussa, otrzymujemy następujące równania równowagi:

$$\begin{aligned} &e^{KL}\, q^k_{K,L} = 0, \\ &e^{KL}(s^k_{K,L} + \varepsilon^k{}_{lm}\, q^m_K\, \psi^l{}_{,L}) = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdzie

$$\begin{aligned} q^k_K &= e_{LK}\, p^{LM}\, \psi^k{}_{,M} + e_{MK}\, p^M\, \nu^k, \\ s^k_K &= e_{LK}\, m^{LM}\, \psi^k{}_{,M} + e_{MK}\, m^M\, \nu^k. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Należy zaznaczyć, że wielkości $q^k_K$ i $s^k_K$ nie są składowymi tensorów naprężenia i naprężenia momentowego Pioli-Kirchhoffa, ponieważ w równaniach (1.2) nie występują dywergencje tych wielkości. Są to składowe pewnych obiektów naprężenia i hipernaprężenia przyjętych po to, aby można było łatwo wprowadzić funkcje naprężeń.

Istotnie, jeżeli wyrazimy wielkości $q^k_K$ i $s^k_K$ przez sześć dowolnych funkcji $t^k$ i $r^k$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} q^k_K &= t^k{}_{,K}, \\ s^k_K &= r^k{}_{,K} + \varepsilon^k{}_{lm}\, t^m\, \psi^l{}_{,K}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

to łatwo sprawdzić, że równania (1.2) będą spełnione tożsamościowo. Zatem funkcje $t^k$ i $r^k$ można nazwać funkcjami naprężeń.

Podstawiając wyrażenia (1.4) do (1.3) i wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymujemy

$$\begin{aligned} p^{KL} &= e^{KN}\, a^{ML}\, \delta_{kl}\, t^k{}_{,N}\, \psi^l{}_{,M}, \\ p^K &= e^{KN}\, \delta_{kl}\, t^k{}_{,N}\, \nu^l, \\ m^{KL} &= e^{KN}\, a^{ML}\, \delta_{kl}\, (r^k{}_{,N} + \varepsilon^k{}_{mn}\, t^n\, \psi^m{}_{,N})\, \psi^l{}_{,M}, \\ m^K &= e^{KN}\, \delta_{kl}\, (r^k{}_{,N} + \varepsilon^k{}_{mn}\, t^n\, \psi^m{}_{,N})\, \nu^l. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Wzory (1.5) są związkami między dwunastoma składowymi stanu naprężenia a sześcioma funkcjami naprężeń.

Jak wynika z (1.3) i (1.4) funkcje $t^k$ i $r^k$ są składowymi, w układzie $\{z^k\}$, dwóch funkcji wektorowych. Dokonując rozkładów tych funkcji w bazie określonej wektorami o składowych $\psi^k{}_{,1}, \psi^k{}_{,2}, \nu^k$ otrzymamy różne układy funkcji naprężeń.

Przyjmując na przykład

$$t^k = \varphi^K \psi^k{}_{,K} + \eta \nu^k,$$

$$r^k = \lambda^K \psi^k{}_{,K} + \mu \nu^k$$

i podstawiając do (1.5), otrzymujemy

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} p^{KL} &= e^{KN}(\varphi^L|_N - b^L_N \eta), \\ p^K &= e^{KN}(\eta|_N + b_{LN} \varphi^L), \\ m^{KL} &= e^{KN}(\lambda^L|_N - b^L_N \mu + e^L{}_N \eta), \\ m^K &= e^{KN}(\mu|_N + b_{LN} \lambda^L + e_{NL} \varphi^L). \end{aligned}$$

Wzory podobne do tego szczególnego przypadku otrzymano na innej drodze, wykorzystując analogię statyczno-geometryczną, w pracy [9].

Funkcje $\varphi^K$, $\lambda^K$, $\eta$, $\mu$ mają to samo znaczenie, co funkcje naprężeń w klasycznej teorii powłok Kirchhoffa-Love'a, wprowadzone w pracach [5 i 6] oraz omawiane między innymi w pracach [7 i 8].

Inny układ funkcji naprężeń otrzymamy przyjmując

$$t^k = a^{KL} \beta|_L \psi^k{}_{,K} + \eta \nu^k,$$

$$r^k = a^{KL} \alpha|_L \psi^k{}_{,K} + \mu \nu^k.$$

W tym przypadku związki między składowymi stanu naprężenia a funkcjami naprężeń mają postać

$$(1.7) \qquad \begin{aligned} p^{KL} &= e^{KN}(a^{LM} \beta|_{MN} - b^L_N \eta), \\ p^K &= e^{KN}(\eta|_N + b^M_N \beta|_M), \\ m^{KL} &= e^{KN}(a^{LM} \alpha|_{MN} - b^L_N \mu + e^L{}_N \eta), \\ m^K &= e^{KN}(\mu|_N + b^M_N \alpha|_M + e_N{}^M \beta|_M). \end{aligned}$$

Mamy teraz tylko cztery funkcje naprężeń $\alpha$, $\beta$, $\eta$, $\mu$. Dysponując wzorami (1.5) nietrudno wyprowadzić szereg innych związków między składowymi stanu naprężenia a funkcjami naprężeń. Na przykład przyjmując

$$t^k = E^{KL} \tilde{\beta}|_L \psi^k{}_{,K} + \eta \nu^k,$$

$$r^k = H^{KL} \tilde{\alpha}|_L \psi^k{}_{,K} + \mu \nu^k$$

(gdzie $E^{KL}$ i $H^{KL}$ są składowymi dowolnych tensorów powierzchni $\pi$), otrzymamy różne związki dla różnych $E^{KL}$ i $H^{KL}$.

Rozważmy z kolei postać związków (1.7) dla teorii asymptotycznych powłok siatkowych.

W teorii niepolarnej zachodzą równości

$$(1.8) \qquad m^K = 0.$$

Równania (1.8) pozwalają wyrazić funkcje $\beta|_M$ przez funkcje $\alpha$ i $\mu$, co prowadzi do wzorów

$$
\begin{aligned}
& p^{KL}=e^{KN}\, e^{LM}\,(\mu|_M+b^R_M\,\alpha|_R)|_N-e^{KN}\, b^L_N\,\eta\,;\\
(1.9)\qquad & p^K=e^{KN}\,\eta|_N+e^{KN}\,e^{LM}\,b_{LN}\,(\mu|_M+b^R_M\,\alpha|_R)\,,\\
& m^{KL}=e^{KN}\,(a^{LM}\,\alpha|_{MN}-b^L_N\,\mu+e^L{}_N\,\eta)\,.
\end{aligned}
$$

A zatem w teorii niepolarnej można dziesięć składowych stanu naprężenia wyrazić przez trzy funkcje naprężeń.

Drugą teorią asymptotyczną jest teoria skrępowanych obrotów, dla której poprawne pozostają związki (1.7). W teorii wykorzystującej zarówno założenia teorii niepolarnej, jak i teorii skrępowanych obrotów, poprawne są związki (1.9).

## 2. Niektóre przypadki szczególne

Szczególnymi przypadkami powłok siatkowych są, między innymi, kratownice powierzchniowe, dla których jednorodne równania równowagi sprowadzają się do postaci

$$(2.1)\qquad p^{KN}|_K=0\,,\qquad b_{KL}\,p^{KL}=0\,,$$

W tym przypadku

$$p^K=0\,.$$

Zatem zakładając, że krzywizna Gaussa $K$ powierzchni $\pi$ jest różna od zera, można, korzystając z $(1.9)_2$, wyrazić sumy $\mu|_M+b^N_M\,\alpha|_N$ przez funkcje $\eta|_M$, co prowadzi do wzoru

$$(2.2)\qquad p^{KL}=e^{KN}\,e^{LM}\,(K^{-1}\,e^{PR}\,b_{MP}\,\eta|_R)|_N-e^{KN}\,b^L_N\,\eta\,.$$

Tak więc cztery składowe stanu naprężenia $p^{KL}$ można w tym przypadku wyrazić przez jedną funkcję naprężeń $\eta$.

Tensor sztywności sprężystej kratownic powierzchniowych jest symetryczny względem wszystkich wskaźników, skąd też zachodzi równość

$$(2.3)\qquad e_{KL}\,p^{KL}=0\,.$$

Podstawiając (2.2) do (2.3) otrzymujemy jedno równanie równoważne układowi (2.1)

$$(2.4)\qquad e^{KL}\,e^{MN}\,(K^{-1}\,b_{NK}\,\eta|_L)|_M-b^K_K\eta=0\,.$$

Równanie podobne do (2.4) zostało przedstawione w pracy [7] dla błonowej teorii powłok.

Inne szczególne przypadki uzyskamy, gdy dźwigar siatkowy o węzłach sztywnych kształtowany będzie na płaszczyźnie. Można wtedy rozpatrywać oddzielnie dwa zagadnienia: tarczowe oraz płytowe. Dla zagadnienia tarczowego na podstawie (1.6) otrzymujemy

$$(2.5)\qquad p^{KL}=e^{KN}\,\varphi^L|_N\,,\qquad m^K=e^{KN}\,(\mu|_N+e_{NL}\,\varphi^L)\,.$$

Rugując z $(2.5)_2$ funkcje $\varphi^L$ i podstawiając do $(2.5)_1$ znajdujemy

$$p^{KL} = e^{KM}\, e^{LN}\, \mu|_{NM} - e^{KM}\, m^L|_M\,. \tag{2.6}$$

W prostokątnym kartezjańskim układzie współrzędnych związek (2.6) ma postać

$$p^{KL} = \varepsilon^{KM}\, \varepsilon^{LN}\, \mu_{,NM} - \varepsilon^{KM}\, m^L{}_{,M}\,.$$

Ten szczególny przypadek został szeroko omówiony w monografii [2].

Przyjmując

$$m^K = \delta^{KL}\, \xi_{,L}\,,$$

otrzymujemy

$$p^{KL} = \varepsilon^{KM}\, \varepsilon^{LN}\, \mu_{,NM} - \varepsilon^{KM}\, \delta^{LN}\, \xi_{,NM}\,.$$

Zagadnienia tarczowe rozważanych dźwigarów są równoważne zagadnieniom płaskiego stanu naprężenia w teorii niesymetrycznej sprężystości, stąd też w tym przypadku funkcje $\mu$ i $\xi$ wykazują pełną analogię do funkcji naprężeń wprowadzonych w pracach [3 i 4] i omawianych także w monografii [1]. Dla zagadnienia płytowego na podstawie (1.6) otrzymujemy

$$p^K = e^{KN}\, \eta|_N\,, \qquad m^{KL} = e^{KN}\, \lambda^L|_N + a^{KL}\, \eta\,. \tag{2.7}$$

Wzory (2.7) mogą być użyteczne przy rozwiązywaniu zagadnień płyt siatkowych obciążonych tylko wzdłuż krawędzi.

## Literatura cytowana w tekście


1. W. Nowacki, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. Cz. Woźniak, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
3. R. D. Mindlin, *Stress functions for a Cosserat continuum*, Int. J. Solids Struct., **3**, 1, 1965.
4. H. Schaefer, *Versuch einer Elastizitätstheorie das zweidimesionalen ebenen Cosserat-Kontinuums*, Miszellaneen der Angew. Mechanik, Festschrift. W. Tollmien, 1962.
5. А. Л. Гольденвейзер, *Уравнения теории тонких оболочек*, Прикл. Мат. Мех,. **4**. 2, 1940.
6. А. У. Лурье, *Общая теория упругих тонких оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **4**, 2, 1940.
7. А. Л. Гольденвейзер, А. И. Лурье, *О математической теории равновесия упругих оболочек*, Прикл. Мат. Мех., **11**, 5, 1947.
8. А. Л. Гольденбейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Гостехиздат, Москва 1953.
9. M. Kleiber, Cz. Woźniak, *On equations of the linear theory of elastic lattice shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 3, 1971.



## Резюме

### ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕОРИИ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК

В работе рассмотрены функции напряжений в теории сетчатых несущих оболочек, для которых расчетной моделью является двумерная волокнистая среда Коссера. В частности, рассмотрены функции напряжений для неполярной теории оболочек, для двухмерных ферм, а также для сетчатых плит и пластин.

Преставленные соотношения могут найти применение про решении задач статики поверхностных сетчатых несущих сооружений.

## SUMMARY

## STRESS FUNCTIONS IN THE THEORY OF LATTICE SHELLS

In the paper are considered the stress functions used in the theory of surface lattice structures which may be modelled by a two-dimensional, fibrous Cosserat medium. Stress functions of the non-polar shell theory are discussed in particular, i.e., in the theory of surface trusses and lattice plates. The relations derived may be used in solving the problems (formulated in stresses) of statics of lattice surface structure.


POLITECHNIKA ŚLĄSKA W GLIWICACH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 marca 1973 r.*